1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1.1. Расстояние между двумя точками

Рассмотрим прямоугольную систему координат (декартовую, рис. 1).

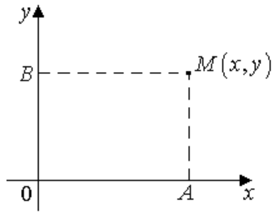

Рис. 1

Любой точки M соответствуют координаты $OA = x$ - абсцисса, $OB = y$ - ордината точки $M(x, y)$, то есть каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел и наоборот.

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости расстояние d между ними определяется формулой:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \,. \qquad (1)$$

1.2. Площадь треугольника

Теорема. Для любых точек $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$, не лежащих на одной прямой (рис.2), площадь треугольника ABC выражается формулой (2):

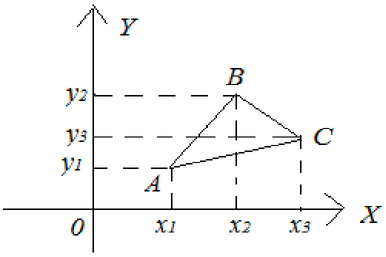

Рис. 2

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right]\right| .$$

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Пример. Известна площадь треугольника ABC, заданного вершинами $A(-2,1), B(2,2), C(4,y)$: $S_{\Delta ABC} = 15$. Найти значение неизвестной координаты y.

Решение. Составим определитель, используя формулу вычисления площади треугольника (82):

$$S_{\Delta ABC} = 15 = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2+2 & 2-1 \\ 4+2 & y-1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & y-1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left(4(y-1) - 6\right),$$

$$\pm 15 = 2y - 5, \quad y_1 = 10, \quad y_2 = -5 .$$

Ответ: $y_1 = 10$, $y_2 = -5$.

1.3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ и любая точка M принадлежащая отрезку M_1M_2.

Пусть отношение $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. В отношении λ точка M делит отрезок M_1M_2 (рис. 3).

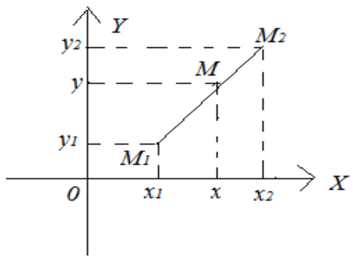

Рис. 3

Теорема. Если точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{3}$$

где $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$.

Следствие: если M - середина M_1M_2, $\lambda=1$, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{4}$$

Пример. Пусть точка $C(2,3)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda=\frac{1}{2}$. Найти координаты точки B, если $A(1,2)$.

Решение. Подставим известные координаты точек $C(2,3)$ и $A(1,2)$ в формулы (3):

$$x=\frac{1+0,5x_B}{1+0,5}=2, \qquad y=\frac{2+0,5y_B}{1+0,5}=3.$$

$$x_B=(2\cdot 1,5-1)2=4,\ \ y_B=(3\cdot 1,5-2)2=5.$$

Ответ: $B(4,5)$.

1.4. Полярные координаты

Полярная система координат состоит из некоторой точки O, называемой полюсом, и исходящего из нее луча OP, называемой полярной осью (рис. 4). Задается масштаб для измерения длин отрезков.

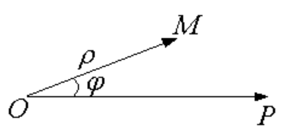

Рис. 4

Любая точка M в полярной системе характеризуется расстоянием $OM=\rho$ (ρ - полярный радиус, $\rho\ge 0$) и углом поворота φ луча OM от оси OP (φ - полярный угол, $0\le\varphi<2\pi$).

Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

1.5. Связь декартовых и полярных координат

Пусть начало прямоугольной системы совпадает с полярным полюсом, ось X совпадает с полярной осью OP (рис.5).

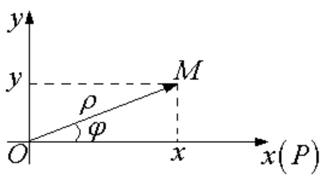

Рис. 5

Тогда для точки M справедливо равенство: $M(x,y)=M(\rho,\varphi)$. Из треугольника получим уравнения связи координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \end{cases} \tag{5}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}; \qquad tg\varphi=\frac{y}{x}. \tag{6}$$

1.6. Преобразования прямоугольных координат

На плоскости обычно исследуется следующие преобразования прямоугольных координат: параллельный перенос и поворот осей координат.

