

**2. В примере 1 вычислить пределы, используя правило Лопиталя; в примере 2 найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном интервале; в примере 3 вычислить приближенное значение функции  $y = f(x)$ , заменив в точке  $x = x_0$  приращение функции дифференциалом; в примере 4 исследовать средствами дифференциального исчисления функции и построить их графики**

### Вариант 1.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ .
2.  $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2}$ ,  $x \in [-2; 1]$ .
3.  $y = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}$ ,  $x_0 = 4$ ,  $x = 3,94$ .
4. а)  $y = \frac{1}{3}(x^3 - 14x^2 + 49x - 36)$ ;    б)  $y = x^2 + \frac{2}{x}$ ;  
       в)  $y = e^{1/x}$ ;                      г)  $y = \ln \frac{x-5}{x} - 2$ ;

### Вариант 2.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x / x^3$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$ .
2.  $y = 4/x^2 - 8x - 15$ ,  $x \in [-2; -0,5]$ .
3.  $y = \cos x$ ,  $x_0 = 60^\circ$ ,  $x = 63^\circ$ .
4. а)  $y = \frac{1}{20}(x^3 - 25x^2 + 143x - 119)$ ; б)  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ ;  
       в)  $y = x - \ln(x+1)$ ;                      г)  $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$ .

**Вариант 3.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ .
2.  $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ ;  $x \in [0; 6]$ .
3.  $y = \sqrt{5x^2 + 4x - 1}$ ,  $x_0 = 5$ ,  $x = 5,08$ .
4. а)  $y = x^3 - 8,5x^2 + 20x - 12,5$ ; б)  $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ ;  
 в)  $y = \frac{e^{x-2}}{x-2}$ ; г)  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

**Вариант 4.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$ .
2.  $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5} + 7$ ;  $x \in [-3; 3]$ .
3.  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = 30^\circ$ ,  $x = 32^\circ$ .
4. а)  $y = \frac{1}{3}(x^3 - 16x^2 + 69x - 54)$ ; б)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ ;  
 в)  $y = e^{1/x} - x$ ; г)  $y = \ln \frac{x+2}{x} + 3$ .

**Вариант 5.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(x+1)}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

$$2. y = x^2 - 2x - 13 + \frac{16}{x-1}, x \in [2; 5].$$

$$3. y = \sqrt[5]{x^2 - 2x + 8}, x_0 = 6, x = 5,84.$$

$$4. a) y = \frac{1}{20}(x^3 - 29x^2 + 215x - 187); б) y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8};$$

$$в) y = \frac{e^{2-x}}{2-x};$$

$$г) y = \ln \sin x.$$

### Вариант 6.

$$1. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$2. y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}; x \in [-1; 5].$$

$$3. y = \sin x, x_0 = 30^\circ, x = 32^\circ.$$

$$4. a) y = x^3 - 9,5x^2 + 26x - 17,5; б) y = \frac{3x^4 + 1}{x^3};$$

$$в) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$г) y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

### Вариант 7.

$$1. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

$$2. y = x^2 + 4x - 9 + \frac{16}{x+2}, x \in [-1; 2].$$

$$3. y = \sqrt[4]{x^3 + 6x - 7}, x_0 = 4, x = 4,06.$$

$$4. a) y = \frac{1}{3}(x^3 - 8x^2 + 5x + 14); б) y = \frac{x^4 - 3}{x};$$

$$\text{в) } y = \ln \frac{x}{x+2} + 1;$$

$$\text{г) } y = x^2 \cdot e^{-x^2}.$$

### Вариант 8.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\ln \operatorname{tg} 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$2. y = 5 + \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}; x \in [-2; 5].$$

$$3. y = \operatorname{ctg} x, x_0 = 45^\circ, x = 43^\circ.$$

$$4. \text{ а) } y = \frac{1}{20}(x^3 - 19x^2 + 55x + 75); \text{ б) } y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2};$$

$$\text{в) } y = \ln \frac{x+6}{x};$$

$$\text{г) } y = x \cdot e^{-x}.$$

### Вариант 9.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$$

$$2. y = 2x^2 + 108/x - 59, x \in [-1; 2].$$

$$3. y = \sqrt[3]{2x^2 + 2x + 13}, x_0 = -8, x = -7,85.$$

$$4. \text{ а) } y = x^3 - 2,5x^2 - 2x + 1,5; \text{ б) } y = \frac{16}{x^2(x-4)};$$

$$\text{в) } y = x + \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{г) } y = (2x + 3) \cdot e^{-2(x+1)}.$$

### Вариант 10.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (x)^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$2. y = 2x^2 + 108/x - 59, x \in [2; 4].$$

3.  $y = \sin x$ ,  $x_0 = 30^\circ$ ,  $x = 27^\circ$ .

