## 8. Кривые второго порядка

### 8.1. Окружность

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом, называется окружностью.

Пусть центр окружности находится в точке $O$ . Точка $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принадлежит окружности. Тогда

$$\sqrt{(x-0) + (y-0)} = R;$$

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (62)$$

Если центр окружности находится в точке $O_1(a, b)$, то уравнение окружности запишется так

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (63)$$

Пример, Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Решение. Составим систему уравнений с тремя неизвестными: $a$, $b$ – координаты центра окружности, $R$ – радиус окружности. Заменив текущие координаты уравнения (63) координатами заданных точек, получим:

$$\begin{cases} (5-a)^2 + (5-b)^2 = R^2; \\ (-2-a)^2 + (-2-b)^2 = R^2; \\ (-1-a)^2 + (5-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Решив систему, получим искомое уравнение окружности:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

### 8.2. Упражнения

1. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R = 5$;

б) центр окружности находится в точке $C(-2;0)$ и ее радиус $R = 2$;

в) центр окружности находится в точке $C(-4;5)$ и окружность проходит через точку $M(-1;1)$;

г) концы одного из диаметров окружности имеют координаты $(0;4)$и $(6;0)$.

2. Показать, что данные уравнения определяют окружности. Найти центр $C$ и радиус $R$ каждой из них:

а) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 3x - 7y - \frac{3}{2} = 0$;

г) $x^2 + y^2 + x - y = 0$.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(0;1)$; $M_2(2;0)$; $M_3(3;-1)$.

4. Найти точки пересечения окружности:
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и прямой $y = 2x$.

5. Найти уравнение окружности, касающейся оси $Ox$ в начале координат и пересекающей ось $Oy$ в точке $A(0;10)$.

6. Найти уравнение окружности, касающейся оси $Oy$ в начале координат и пересекающей ось $Ox$ в точке $B(-12;0)$.

7. Написать уравнение касательных к окружности:
$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, проведенных из точки $M(0;3)$.

8. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(4;-2)$.

9. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x + 4y - 12 = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$, $y = 0$.

10. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$ и прямой $y = x - 3$.

11. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;2)$; $B(1;1)$; $C(2;-2)$

12. Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$ относительно по прямой $x - y - 3 = 0$.

### 8.3. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ фокусы эллипса, $|F_1F_2| = 2c$. Сумму расстояний от любой точки $M(x,y)$ до точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ обозначим через $2a : 2a > 2c$ (рис. 26).

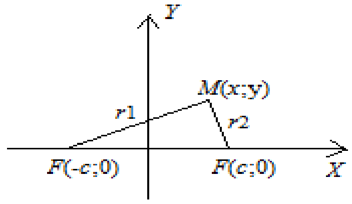


Рис. 26

Числа $r_1$ и $r_2$ называются фокальными радиусами. По определению эллипса получим уравнение:

$$r_1 + r_2 = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right);$$

Пусть $b^2 = a^2 - c^2; \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (64)$$

Полученное уравнение эллипса называется каноническим.

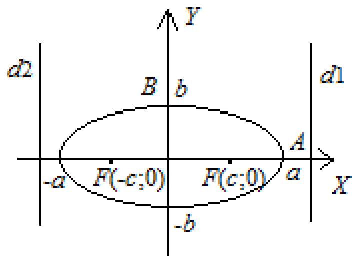


Рис. 27

Основные свойства эллипса (рис. 27):

1. эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат;
2. оси координат называются осями эллипса; начало координат называется центром эллипса;
3. точки пересечения эллипса с осями симметрии эллипса образуют вершины эллипса ( точки $A$ и $B$);
4. если $a \geq b$, то $a$ называется большей полуосью эллипса, $b$ называется малой полуосью эллипса ( $2a, 2b$ – большая и малая оси эллипса);
5. если $a \geq b$, то фокусы эллипса находятся на оси $OX$; если $a \leq b$, то фокусы находятся на оси $OY$;
6. если $a = b$, то эллипс вырождается в окружность;
7. связь между полуосями и расстоянием между фокусами определяется формулой:

$$b^2 = a^2 - c^2; \qquad (65)$$

8. эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большей оси эллипса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \qquad (66)$$

Свойства эксцентриситета:

1) так как $c < a$, то $0 \le \varepsilon \le 1$;

2) $\frac{a}{b} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$;

3) эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль оси, на которой находятся фокусы: при $\varepsilon \approx 1$ эллипс сильно вытянут вдоль оси, при $\varepsilon \approx 0$ эллипс похож на окружность;

9. директрисами эллипса называются прямые, перпендикулярные большей оси эллипса и проходящие на расстоянии ли $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса (проходят за фокусами эллипса, $d_1, d_2$ ):

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}; \tag{67}$$

10. теорема: если $r$ – расстояние от произвольной точки $M$ эллипса до какого-нибудь фокуса, $d$ – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету; так как $\varepsilon < 1$, то директрисы находятся за пределами эллипса.