а) При параллельном переносе осей координат изменяется положение начала координат, направление осей координат не меняется.

Рассмотрим переход системы координат XOY (старая) в систему $X_1O_1Y_1$ (новая) (рис. 6).

Пусть точки O_1 и точка M в старой системе имеет координаты $O_1(a,b)$, $M(x,y)$. В новой системе $X_1O_1Y_1$ точка M имеет координаты: $M(x_1,y_1)$. Тогда формулы перехода:

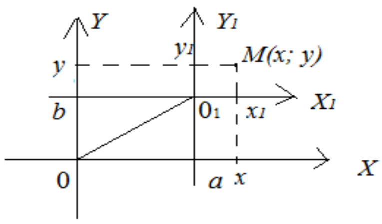

Рис. 6

1) от «старых» координат в «новые» имеют вид :

$$x_1=x-a, \qquad y_1=y-b; \tag{7}$$

2) от «новых» координат к «старым»:

$$x=x_1+a, \quad y=y_1+b. \tag{8}$$

б) При повороте осей координат начало системы координат не меняется, а оси поворачиваются на один и тот же угол. Пусть система координат повернута относительно начала координат на угол α. Рассмотрим переход системы координат XOY в систему координат X_2OY_2. Точка $M(x,y)$ в системе XOY перейдет в точку $M(x_2,y_2)$ в системе X_2OY_2 (рис. 7).

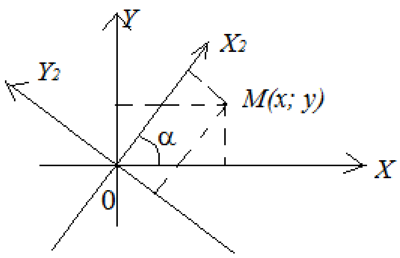

Рис. 7

Тогда формулы перехода

1) от «старых» координат в «новые» имеют вид:

$$x_2=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \quad y_2=y\cos\alpha-x\sin\alpha; \tag{9}$$

2) от «новых» координат к «старым»:

$$x=x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha, \quad y=y_2\cos\alpha+x_2\sin\alpha. \tag{10}$$

Пример. Определить координаты точки $M(3,5)$ в новой системе координат $O_1X_1Y_1$, если начало O_1 находится в точке $N(-2,1)$, а оси новой системы координат параллельны осям старой системы координат.

Решение: используем формулы (7):

$$x' = 3 + 2 = 5, \quad y' = 5 - 1 = 4.$$

Ответ: точка $M(5,4)$ в новой системе координат.

Рассмотрим следующую задачу: отрезок OM, где точка $M(x,y)$, повернут на угол 60^0. Найти координаты точки $M(x_2, y_2)$ в новой системе координат.

Решение: используем формулы (9):

$$x_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha = x\cos 60^0 + y\sin 60^0 = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

$$y_2 = y\cos\alpha - x\sin\alpha = y\cos 60^0 - x\sin 60^0 = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Ответ: $M\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ в новой системе координат.

1.7. Упражнения

1. Охарактеризовать на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
1) $x > 2$; 2) $x - 3 \le 0$; 3) $2x - 3 \le 0$; 4) $1 < x \le 3$; 5) $x^2 - 9 < 0$; 6) $x^2 - 5x + 6 < 0$; 7) $12 - x < 0$; 8) $3x - 5 > 0$; 9) $-2 \le x \le 3$; 10) $x^2 - 8x + 15 \le 0$; 11) $x^2 - 8x + 15 > 0$; 12) $x^2 - 25 > 0$; 13) $16 - x^2 \le 0$. К каждому случаю сделать рисунок.

2. Охарактеризовать на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:
1) $|x| < 1$; 2) $|x| > 2$; 3) $|x| \le 2$; 4) $|x - 2| < 3$; 5) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$; 6) $|x - 1| \ge 2$.

3. Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x,\ y)$, если 1) $x \cdot y > 0$; 2) $x \cdot y < 0$; 3) $x - y = 0$; 4) $x + y = 0$; 5) $x + y > 0$; 6) $x + y < 0$; 7) $x - y < 0$; 8) $x - y > 0$.