4. а)  $y = x^3 - 2,5x^2 - 2x + 1,5$ ;      б)  $y = \frac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ ;

в)  $y = 3\left(1 - \ln \frac{x}{x+4}\right)$ ;      г)  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ .

### Вариант 11.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ .

2.  $y = 13 - 2x^2 + x^3/3$ ,  $x \in [-6; 1]$ .

3.  $y = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}$ ,  $x_0 = 9$ ,  $x = 9,08$ .

4. а)  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ ;      б)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ;

в)  $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$ ;      г)  $y = x^3 \cdot e^{-x}$ .

### Вариант 12.

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$ .

2.  $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ ,  $x \in [0; 1]$ .

3.  $y = \cos x$ ,  $x_0 = 60^\circ$ ,  $x = 59^\circ$ .

4. а)  $y = x^3/3 - 3x^2 + 5x + 1$ ;      б)  $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ ;

в)  $y = \ln \frac{x}{x-2} - 2$ ;      г)  $y = \frac{1}{e^x - 1}$ .

**Вариант 13.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$ .

2.  $y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x - 2}$ ,  $x \in [1; 4]$ .

3.  $y = \sqrt[4]{5x^2 - 3x + 2}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $x = 1,92$ .

4. а)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ ;

б)  $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ ;

в)  $y = \ln \frac{x - 7}{x} + 3$ ;

г)  $y = x \cdot e^{-x^2/2}$ .

**Вариант 14.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{\operatorname{arctg} x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\cos x)^{\pi/2 - x}$ .

2.  $y = -4\sqrt{x + 2} + 27$ ,  $x \in [-1; 7]$ .

3.  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = 45^\circ$ ,  $x = 43^\circ$ .

4. а)  $y = x^3/3 + 3x^2 - 7x - 2$ ; б)  $y = (17 - x^2)/(4x - 5)$ ;

в)  $y = \ln \cos x$ ;

г)  $y = (3 - x) \cdot e^{x-2}$ .

**Вариант 15.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\ln(1 + x)}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$ .

2.  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2$ ;  $x \in [-2; 4]$ .

3.  $y = \sqrt{3x^2 - 6x - 5}$ ,  $x_0 = 7$ ,  $x = 7,05$ .

$$4. \text{ а) } y = \frac{1}{x} + 4x^2; \quad \text{б) } y = 3x^4/4 - x^3 - 9x^2 + 7;$$

$$\text{в) } y = 2\ln(x/(x+1)) - 1; \quad \text{г) } y = \frac{e^x}{x}.$$

### Вариант 16.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{e^{3/x} - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tg x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$2. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, \quad x \in [-1; 1].$$

$$3. y = \sin x, \quad x_0 = 30^\circ, \quad x = 33^\circ.$$

$$4. \text{ а) } y = x + \frac{4}{x+2}; \quad \text{б) } y = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60;$$

$$\text{в) } y = \frac{x}{\ln x}; \quad \text{г) } y = (4-x) \cdot e^{x-3};$$

### Вариант 17.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

$$2. y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} - 17, \quad x \in [-4; -1].$$

$$3. y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 8}, \quad x_0 = -4, \quad x = -4,03.$$

$$4. \text{ а) } y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7; \quad \text{б) } y = \frac{x^4}{x^3 - 1};$$

$$\text{в) } y = \frac{x^2}{2\ln x}; \quad \text{г) } y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)};$$

**Вариант 18.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{4/x^2}$ .
2.  $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$ ,  $x \in [-5; 2]$ .
3.  $y = \cos x$ ,  $x_0 = 60^\circ$ ,  $x = 57^\circ$ .
4. а)  $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ;                      б)  $y = 4/x + 1/x^4$ ;  
       в)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ;                                      г)  $y = (x + 4) \cdot e^{-(x+3)}$ .

**Вариант 19.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ .
2.  $y = -\frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5}$ ,  $x \in [-5; 1]$ .
3.  $y = \sqrt[4]{8x^2 + 6x - 9}$ ,  $x_0 = 3$ ,  $x = 2,88$ .
4. а)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ;                      б)  $y = 3/x - 1/x^3$ ;  
       в)  $y = \ln(1 + e^{-x})$ ;                      г)  $y = (2x - 1) \cdot e^{2(1-x)}$ .