Пример. Составить уравнение эллипса, если задана точка $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$, принадлежащая эллипсу, и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Решение. Подставим координаты заданной точки в уравнение эллипса: $\frac{2^2}{a^2} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b^2} = 1.$

Используем понятие эксцентриситета: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, найдем квадрат выражения: $\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{4}{9}$, и оценим $c^2 = \frac{4}{9}a^2$. Подставим найденное значение в выражение $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2$. Подставим $b^2$ в уравнение эллипса. Найдем значения полуосей $a = 3, b = \sqrt{5}$ и получим искомое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$

### 8.4. Упражнения

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) его полуоси равны 6 и 4;
б) расстояние между фокусами равно 10, а большая ось равна 16;
в) малая полуось равна 4, и расстояние между фокусами равно 10;
г) большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,5;
д) малая полуось равна 8, а эксцентриситет равен 0,6;
е) сумма полуосей равна 12,расстояние между фокусами равно $6\sqrt{2}$.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) его полуоси равны соответственно 9 и 4;
б) расстояние между фокусами 12 и эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;
в) его малая ось равна 16, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
г) его большая ось равна 20, расстояние между фокусами равно 16;
д) расстояние между фокусами равно 6, а расстояние между директрисами равно $\frac{50}{3}$.

3. Составить уравнение эллипса, зная, что он проходит через точки:

а) $M_1(2\sqrt{3}; 0{,}4\sqrt{10})$ и $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$;

б) $M_3(2; -4\sqrt{3})$ и $M_4(-1; 2\sqrt{15})$.

4. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(3; -2\sqrt{3})$, если его эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

5. Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти:

а) длины его полуосей;
б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет эллипса;

г) уравнения директрис и расстояние между ними;

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса $F_1$ равно 12.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = \mp\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$;

б) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$;

в) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$;

г) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

7. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2 + 5y^2 = 1$, две другие совпадают с концами его малой оси.

8. Найти уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярной прямой $x - y + 50 = 0$.

9. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси $Oy$, а малая ось равна $2\sqrt{3}$. Каждый из фокусов равноудален от центра эллипса и от ближайшего конца фокальной оси.

10. Найти координаты точек эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, для которых расстояние от левого фокуса в два раза больше расстояния от правого фокуса.

11. Дана точка $A(2; -\frac{5}{3})$ на эллипсе $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$; составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки $A$.

12. Эксцентриситет эллипса равен $\frac{2}{3}$, фокальный радиус точки $M$ эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки $M$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

### 8.5. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ фокусы гиперболы, $|F_1F_2| = 2c$. Сумму расстояний от любой точки $M(x, y)$ до точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ обозначим через : $2a$. Числа $r_1$ и $r_2$ называются фокальными радиусами (рис. 28). По определению гиперболы получим уравнение:

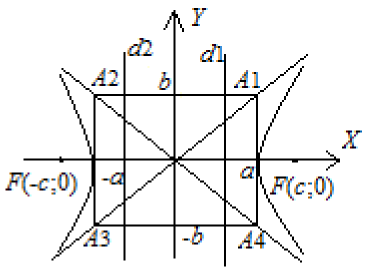


Рис. 28

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad \text{пусть } r_1 > r_2$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2);$$

Пусть $b^2 = c^2 - a^2; \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2;$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (68)$$

Полученное уравнение гиперболы называется каноническим.