4. Даны точки $A(0;\ 0)$, $B(3;\ -4)$, $C(-3;\ 4)$, $D(-2;\ 2)$, $E(10,\ -3)$. Определить расстояние d между точками: 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

5. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки 1) $A(2;\ -3)$, $B(3;\ 2)$, $C(-2;\ 5)$; 2) $M_1(-3;\ 2)$, $M_2(5;\ -2)$, $M_3(1;\ 3)$, 3) $M(3;\ -4)$, $N(-2;\ 3)$, $P(4;\ 5)$.

6. Точка M является серединой отрезка OA, соединяющего начало координат O с точкой $A(-5;\ 2)$. Найти координаты точки M.

7. Построить $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$, $D(0;\ 0)$. Если точки построены правильно, то получен квадрат. Какова его площадь? Найти координаты середины сторон квадрата.

8. Площадь треугольника равна 10 кв. ед., две его вершины есть точки $A(5;\ 1)$ и $B(-2;\ -2)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси абсцисс.

9. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2;\ -1)$, $B(4;\ 3)$ и $C(-2;\ 1)$.

10. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3;\ 1)$, $B(4;\ 6)$, $C(6;\ 3)$, $D(5;\ -2)$.

11. Точки $A(-2;\ 1)$, $B(2;\ 3)$ и $C(4;\ -1)$ − середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.

12. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(2;\ 4)$, $B(0;\ 1)$ и $C(4;\ 2)$.

13. Площадь треугольника равна 3 кв. ед., две его вершины есть точки $A(3;\ 1)$ и $B(1;\ -3)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси ординат.

14. Вершины треугольника − точки $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ и $C(2;\ -1)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины C.

15. Три вершины параллелограмма − точки $A(3;\ 7)$, $B(2;\ -3)$ и $C(-1;\ -4)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

16.Отрезок ограниченный точками $A(1;\ -3)$ и $B(4;\ 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

17. Определить координаты концов отрезка A и B, который точками $P(2;\ 2)$ и $Q(1;\ 5)$ разделен на три равные части.

18. Прямая проходит через точки $M(2;\,-3)$ и $N(-6;\,5)$. Найти на этой прямой точку, ордината которой равна -5.

19. Прямая проходит через точки $M_1(7;\,-3)$ и $M_2(23;\,-6)$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

20. Центр масс однородного стержня находится в точке $M(1;\,4)$. Один из его концов в точке $P(-2;\,2)$. Определить координаты точки Q − другого конца этого стержня.

21. Построить точки, заданные полярными координатами: $A(2;\,\pi/2)$; $B(3;\,\pi/4)$; $C(3;\,3\pi/4)$; $D(4;\,0)$; $F(2;\,3\pi/2)$; $P(3;\,\pi)$.

22. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $A(3;\,\pi/3)$; $B(4;\,-\pi/4)$.

23. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $A(1;\,\pi/4)$; $B(5;\,-\pi/3)$.

24. Даны точки в прямоугольной системе координат $M_1(0;\,5)$, $M_2(-3;\,0)$, $M_3(\sqrt{3};\,1)$. Найти их полярные координаты.

25. Даны точки в полярной системе координат $A(3;\,\pi/6)$ и $B(5;\,2\pi/3)$. Найти расстояние d между ними.

26. Написать в полярных координатах уравнения линий:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $y=2x$; 3) $x=2$; 4) $y=-3$; $x+y=5$.

27. Записать уравнение в полярных координатах $\rho=2\cos\varphi$ в прямоугольных координатах, определить ее вид и построить кривую.

1.8. Домашняя работа

1.9. Контрольная работа № 1

1. Построить в прямоугольной системе координат точки, заданные в полярной системе координат: $A(5;0)$; $B\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$; $C\left(3;-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $D\left(4;\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(-2;1)$.

3. Вычислить площадь треугольника, заданного вершинами $A(7;5)$, $B(-3;-6)$, $C(4;-1)$.

4. Даны точки $A(1;2)$, $B(6;6)$. На оси OX определить точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 10.

2. Уравнение линии на плоскости

2.1. Определение линии

Пусть на плоскости XOY задана прямоугольная система координат и некоторая линия (кривая) L.

Уравнением линии L на плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой другой, не лежащей на этой линии:

$$F(x,\,y)=0\,, \tag{11}$$

то есть линия – это множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению (11).

