3. Плоскость и прямая в пространстве

3.1. Уравнение поверхности

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная поверхность S и уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (37)$$

Уравнение (37) называется уравнением поверхности в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, принадлежвщей поверхности, и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не принадлежащей поверхности. Степень уравнения определяет порядок поверхности. Поверхность первого порядка называется плоскостью.

3.2. Общее уравнение плоскости

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная плоскость π, точка $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right) \in \pi$ и вектор $\vec{N} = \{A, B, C\}$, $\vec{N} \perp \pi$. Рассмотрим произвольную точку $M\left(x; y; z\right) \in \pi$ (рис.12).

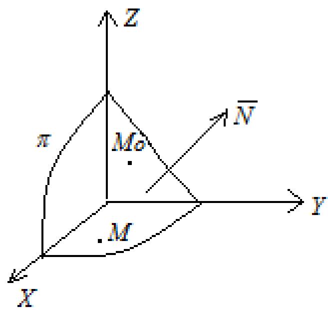

Рис. 12

Построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Он принадлежит плоскости π, следовательно, перпендикулярен вектору $\vec{N}$, и скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{N} = 0.$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{38}$$

Мы получили уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{A, B, C\}$, который называется вектором нормали или номальным вектором.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{39}$$

Решим задачи: а) составтиь уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(2;4;5\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{1,2,-3\}$; б) для плоскости $3x-2y+36z+4=0$ определить координаты нормального вектора.

Решение.

а) Воспользуемся формулой (38), получим уравнение плоскости:

$$1(x-2)+2(y-4)-3(z-5)=0,$$

$$x+2y-3z+7=0.$$

б) Определим координаты нормального вектора плоскости:

вектор $\vec{N}=\{3,-2,36\}$.

3.3. Нормальное уравнение плоскости

Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{40}$$

В уравнении (40) α, β, γ - углы, которые вектор нормали $\vec{N}=\{A, B, C\}$ образует с осями координат, параметр p - это расстояние от плоскости до точки начала координат O ($p=OM$, рис.13).

Если ввести единичный вектор нормали, то нормальное уравнение плоскости можно записать в виде:

$$\mu(Ax+By+Cz+D)=0, \tag{41}$$

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{42}$$

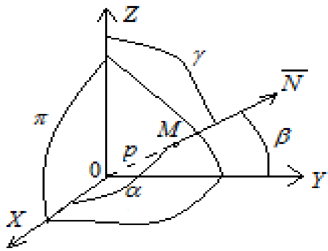

Рис. 13

Знак нормируещего множителя определяется так:

а) если $D < 0$, то μ - положительный;

б) если $D > 0$, то μ - отрицательный.

3.4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть задано нормальное уравнение плоскости (40). Представим уравнение иначе:

$$\frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\cos\beta}{p}+\frac{z\cos\gamma}{p}=0,$$

$$a=\frac{p}{\cos\alpha},\ b=\frac{p}{\cos\beta},\ c=\frac{p}{\cos\gamma},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (43)$$

параметры a, b, c - это отрезки, которые плоскость отсекает на осях координат (рис. 14).

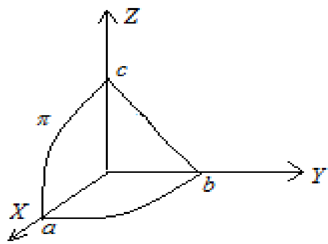

Рис.14

3.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана уравнением общего вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \notin \pi$. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащей плоскости (рис.15), до самой плоскости можно найти, используя нормальное уравнение плоскости (40). Пусть точка $M(x, y, z)$ - проекция точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость π, точки A, B - проекции точек ки M, M_0 на вектор $\vec{N}$:

$$OB = p, OA = p_0, \quad d = |OA - OB| = |p_0 - p|,$$

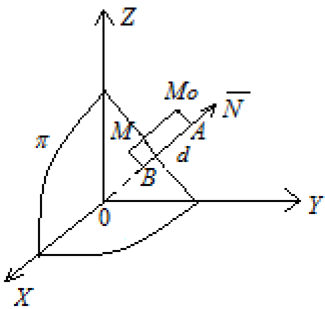

Рис. 15

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p| \tag{44}$$

или

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{45}$$

3.6. Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},\ \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

Угол φ между плоскостями (рис.16) можно найти как угол между векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$:

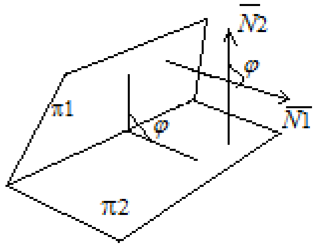

Рис. 16

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}. \qquad (46)$$

Пример. Определить угол между плоскостями: $x - z = 0,\ y - z = 0.$

Решение. Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{1, 0, -1\},\ \vec{N}_2 = \{0, 1, -1\}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{0 + 0 + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^0.$$

3.7. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть заданы две плоскости π_1 и π_2:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

1) Условие перпендикулярности плоскостей (рис. 16) $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, т. е. скалярное произведение векторов равно нулю:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (47)$$

2) Условие параллельности плоскостей (рис. 17) $\vec{N}_1 \,\mathrm{II}\, \vec{N}_2$, т. е. соответсвующие координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (48)$$