Основные свойства гиперболы (рис. 28):

1. гипербола симметрична относительно осей и начала координат. Оси симметрии называются осями гиперболы, центр симметрии называется центро**м** гиперболы;

2. одна из осей симметрии пересекает гиперболу в двух точках, которые называются вершинами;

3. ось, на которой находятся вершины гиперболы называется действительной осью ( $a$ – действительная полуось), другая ось называется мнимой ( $b$ **–** мнимая полуось);

4. прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ со сторонами $2a$ *и* $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы;

5. фокусы гиперболы находятся на действительной оси;

6. связь между полуосями и расстоянием между фокусами

$$b^2 = c^2 - a^2; \tag{69}$$

7. гипербола, определяемая уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{70}$$

называется сопряженной; у сопряженной гиперболы фокусы находятся на оси $OY$ и $a^2 = c^2 - b^2$;

8. прямые, заданные уравнениями:

$$y = \pm\frac{b}{a} \tag{71}$$

называются асимптотами гиперболы; асимптоты – это диагонали главного прямоугольника гиперболы;

9. эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{72}$$

Свойства эксцентриситета:

1) так как $c > a$ , то $\varepsilon > 1$ ;

2) $\frac{a}{b} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$;

10. директрисами гиперболы называются прямые, перпендику-лярные действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра гиперболы (директрисы проходят между фокусами гиперболы):

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}; \tag{73}$$

11. теорема: если $r$ – расстояние от произвольной точки $M$ гиперболы до какого-нибудь фокуса, $d$ – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Пример. Установить какую кривую задает уравнение:

$$y = 7 - 1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде: $y - 7 = -1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$

Возведем уравнение в квадрат, получим:

$$(y-7)^2 = 2{,}25\left(x^2 - 6x + 13\right).$$

Выделяя полный квадрат для переменной *x*, получим искомое уравнение:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1.$$

Это уравнение определяет гиперболу с центром в точке $M(3;7)$, полуосями $a = 2, b = 3,$ фокусами, находящимися на оси, параллельной оси $OX$.

### 8.6. Упражнения

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) расстояние между ее вершинами равно 20, а расстояние между фокусами 30;

б) действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет равен 1,4;

в) расстояние между фокусами равно 10 и мнимая ось равна 8;

г) уравнения асимптот $y = \mp\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20;

д) расстояние между директрисами $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами равно 26.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) ее полуоси равны 6 и 18;

б) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот $y = \mp\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;

г) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет равен $\frac{7}{5}$;

д) уравнения асимптот $y = \mp\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$.

3. Составить уравнение гиперболы, которая проходит через точки:

а) $M_1\left(3; \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ и $M_2(-2\sqrt{5}; 3)$;

б) $M_3\left(\frac{\sqrt{32}}{3}; 1\right)$ и $M_4(\sqrt{8}; 0)$.

4. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти:

а) длины ее полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет гиперболы;

г) уравнения асимптот и директрис;

д) фокальные радиусы точки $M(3; 2{,}5)$.

5. Составить уравнение гиперболы, если точка $A(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ лежит на гиперболе и ее эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

6. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2; 4)$ и $F_2(12; 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

7. Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

8. Найти эксцентриситет гиперболы, зная, что расстояние между фокусами в 4 раза больше расстояния между ее директрисами.

9. На гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти точку, для которой расстояние от левого фокуса в 3 раза больше, чем от правого.

10. Через точку $M(0; -1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

11. Угол между асимптотами гиперболы равен 60°. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

12. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

13. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$;

б) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$;

в) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$;

г) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

14. Дана точка $M_1(10; -\sqrt{5})$ на гиперболе $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки $M_1$.

15. Эксцентриситет гиперболы равен 2, фокальный радиус ее точки $M_1$ проведенный из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние от точки $M$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

16. Эксцентриситет гиперболы равен 3, расстояние от точки $A$ гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки $A$ до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

17. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5; 0)$и уравнение соответствующей директрисе $5x - 16 = 0$.

18. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точки $A(4; 6)$.

19. Составить уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$.

20. Дана гипербола $x^2-y^2=4$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(2;3)$.

21. Дан эллипс $9x^2+25y^2=1$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

22. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

23. Найти фокальные радиусы –векторы гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ в точках пересечения ее с окружностью $x^2+y^2=91$.

24. Дан эллипс $5x^2+8y^2=40$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

25. Найти расстояние между точками пересечения асимптот гиперболы $9x^2-16y^2=144$ с окружностью, имеющий центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

26. На правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. Найти точку, расстояние которой от асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом было бы в два раза больше, чем расстояние ее от асимптоты с положительным угловым коэффициентом.

## 8.7. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, называемой фокусом, и от данной прямой $BD$, называемой директрисой, не проходящей через фокус (рис. 29).