Уравнение линии можно задать:

1. в прямоугольной системе координат: $y=f(x)$; (12)

2. в параметрической форме: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, где t - параметр; (13)

3. в полярной системе координат: $\rho=\rho(\varphi)$. (14)

Линия называется линией n- ого порядка, если она определяется уравнением n-ой степени относительно текущих прямоугольных координат. Линия первого порядка называется прямой.

Углом наклона прямой к оси OX называется наименьший неотрицательный угол α, на который следует повернуть ось OX, чтобы ее положительное направление совпадало с одним из направлений прямой.

2.2. Уравнение прямой на плоскости

1) **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**.

Пусть задана прямая под углом α к оси OX (рис. 8).

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой

$$k = tg\alpha \tag{15}$$

Рассмотрим треугольник BMN:

$$MN \perp OX, \qquad BN \perp OY, \qquad BN = x, \qquad MN = y - b\ .$$

Найдем отношение сторон из треугольника BNM:

$$\frac{MN}{BN} = tg\alpha,\ \frac{y-b}{x} = k,\ y-b = kx,\ y = kx+b.$$

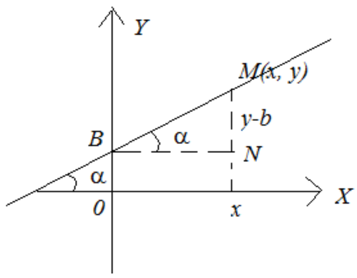

Рис. 8

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b. \tag{16}$$

Если $k = 0,\ y = b$, то прямая параллельна оси OX, если $b = 0,\ y = kx,$, то прямая проходит через начало координат, если $x = a,$ прямая параллельна оси OY.

2) **Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку.**

Пусть задана точка $M(x_1, y_1)$, принадлежащая прямой $y = kx + b$. Подставим координаты точки в уравнение: $y_1 = kx_1 + b$. Выразим свободный член $b = y_1 - kx_1$. Тогда уравнение примет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{17}$$

3) **Уравнение прямой, проходящее через две точки**.

Пусть заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, принадлежащие прямой L. Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой (17): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$ Выразим коэффициент $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$

Уравнение прямой будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{18}$$

4) **Уравнение прямой в отрезках**.

Пусть задана прямая, отсекающая на осях OX и OY отрезки a и b. Точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$ принадлежат прямой, заданной уравнением (18) (рис.9).

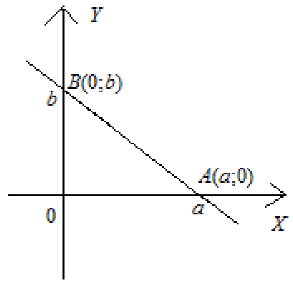

Рис.9

Подставим координаты точек в уравнение прямой, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (19)$$

5) **Каноническое уравнение прямой.**

Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через две точки (18). Введем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, принадлежащий прямой:

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}=\{m;n\}. \qquad (20)$$

Этот вектор или ему параллельный называют направляющим вектором прямой. Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (21)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

6) **Параметрическое уравнение прямой**.

Приравняем уравнение прямой (21) к параметру t. Получим пару параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x=mt+x_1; \\ y=nt+y_1. \end{cases} \qquad (22)$$

7) **Общее уравнение прямой**.

В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени:

$$Ax+By+C=0 \ , \qquad (23)$$

где $A, B, C-$ произвольные числа, причем $A, B-$ одновременно не равны нулю. Угловой коэффициент прямой имеет вид:

$$k=-\frac{A}{B}. \qquad (24)$$

При отсутсивии какого-либо коэффициента в уравнении прямой получаются неполные уравнения прямой:

1) $C=0, \quad Ax+By=0$ - прямая, проходящая через начало координат;
2) $B=0, A\neq 0, C\neq 0, Ax+C=0$ – прямая, параллельная оси OY;
3) $B\neq 0, A=0, C\neq 0, By+C=0$ – прямая, параллельная оси OX;
4) $B=0, A\neq 0, C=0, Ax=0, x=0$ – ось OY;
5) $B\neq 0, A=0, C=0, By=0, y=0$ – ось OX.

8) **Нормальное уравнение прямой**.

Пусть задана некоторая прямая L. Через начало координат проведем перпендикуляр ON к прямой L. Этот перпендикуляр называется нормалью к прямой и обозначается $\vec{N}$ ($\vec{n}$ - единичный вектор нормали). Пусть нормаль $\vec{N}$ с осью OX образует угол α ($0\leq\alpha\leq 2\pi$). Введем параметр p : $ON=p$. Рассмотрим точку $M(x,y)=M(\rho,\varphi)\in L$, совмещая прямоугольную и полярную системы координат ($x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi$, рис. 10).

