7. Линейные операторы

7.1 Определение линейного оператора

Пусть заданы два линейных пространства: R_n, R_m. Если задан закон, по которому каждому вектору $\vec{x} \in R_n$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in R_m$, то говорят, что задан оператор (преобразование, отображение) $\tilde{A}(\vec{x})$, действующий из R_n в R_m, и пишут

$$\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x}). \tag{59}$$

Вектор $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ называется образом вектора $\vec{x}$, вектор $\vec{x}$ называется прообразом вектора $\vec{y}$. Если пространства совпадают, то оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ отображает пространство R_n в себя.

Оператор $\tilde{O}(\vec{x})$ называется нулевым, если переводит все векторы $\vec{x} \in R_n$ в нулевые векторы: $\tilde{O}(\vec{x}) = \vec{O}$.

Оператор $\tilde{E}(\vec{x})$ называется тождественным, если переводит любой вектор $\vec{x} \in R_n$ в себя: $\tilde{E}(\vec{x}) = \vec{x}$.

Оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ называется линейным, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$ и любого действительного числа λ выполняются равенства:

1) $\tilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{A}(\vec{y})$ (свойство аддитивности);
2) $\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\tilde{A}(\vec{x})$ (свойство однородности).

Пусть в пространстве R_n задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Любой вектор $\vec{x} \in R_n$ можно разложить по этому базису: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$. Тогда $\tilde{A}(\vec{x}) = x_1\tilde{A}(\vec{e}_1) + x_2\tilde{A}(\vec{e}_2) + ... + x_n\tilde{A}(\vec{e}_n)$. Каждый из векторов $\tilde{A}(\vec{e}_i)$ можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$:

$$\begin{gathered}
\tilde{A}(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n \\
\tilde{A}(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\tilde{A}(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n
\end{gathered}$$

Распишем $\tilde{A}(\vec{x})$:

$$\tilde{A}(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + ... + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{n2}\vec{e}_n) + \ldots$$

$$+ x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n) =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \ldots$$

$$+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)\vec{e}_n .$$

С другой стороны $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x}) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n$. Так как разложение по базису единственное, то справедливы равенства:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n . \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов данной системы называется матрицей оператора $\tilde{A}(\vec{x})$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, ранг матрицы называется рангом оператора.

Вывод**:** каждому линейному оператору $\tilde{A}(\vec{x})$ соответствует матрица в данном базисе и наоборот: каждой матрице n-го порядка соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Введем для векторов $\vec{x}, \vec{y} \in R_n$ матрицы-столбцы: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$.

Тогда систему равенств можно записать в виде матричного уравнения:

$$Y = AX . \qquad (60)$$

Рассмотрим пример. Найти образ $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, если оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу $Y=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -14\\ 5\end{pmatrix}$.

Следовательно, образ вектора $\vec{y}$ имеет вид: $\vec{y}=7\vec{e}_1-14\vec{e}_2+5\vec{e}_3$.

7.2 Действия над операторами

1. Суммой операторов $\tilde{A}(\vec{x})$ **и** $\tilde{B}(\vec{x})$ называется оператор $\tilde{A}+\tilde{B}$, такой, что $(\tilde{A}+\tilde{B})(\vec{x})=\tilde{A}(\vec{x})+\tilde{B}(\vec{x})$.
2. Произведением оператора $\tilde{A}(\vec{x})$ на число λ называется такой оператор, что $(\lambda\tilde{A})(\vec{x})=\lambda(\tilde{A}(\vec{x}))$.
3. Произведением операторов $\tilde{A}(\vec{x})$ **и** $\tilde{B}(\vec{x})$ называется такой оператор, что $(\tilde{A}\tilde{B})(\vec{x})=\tilde{A}(\tilde{B}(\vec{x}))$.

Сами операторы $\tilde{A}+\tilde{B}$, $\lambda\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{B}$ являются линейными.

7.3 Матрица оператора в новом базисе

Пусть задано два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ и $\vec{e}_{\mathbf{1}}^{\,*},\vec{e}_2^{\,*},...,\vec{e}_n^{\,*}$ в пространстве R_n. В каждом из них имеются матрицы A, A^* оператора $\tilde{A}(\vec{x})$. Найдем связь этих матриц. Известно, что $X=BX^*$ и $Y=BY^*$, где B - матрица перехода из базиса векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ в базис векторов $\vec{e}_1^{\,*},\vec{e}_2^{\,*},...,\vec{e}_n^{\,*}$.

Из условия $\vec{y}=\tilde{A}(\vec{x})$ следует, что $Y=AX$. Тогда:

$$AX=ABX^*,\ Y=ABX^*,\ BY^*=ABX^*,$$

$$B^{-1}BY^*=B^{-1}ABX^*,\ Y^*=B^{-1}ABX^*,$$

Следовательно,

$$A^* = B^{-1}AB. \tag{61}$$

Например, найти матрицу A^* линейного оператора в базисе $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, ..., \vec{e}_n^{\,*}$, заданного матрицей A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{e}_2^{\,*} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

Составим матрицу перехода из базиса в базис: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу для матрицы B: $B^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $A^* = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{5} & \dfrac{-3}{5} \\ \dfrac{18}{5} & \dfrac{17}{5} \end{pmatrix}$.