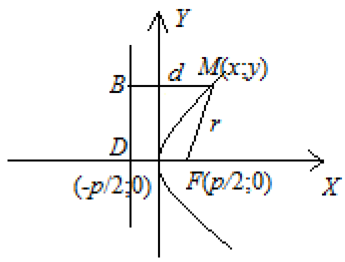


Рис. 29

Пусть если $MB=d, MF=r, FD=p$, $r$ - фокальный радиус, $p$ – параметр параболы, точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболы, точка D имеет координаты $D\left(-\frac{p}{2};0\right)$ и принадлежит директрисе параболы $x=-\frac{p}{2}$.

По определению параболы получим: $r=d$.

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2};$$

$$y^2=2px. \tag{74}$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением параболы. Аналогично можно вывести уравнения вида:

$$y^2=-2px,\ x^2=2py,\ x^2=-2py. \tag{75}$$

Свойства параболы:

1. парабола симметрична относительно оси *OX;*
2. точка $O(0;0)$ является центром параболы; ось симметрии $OX$ является осью параболы;
3. $p$ – параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Пример. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна к прямой $y=2x+5$.

Решение. Уравнение искомой прямой перпендикулярна данной, следовательно, ее угловой коэффициент равен 2, уравнение имеет вид: $y = 2x + b.$. Прямая касается параболы, следовательно, имеет с ней одну общую точку, которую можно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + b; \\ x^2 = 16y. \end{cases}$$

Получим уравнение: $x^2 - 32x - 16b = 0.$

Из условия $32^2 + 4 \cdot 16b = 0,$ получим значение $b = -16.$ .

Искомое уравнение имеет вид: $y = 2x - 16.$

### 8.8. Упражнения

1. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси $Ox$ и ее параметр $p = 3$;

б) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично оси $Ox$ и ее параметр $p = 0{,}5$;

в) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси $Oy$ и ее параметр $p = \frac{1}{4}$;

г) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси $Oy$ и ее параметр $p = 3$.

2. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола расположена симметрично относительно оси $Ox$ и проходит через точку $A(9; 6)$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси $Ox$ и проходит через точку $B(-1; 3)$;

в) парабола расположена симметрично относительно оси $Oy$ и проходит через точку $C(1; 1)$;

г) парабола расположена симметрично относительно оси $Oy$ и проходит через точку $D(4; -8)$.

3. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

а) $y^2 = 6x$;

б) $x^2 = 5y$;

в) $y^2 = -4x$;

г) $x^2 = -y$.

4. Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4; 4)$.

5. Найти вершину, фокус и директрису параболы
$y = -2x^2 + 8x + 5$, построить эскиз графика.

6. Составить уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью $Ox$.

7. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

8. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси $Ox$ и отсекающей от прямой $y = x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

9. Парабола $y^2 = 2x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна $\frac{3}{4}$. Составить уравнение этой прямой.

10. Составить уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

11. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние которой от прямой $4x + 3y + 10 = 0$ равно 2.

12. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси $Ox$ и проходящей через точку $M(4; 2)$; определить угол $\alpha$ между фокальным радиусом – вектором этой точки и осью $Ox$.

13. Определить точки пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ и парабола $x^2 = 4y$.

14. Определить точки пересечения прямой $3x - 2y + 6 = 0$ и парабола $y^2 = 6x$.

15. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 8x$ и параллельна прямой $2x + 2y - 3 = 0$.

16. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2 = 16y$ и перпендикулярна прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

17. Из точки $A(5; 9)$ проведены касательные к параболе $y^2 = 5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

### 8.9. Общее уравнение линии второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (76)$$

$A, 2B, C, 2D, 2E, F$ – числа, причем $A, B, C$ – одновременно не нули. Составим квадратичную форму из коэффициентов уравнения:

$$L(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad (77)$$

Пусть $\Delta = AC - B^2$. По знаку $\Delta$ можно определить вид кривой:

1) если $\Delta > 0$, уравнение (76) относится к эллиптическому виду;

2) если $\Delta < 0$, уравнение (76) относится к гиперболическому виду;

3) если $\Delta = 0$, уравнение (76) относится к параболическому виду.

Справедлива лемма. Пусть в прямоугольной системе координат $XOY$ задано общее уравнение линии второго порядка (76) и пусть $\Delta \neq 0$. Тогда с помощью параллельного переноса и поворота осей координат данное уравнение примет вид:

$$A^* x_2^2 + C^* y_2^2 + F^* = 0, \qquad (78)$$

$A^*, C^*, F^*$ - числа, $x_2, y_2$ - координаты в новой системе координат.