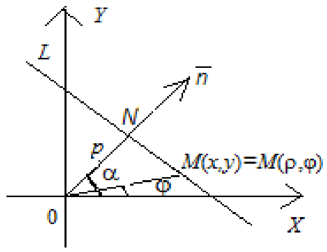

Рис. 10

Из ΔONM получим:

$$p = \rho\cos(\angle NOM) = \rho\cos(\alpha - \varphi) = \rho\cos\alpha\cos\varphi + \rho\sin\alpha\sin\varphi$$

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

В результате получим нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (25)$$

2.3. Расстояние между точкой и прямой

Пусть задана прямая L и точка $M_0(x_0, y_0) \notin L$. Зададим прямую в виде нормального уравнения (25). Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую L_0, параллельную заданной прямой L. Пусть точки N и N_0 лежат по одну сторону от начала координат (рис. 11).

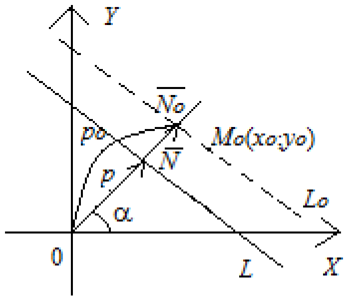

Рис. 11

Векторы ON и ON_0 коллинеарные. Пусть $ON_0 = p_0$. Оценим расстояние между прямыми:

$$d = |p_0 - p| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| \qquad (26)$$

Формула (26) позволяет вычислить расстояние от точки до прямой.

Если уравнение прямой задано общим уравнением (23), то его можно перевести в нормальное уравнение прямой, введя нормирующий множитель:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (27)$$

Знак множителя определяется так:

а) если $C < 0$, то μ - положительный;

б) если $C > 0$, то μ - отрицательный.

Нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

$$\mu(A\cdot x + B\cdot y + C) = 0, \qquad (28)$$

а расстояние между точкой и прямой можно вычислить по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (29)$$

Пример. Найти расстояние от точки $M(4,3)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

Решение:

$$d = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

2.4. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Возможны следующие взаимные положения прямых:

1) **прямые пересекаются**:

а) точкой пересечения прямых является общее решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{cases} \tag{30}$$

при условии, что главный определитель системы не равен нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0 \text{ или соблюдается условие } \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}; \tag{31}$$

б) угол φ между прямыми можно найти, если известны угловые коэффициенты прямых:

$$k_1=-\frac{A_1}{B_1};\, k_2=\frac{A_2}{B_2};\, k_1=tg\alpha_1,\, k_2=tg\alpha_2,$$

$$tg\varphi=tg\left(\alpha_2-\alpha_1\right),\, tg\varphi=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1}.$$

Тогда угол можно найти по формуле:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{32}$$

в) условие перпендикулярных прямых:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}; \quad k_1k_2=-1; \tag{33}$$

2) **прямые параллельные**:

пусть система уравнений (30) не имеет решения, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0 \text{ или соблюдается условие } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}; \tag{34}$$

можно условие параллельности записать, используя равенство нулю угла между прямыми:

$$\varphi=0; \quad k_1=k_2. \tag{35}$$

3) **прямые совпадают** при соблюдении условия:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{36}$$

2.5. Упражнения

1. Определить, какие из точек $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-3;\ -3)$, $M_5(3;\ -1)$, $M_6(-2;\ -1)$, лежат на прямой $2x-3y-3=0$, а какие не лежат на ней.

2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 расположены на прямой $3x-2y-6=0$; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, −2, −6. Определить ординаты этих точек.

3. Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 расположены на прямой $x-3y+2=0$; их ординаты соответственно равны числам 1, 0, 2, −1, 3. Определить абсциссы этих точек.

4. Определить угловой коэффициент и указать величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy в каждом случае: 1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$.

5. Зная параметры k и b, в каждом из указанных случаев, составить уравнение прямой: 1) $k=2/3,\ b=3$; 2) $k=3,\ b=0$; 3) $k=0,\ b=-2$; 4) $k=-3/4,\ b=3$; 5) $k=-2,\ b=-5$; 6) $k=-1/3,\ b=2/3$.