**Вариант 20.**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}$ .
2.  $y = \frac{10(x+1)}{x^2 + 2x + 2}$ ,  $x \in [-1; 2]$ .
3.  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $x_0 = 45^\circ$ ,  $x = 47^\circ$ .



$$4. \text{ а) } y = 3 - 2x^2 - x^4; \quad \text{б) } y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4};$$

$$\text{в) } y = x^2 / 2 - \ln x; \quad \text{г) } y = e^{(x-6)} / (x-6).$$

**Вариант 21**

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(7/x))^x.$$

$$2. y = 3 - x - 4/(x+2)^2, \quad x \in [-1; 2].$$

$$3. y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x_0 = 1, \quad x = 1,012.$$

$$4. \text{ а) } y = x^5 - x^3 - 2x; \quad \text{б) } y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$$

$$\text{в) } y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3; \quad \text{г) } y = e^{2x-x^2}.$$

**Вариант 22**

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 7x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\lg(\pi x/2)}.$$

$$2. y = 9 - x - 4/x^2, \quad x \in [1; 4].$$

$$3. y = \arctg x, \quad x_0 = 1, \quad x = 1,05.$$

$$4. \text{ а) } y = 1 - 5x^2/2 - x^5; \quad \text{б) } y = x + \frac{x}{3x-1};$$

$$\text{в) } y = \ln \frac{x}{x-1}; \quad \text{г) } y = -(x+1) \cdot e^{x+2}.$$

**Вариант 23**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{6}{1+2 \ln x}}$ .

2.  $y = 32x - x^4$ ,  $x \in [-1; 4]$ .

3.  $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x = 1,016$ .

4. а)  $y = (x^4 - 2x^2 + 3)/3$ ;

б)  $y = \frac{x+2}{x^3}$ ;

в)  $y = 4 - 3 \ln \frac{x}{x+3}$ ;

г)  $y = x + e^{-x}$ .

### Вариант 24

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{9}{x^2-1}}$ .

2.  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in [-2; 2]$ .

3.  $y = \ln x$ ,  $x_0 = e$ ,  $x = 3,2$ .

4. а)  $y = 2x^4 - x^2 + 1$ ;

б)  $y = \frac{x^3 - 8}{2x^2}$ ;

в)  $y = x^2 \cdot \ln x$ ;

г)  $y = (2x + 5) \cdot e^{-2(x+2)}$ .

### Вариант 25

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$ .

2.  $y = x - 8\sqrt{x}$ ,  $x \in [9; 25]$ .

3.  $y = \sqrt[3]{3x^2 + 1}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = 0,02$ .

4. а)  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 9$ ;      б)  $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ ;  
 в)  $y = x \cdot \ln x$ ;      г)  $y = -(2x+1) \cdot e^{2(x+1)}$ .

**Вариант 26**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{1 - \cos 3x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{3/x}$ .  
 2.  $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ ,  $x \in [-1; 3]$ .  
 3.  $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ ,  $x_0 = 2$ ,  $x = 1,97$ .  
 4. а)  $y = (x^2 - 1)(x - 2)$ ;      б)  $y = \frac{17 - x^2}{4x - 5}$ ;  
 в)  $y = 1 - \ln^3 x$ ;      г)  $y = x \cdot e^{-x^2/2}$ .

**Вариант 27**

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{ctgx} - 1}{\sin 4x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{1/x}$ .  
 2.  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ ,  $x \in [-4; -1]$ .  
 3.  $y = \ln \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = 45^\circ$ ,  $x = 47^\circ$ .  
 4. а)  $y = -8x^3 + 12x^2 - 2$ ;      б)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$ ;  
 в)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ;      г)  $y = x^3 \cdot e^{-x}$ .

**Вариант 28**

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x - x}{\ln(1+x) - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x)^{2/\ln x}.$$

$$2. y = x^2 - 2x - 13 + \frac{16}{x-1}, \quad x \in [2; 5].$$

$$3. y = \frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}, \quad x_0 = 1, \quad x = 0,98.$$

$$4. \text{ а) } y = -(x+1)^2(x-3)^2/16; \quad \text{б) } y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x + 2};$$

$$\text{в) } y = \ln(1 - 1/x^2); \quad \text{г) } y = (x+2) \cdot e^{1-x}.$$

**Вариант 29**

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{ctg} x)^{\pi-x}.$$

$$2. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, \quad x \in [0; 1].$$

$$3. y = \sqrt{1 + \sin x}, \quad x_0 = 0, \quad x = 0,01.$$

$$4. \text{ а) } y = (x^3 - 9x^2)/4 + 6x - 9; \quad \text{б) } y = \frac{4x^2 - 3x}{4x^2 - 1};$$

$$\text{в) } y = \ln(4 - x^2); \quad \text{г) } y = (x+1) \cdot e^{2x}.$$

**Вариант 30**

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - 1,5x^2}{\sin x - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{2 \cos x}.$$

$$2. y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}, \quad x \in [-1; 2].$$

$$3. y = \arcsin x, \quad x_0 = 0,5; \quad x = 0,51.$$

4. а)  $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$ ;      б)  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$ ;

в)  $y = \ln(x^2 - 2x + 6)$ ;      г)  $y = e^{1/(2-x)}$ .

*Оглавление*

1. Определители. Матрицы .....	3
2. Системы линейных алгебраических уравнений .....	11
4. Векторная алгебра .....	17
5. Аналитическая геометрия .....	32
6. Предел и непрерывность функции .....	51
7. Производная функции .....	62