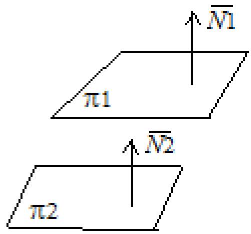

Рис. 17

3.8. Неполные уравнения плоскости

Пусть задано уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0.$

Если один из коэффициентов уравнения равен нулю, мы получим неполное уравнение плоскости:

1) $D = 0,\ Ax + By + Cz = 0$ - плоскость, проходящая через начало координат;

2) $A = 0,\ By + Cz + D = 0$ - плоскость параллельна оси OX;

3) $B = 0,\ Ax + Cz + D = 0$ - плоскость параллельна оси OY;

4) $C = 0,\ Ax + By + D = 0$ - плоскость параллельна оси OZ;

5) $A = 0,\ B = 0,\ Cz + D = 0$ - плоскость параллельна плоскости OXY;

6) $C = 0,\ B = 0,\ Ax + D = 0$ - плоскость параллельна плоскости OYZ;

7) $A = 0,\ C = 0,\ By + D = 0$ - плоскость параллельна плоскости OXZ;

8) $A = 0,\ B = 0,\ D = 0,\ Cz = 0$ - плоскость OXY;

9) $A=0, C=0, D=0, By=0$ - плоскость OXZ;

10) $C=0, B=0, D=0, Ax=0$ - плоскость OYZ. 3

10.9. Упражнения

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-5}$.

2. Найти угол, образованный плоскостью $x-2y+2z-10=0$ с осью OX.

3. Найти угол между плоскостями $2x+3y-z+5=0$, $x-y+4z=0$

4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A_1(1;-1;2)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(2;1;-3)$.

5. Точка $P(1;-1;2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6. Даны две точки $A_1(1;-4;3)$ и $A_2(-3;0;1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A_1, перпендикулярно вектору $\overline{A_1A_2}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;\ 2;\ -1)$ параллельно векторам $\vec{a}=(2;\ -1;\ 1)$ и $\vec{b}=(-4;\ 3;\ -2)$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(3;-4;1)$, $A_2(5;5;2)$, $A_3(6;0;-3)$.

9. Определить координаты какого-либо нормального вектора каждой из следующих плоскостей:

1) $2x-y-2z+5=0$;	5) $x-1=0$;
2) $5x-7y-3=0$;	6) $3y+5z=0$;
3) $x+2y+z=0$;	7) $y+5=0$;
4) $z=0$;	8) $z+3x-1=0$.

10. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $5x-2y+3z-4=0,\ \ 5x-2y+3z+4=0$;

2) $2x+3y+5z+7=0,\ 3x+2y-3z-4=0$;

3) $x-3z+2=0,\ 2x-6z-5=0$.

11. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x+5y-2z+1=0,\ \ 7x-3y-2z+6=0$;

2) $2x+4y-z+1=0$, $3x-y+2z-4=0$

3) $5x-3y+7z+2=0,\ 2x+y-2z+4=0$.

12. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

1) $2x+ly+5z-7=0$, $mx-4y+5z-7=0$;

2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-z-1=0$, $2x-5y+lz=0$.

13. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;

2) $3x+y-3z-3=0$, $2x+ly-3z+1=0$;

3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

14. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $3x-5y+2z-7=0$.

15. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(-1;\ 2;\ 1)$ параллельно плоскости $2x+3y-4z+1=0$.

16. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1;\ -2;\ 3)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x-y+z-1=0$ и $x+2y+z=0$.

17. Построить плоскость и найти углы ее нормального вектора с осями координат:

1) $2x-2y+z-6=0$; 2) $2x+3y+6z-12=0$.

18. Найти расстояние точки $(5;\ 1;\ -1)$ от плоскости $x-2y-z+4=0$.

19. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки, $A_1(1;\ -2;\ 1)$, $A_2(2;\ 2;\ 1)$ и $A_3(4;\ -1;\ 1)$.

20.Найти расстояние точки $(4;\ 3;\ 0)$ от плоскости, проходящей через точки $A_1(1;\ 3;\ 0)$, $A_2(4;\ -1;\ 2)$ и $A_3(3;\ 0;\ 1)$.

21. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x-2y+2z-9=0$ и $3x-2y+2z+11=0$.

22. Найти точки пересечения плоскости $3x-2y+2z-12=0$ с координатными осями.

23. Дано уравнение плоскости $2x-3y-4z-24=0$. Написать для нее уравнение «в отрезках».

24. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла Oxy.

25. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

26. Плоскость проходит через точку $M_0(6;\ -10;\ 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

3.10. Контрольная работа № 3

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента.

1. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

$$2Nx+ly+Mz-17=0,\quad mx-4Ny+Dz-12=0.$$

2. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

$$Mx-Ny+lz-4=0,\quad Nx+My+Dz+15=0.$$

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(-N;\ 2M;\ D)$ параллельно плоскости $Mx+3y-Nz+1=0$.

4. Найти расстояние точки $(M;\ D;\ N)$ от плоскости, проходящей через точки $A_1(N;\ M;\ 0)$, $A_2(5;\ -D;\ N)$ и $A_3(0;\ N;\ M)$.

5. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $Nx - My + Dz - 2 = 0$ и координатными плоскостями.