6. Определить точки пересечения прямой $3x-2y-12=0$ с координатными осями.

7. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

8. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.

9. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $M_1(5;\ -4)$, $M_2(-1;\ 3)$, $M_3(-3;\ -2)$ параллельно противоположным сторонам.

10. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки: 1) $M_1(2;\ -5)$, $M_2(3;\ 2)$; 2) $M_3(-3;\ 1)$, $M_4(7;\ 8)$; 3) $M_5(5;\ -3)$, $M_6(-1;\ 6)$

11. Определить угол φ между двумя прямыми: 1) $5x-y+7=0,\quad 3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7,\quad 2x+3y-3=0$; 3) $x-2y-4=0,\quad 2x-4y+3=0$; 4) $3x+2y-1=0,\ 5x+2y+3=0$.

12. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 1)$ под углом 45° к данной прямой.

13. Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой: 1) параллельной данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.

14. Составить уравнения высот треугольника с вершинами $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-1;\ -1)$, $M_3(3;\ 2)$.

15. Найти проекцию точки $P(3;\ 5)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;\ -3)$ и $B(11;\ -15)$.

16. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-4y-12=0$ от координатного угла.

17. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(3;\ -7)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным от начала координат).

18. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx+8y+n=0$, $2x+my-1=0$: 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны?

19. Вычислить расстояние d между двумя параллельными прямыми: 1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$; 2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$; 3) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+25=0$; 4) $24x-10y+39=0$, $12x-5y-26=0$.

20. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

21. Точка A является вершиной треугольника. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону $x-2y-7=0$. Вычислить её длину.

22. Дан треугольник с вершинами $A(3;\ 1)$, $B(-3;\ -1)$ и $C(5;\ -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.

23. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$ и образующей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 135°. Построить эти прямые.

24. уравнения прямых: 1) $3x-2y=6$, 2) $5x-2y+4=0$ привести к виду в «отрезках на осях».

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,\ 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью равной 3 кв. ед.

26. Написать и построить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ 3)$ и составляющей с осью Ox угол: 1) 45°; 2) 60°; 3) 135°, 4) 0°.

27. Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

28. Написать уравнения прямой, если точка $A(2,\ 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

29. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный : 1) 4; 2) −5; 3) 0.

30. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6,\ 2)$ на прямую $x-4y-7=0$.

2.6. Домашняя работа

Даны точки $A_1(x_1,\ y_1)$, $A_2(x_2,\ y_2)$, $A_3(x_3,\ y_3)$, $A_4(x_4,\ y_4)$.

1. Составить уравнения прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 и записать их: 1) в «отрезках на осях»; указать отрезки, отсекаемые прямой от координатных осей; 2) с угловым коэффициентом; указать угловой коэффициент каждой из прямых; 3) как уравнение прямой, проходящей через две точки; указать направляющий вектор, лежащий на каждой из прямых;

2. Изобразить область, ограниченную данными прямыми, и указанной четвертью. Описать область с помощью системы неравенств.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(x_1,\ y_1)$, перпендикулярно прямой A_2A_4.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(x_4,\ y_4)$, параллельно прямой A_1A_3.

5. Найти уравнение и величину перпендикуляра, опущенного из начала координат на указанную прямую. Сделать чертеж.