7.4 Собственные векторы и собственные значения

Вектор $\bar{x} \neq 0$ называется собственным вектором линейного оператора $\tilde{A}$, если найдется такое число λ, что

$$\tilde{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x} \tag{62}$$

Число λ называется собственным значением оператора $\tilde{A}$, соответствующим вектору $\bar{x}$:

$$\tilde{A}(\bar{x}) = AX = \lambda X \tag{63}$$

Вектор $\bar{x}$ переводится в ему коллинеарный вектор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2; \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \tag{64}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0; \end{cases} \tag{65}$$

или

$$(A-\lambda E)X = 0. \tag{66}$$

Система (65) имеет нулевое решение. Для того, чтобы она имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A-\lambda E) = 0. \tag{67}$$

Определитель матрицы $(A-\lambda E)$ называется характеристическим многочленом оператора $\tilde{A}$ или матрицы A, а само уравнение (67) называется характеристическим уравнением $\tilde{A}$ или A.

Пусть оператор $\tilde{A}$ (матрица A) имеет n линейно независимых собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Векторы $\vec{e}_i$ примем за базисные. Тогда

$$\tilde{A}(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n,$$

($a_{ij} = 0$, если $i \neq j,$ и $a_{ii} = \lambda_i$, если $i = j$).

Следовательно, матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Верно и обратное: если A линейного оператора $\tilde{A}$ имеет диагональный вид в некотором базисе, то все векторы этого базиса являются собственными векторами $\tilde{A}$.

Например, найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ и нормировать их, если задана матрица оператора $\tilde{A}$:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -6 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)-6(3-\lambda)=0\,,\ (3-\lambda)\left(2-3\lambda+\lambda^2-6\right)=0,$$

$$\lambda=3,\ \lambda=4,\ \lambda=-1.$$

Находим собственные векторы:

1) при $\lambda=3$ $\quad (A-3E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$;

$$A-3E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \qquad (0; C_1; 0);$$

2) при $\lambda = 4$ $\quad (A - 4E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0;$

$$A - 4E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0; \\ x_1 - 1 \cdot x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = -3C_2 \\ x_2 = -5C_2 \\ x_3 = C_2 \end{matrix} \quad (-3C_2; -5C_2; C_2);$$

3) при $\lambda = -1$ $\quad (A + E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0;$

$$A+E=\begin{pmatrix}2 & 0 & -6\\ 1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -6\\ 1 & 4 & -2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases}3x_1+0\cdot x_2-6x_3=0;\\ x_1+4x_2-2x_3=0;\\ -x_1+0\cdot x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & -6\\ 1 & 4 & -2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}x_1=2C_3\\ x_2=0\\ x_3=C_3\end{matrix}\quad \left(2C_3;0;C_3\right).$$

Вектора $\vec{a_1}=\left(0;C_1;0\right)$; $\vec{a_2}=\left(-3C_2;-5C_2;C_2\right)$; $\vec{a_3}=\left(2C_3;0;C_3\right)$ при $C_1\neq 0, C_2\neq 0, C_3\neq 0$ являются собственными векторами. Числа $\lambda=3,\ \lambda=4,\ \lambda=-1$ - собственные значения.

Нормируем полученные собственные векторы. Подберем C_i так, чтобы длина вектора равнялась единице:

$\overline{a_1}=\left(0;C_1;0\right)$; $\overline{e_1}=\left(0;1;0\right)$.

$\overline{a_2}=\left(-3C_2;-5C_2;C_2\right);\left(9+25+1\right)C_2^2=1; C_2=\sqrt{\dfrac{1}{35}};\ \overline{e_2}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{35}};-\dfrac{5}{\sqrt{35}};\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right).$

$\overline{a_3}=\left(2C_3;0;C_3\right);\ \left(4+1\right)C_3^2=1;\ C_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}};\vec{e}_3=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};0;\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right).$

Ответ: $\overline{e_1}=\left(0;1;0\right);\ \overline{e_2}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{35}};-\dfrac{5}{\sqrt{35}};\dfrac{1}{\sqrt{35}}\right);\ \vec{e}_3=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};0;\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right).$

7.5 Линейная модель обмена (модель международной торговли)

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, \ldots S_n$. Национальный доход каждой страны $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Пусть a_{ij} - доля национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров страны S_i. Предположим, что национальный доход тратится либо на закупку товаров или внутри страны, на импорт из других стран, следовательно, выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{69}$$

Составим матрицу $A = (a_{ij})$, которая называется структурной матрицей торговли. Сумма в столбцах равна единице.