Координаты нового начала координат после параллельного переноса $O_1(x_0; y_0)$ можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}; \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \qquad (79)$$

С учетом параллельного переноса свободный член уравнения вычисляется по формуле:

$$F' = Dx_0 + Ey_0 + F \qquad (80)$$

Получим новое уравнение:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F' = 0. \qquad (81)$$

Угол поворота осей координат можно найти, зная тангенс угла поворота:

$$tg2\alpha = \frac{2B}{A-C}. \qquad (82)$$

Зная угол поворота осей координат, оценим коэффициенты уравнения кривой:

$$A^* = C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + A\cos^2\alpha,$$

$$C^* = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha,$$

$$D^* = D\cos\alpha + E\sin\alpha, \quad E^* = E\cos\alpha - D\sin\alpha.$$

В результате получим коэффициенты уравнения (78).

Теорема. Пусть в прямоугольной системе координат задано уравнение (77). Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение примет вид:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 -$ эллипс;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 -$ мнимый эллипс;

3) $b^2x^2 + a^2y^2 = 0$ – пара мнимых прямых;

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 -$ гипербола;

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся прямых;

6) $y^2=2px$ – парабола;

7) $y^2-a^2=0$ – пара параллельных прямых;

8) $y^2+a^2=0$ – пара мнимых параллельных прямых;

9) $y^2=0$ – пара совпадающих прямых.

Пример. Определить вид кривой в зависимости от параметра λ:

$$x^2-2y+\lambda(y^2-2x)=0.$$

Раскроем скобки в уравнении: $x^2+\lambda y^2-2x\lambda-2y=0.$ .

Составим $\Delta=AC-B^2=\lambda$ и оценим параметр λ:

1) $\Delta=\lambda>0,$ эллипс;

2) $\Delta=\lambda<0,$ гипербола;

3) $\Delta=\lambda=0,$ парабола.

Получим эти кривые:

1) $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ при $\lambda>0$;

2) $(x-\lambda)^2-\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ при $\lambda\in(-\infty;-1)\cup(-1;10)$ и $x-y=0$ и $x+y=-2$ при $\lambda=-1$;

3) $x^2=2y$ при $\lambda=0.$

## 8.10. Упражнения

1. Определить точки пересечения эллипса и параболы:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1;\ \ y^2=24x.$$

2. Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$ и параболы $y^2=3x$.

3. Определить точки пересечения парабол $y=x^2-2x+1,\ x=y^2-6y+7$.

4. Найти уравнение прямой, которая проходит через вершину параболы $y=-2x^2-6x-4$ параллельно прямой $2x-y+3=0$.

5. Дана парабола $y^2=12x$. Найти длину ее хорды, проходящей через точку $M(8;0)$ и наклоненной к оси $Ox$под углом $60°$.

6. Привести к каноническому виду уравнения следующих кривых:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

2) $3x^2-4xy-2x+4y-5=0$;

3) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

4) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$;

5) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

6) $y=2x^2-8x+5$;

7) $9x^2+25y^2=225$;

8) $9x^2-4y^2-36x-8y-4=0$;

9) $25x^2+4y^2+50x-32y-11=0$;

10) $x^2+y^2-10x+2y+1=0$.

7. Написать каноническое уравнение эллипса и гиперболы, если фокусы их находятся на оси $OX$, большая полуось эллипса равна действительной полуоси гиперболы и равна радиусу окружности $x^2+y^2-2x+2y-14=0$, фокусное расстояние эллипса равно 6, а для гиперболы в два раза больше.

8. Найти расстояние между фокусами параболы $4x=y^2$ и эллипса

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

9. Найти расстояние от центра окружности $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=6$ до вершины параболы $y=-x^2+2x-\frac{1}{3}$.

## 8.11. Контрольная работа № 6

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры $N$ – номер студента в журнале, $D$ – число дня рождения студента, $M$ – число месяца рождения студента.

1. Найти координаты центра $C$ и радиус $R$ окружности $x+y-2Nx+6My+4M^2=0$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через центры окружностей: $x^2+y^2+x-8y-6=0$; $x^2+y^2-6x-3y-1=0$.
3. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и директрисы: а) эллипса $x^2+Ny^2=3M$; б) гиперболы $2Nx^2-4My^2=NM$. Построить эти кривые.
4. Написать каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно $M$.
5. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y=\frac{1}{N}x^2$.
6. Написать уравнение эллипса, если известны координаты вершин $A(7;2)$, $B(3;4)$ и одного из фокусов $F(6;2)$.