Варианты заданий

1. $A_1(-3,\ 2)$, $A_2(1,\ 4)$, $A_3(3,\ 2)$, $A_4(2,\ -2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
2. $A_1(-2,\ -2)$, $A_2(2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 4)$, $A_4(-4,\ -4)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.
3. $A_1(2,\ -2)$, $A_2(4,\ 1)$, $A_3(1,\ 4)$, $A_4(-1,\ 0)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
4. $A_1(-4,\ -2)$, $A_2(2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 3)$, $A_4(-4,\ 3)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
5. $A_1(-5,\ -2)$, $A_2(2,\ 2)$, $A_3(-1,\ 6)$, $A_4(-5,\ 4)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.
6. $A_1(-2,\ -2)$, $A_2(7,\ 1)$, $A_3(4,\ 6)$, $A_4(-2,\ 1)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
7. $A_1(-1,\ -2)$, $A_2(1,\ 1)$, $A_3(1,\ 4)$, $A_4(-3,\ 2)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.
8. $A_1(4,\ 1)$, $A_2(3,\ 4)$, $A_3(-1,\ 3)$, $A_4(2,\ -1)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_1A_2$.
9. $A_1(4,\ -1)$, $A_2(6,\ 3)$, $A_3(2,\ 5)$, $A_4(-1,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
10. $A_1(-1,\ 5)$, $A_2(3,\ 5)$, $A_3(7,\ 1)$, $A_4(4,\ -3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
11. $A_1(-1,\ -1)$, $A_2(-5,\ 3)$, $A_3(-2,\ 6)$, $A_4(3,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
12. $A_1(3,\ 2)$, $A_2(8,\ -4)$, $A_3(-2,\ -1)$, $A_4(6,\ -5)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_4$.
13. $A_1(7,\ 1)$, $A_2(7,\ 5)$, $A_3(-2,\ 5)$, $A_4(3,\ -1)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.
14. $A_1(3,\ 2)$, $A_2(2,\ 4)$, $A_3(-1,\ 3)$, $A_4(1,\ -3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_1A_2$.
15. $A_1(-3, -1)$, $A_2(-10,\ 5)$, $A_3(-4,\ 7)$, $A_4(3,\ 4)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_4$.
16. $A_1(5, -2)$, $A_2(7,\ 3)$, $A_3(5,\ 6)$, $A_4(-2,\ 2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
17. $A_1(-3, 2)$, $A_2(-8,\ -1)$, $A_3(-1,\ -9)$, $A_4(1,\ -5)$, $x \le 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$.
18. $A_1(6, -4)$, $A_2(5,\ 1)$, $A_3(-2,\ -2)$, $A_4(4, -6)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_1A_4$.
19. $A_1(-2, -2)$, $A_2(1,\ 3)$, $A_3(-4,\ 6)$, $A_4(-5,\ 2)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_3A_4$.
20. $A_1(-3, 2)$, $A_2(-6, -2)$, $A_3(-1, -6)$, $A_4(1, -1)$, $x \le 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$.
21. $A_1(3, 2)$, $A_2(8, -2)$, $A_3(1, -6)$, $A_4(-1, -3)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$.
22. $A_1(2, 2)$, $A_2(-3, 6)$, $A_3(-7,\ 4)$, $A_4(-2, -1)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
23. $A_1(6, -22)$, $A_2(6,\ 7)$, $A_3(1,\ 7)$, $A_4(-1,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_1A_4$.
24. $A_1(4, -1)$, $A_2(7,\ 3)$, $A_3(6,\ 6)$, $A_4(-1,\ 3)$, $x \ge 0$, $y \succ 0$; $\perp A_1A_4$.
25. $A_1(5,\ 7)$, $A_2(-2,\ 4)$, $A_3(4, -2)$, $A_4(5,\ 0)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
26. $A_1(1, -3)$, $A_2(-4,\ 2)$, $A_3(-6, -1)$, $A_4(-2, -5)$, $x \le 0$, $y \le 0$; $\perp A_3A_4$.
27. $A_1(-1, -1)$, $A_2(-9,\ 2)$, $A_3(-3,\ 5)$, $A_4(1,\ 2)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
28. $A_1(1,\ 5)$, $A_2(-3,\ 7)$, $A_3(-7,\ 2)$, $A_4(-1, -1)$, $x \le 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$.
29. $A_1(3,\ 0)$, $A_2(1,\ 1)$, $A_3(-1, -5)$, $A_4(4, -1)$, $x \ge 0$, $y \le 0$; $\perp A_2A_3$.
30. $A_1(-2,\ 3)$, $A_2(1,\ 6)$, $A_3(6,\ 5)$, $A_4(5, -2)$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $\perp A_2A_3$

2.7. Контрольная работа № 2

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

Вершины треугольника находятся в точках $A(M,\ N)$, $B(D,\ N)$, $C(M+1,\ D)$. Найти:

1) уравнение прямой BC и ее угловой коэффициент;

2) расстояние от точки B, до прямой AC;

3) уравнение высоты AH и ее длину;

4) координаты точки Q − пересечения высоты AH и медианы BK;
5) угол между медианой BK и высотой AH;
6) уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника, параллельно противоположным сторонам;
7) описать треугольник ABC с помощью системы неравенств;
8) вычислить площадь треугольника ABC;
9) найти уравнение и величину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую AB;
10) сделать чертеж.