Выручка от торговли для любой страны S равна:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = y_i \, . \tag{70}$$

Для баланса торговли необходимо, чтобы выручка от торговли для каждой страны была не меньше, чем ее национальный доход. Такое условие называется условием бездифицитности:

$$y_i \geq x_i \tag{71}$$

Рассмотрим матричное уравнение $AX = X$. Его можно записать так:

$$AX = \lambda X, \; \lambda = 1. \tag{72}$$

Таким образом, задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$.

Например, требуется найти соотношение цен трех товаров, если набор этих товаров $x_1 = (6; 2; 4)$; $x_2 = (1; 8; 9)$; $x_3 = (3; 5; 9)$ имеют одинаковую стоимость.

Пусть имеется три вида товаров T_1, T_2, T_3 и их цены $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}6y_1+2y_2+4y_3=1y_1+8y_2+9y_3;\\ 6y_1+2y_2+4y_3=3y_1+5y_2+9y_3;\end{cases}\qquad \begin{cases}5y_1-6y_2-5y_3=0;\\ 3y_1-3y_2-5y_3=0;\end{cases}$$

$2y_1-3y_2=0 \quad y_1=\dfrac{3}{2}y$, следовательно $y_2=C,\ y_1=\dfrac{3}{2}C$

$$5y_3=3y_1-3y_2,\ y_3=\frac{3}{5}(y_1-y_2)=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}C-C\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{C}{2}=\frac{3C}{10},$$

$$\overline{y}=\left(\frac{3}{2}C;C;\frac{3C}{10}\right).$$

Например, при $C=10$, $\overline{y}=(15;10;3)$.

Ответ: 15:10:3 – соотношение цен трех товаров.

7.6 Квадратичные формы

Квадратичной формой $L(x_1,x_2,...,x_n)$ от n переменных называется сумма

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (73)$$

где a_{ij} - действительные числа, причем

$$a_{ij}=a_{ji}\,. \qquad (74)$$

Матрица $A=(a_{ij})$, $i,j=1,...,n$, называется матрицей квадратичной формы. Матрица A является симметрической, так как элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали.

Например, для квадратичной формы трех переменных $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+8x_1x_2-6x_1x_3$ составить матрицу.

Решение. Составим матрицу, используя свойство (74):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 4 & 2 & 0\\ -3 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A называется рангом квадратичной формы.

Пусть задана матрица переменных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Выражение (73) в матричной форме запишется так:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX \tag{75}$$

Пусть заданы две матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, которые связаны соотношением: $X = BY$, где матрица $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, является невырожденной матрицей перехода от матрицы Y к матрице X. Тогда

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX = (BY)^T A(BY) =$$

$$= (Y^T B^T)A(BY) = Y^T (B^T AB)Y = Y^T A^* Y$$

Вывод: при невырожденном линейном преобразовании $X = BY$ матрица квадратичной формы (73) принимает вид:

$$A^* = B^T AB \tag{76}$$

Квадратичная форма (73) называется канонической, если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а матрица A является диагональной:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 \tag{77}$$

Ранг квадратичной формы равен числу не равных нулю коэффициентов канонической формы.

Теорема: Любая квадратичная форма (73) с помощью невырожденных линейных преобразованиях переменных может быть переведена в канонический вид (77).

Такое преобразование не единственное, одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду по-разному. Но при этом различные канонические формы обладают рядом общих свойств: ранг матрицы квадратичной формы не меняется при линейных преобразованиях.

Среди приемов перевода квадратичной формы в каноническую форму можно выделить две:

1) выделение полных квадратов для переменных;
2) использование ортогональных преобразований.

Пусть задана квадратичная форма $L = L(x_1, x_2)$, известна ее матрица $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Пусть имеется матрица перехода B от одного ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в другой $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1^* = b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^* = b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 \end{cases}, \tag{78}$$

$\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*$ - нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1, λ_2. Имеем формулы перехода:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1^* + b_{12}x_2^* \\ x_2 = b_{21}x_1^* + b_{22}x_2^* \end{cases}. \tag{79}$$

Квадратичная форма переходит в каноническую форму:

$$L = L(x_1^*, x_2^*) = \lambda_1 (x_1^*)^2 + \lambda_2 (x_2^*)^2, \ A^* = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}. \tag{80}$$

Квадратичная форма (73) называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, выполняется условие: $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0, (L(x_i) < 0).$ Существуют разные методы определения знака квадратичной формы.

Теорема 1: для того, чтобы форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительные (отрицательные).

Теорема 2 (критерий Сильвестра): для того, чтобы квадратичная форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительны: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$; для отрицательно определенной квадратичной формы знаки главных миноров должны чередоваться, начиная с отрицательного значения: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, ...$

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Если квадратичная форма не поддается определению, то ее называют знаконеопределенно**й**.

7.7 Упражнения

1. В пространстве R^2 линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти образ $y = \tilde{A}(X)$ вектора $\vec{X} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$.

2. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\{\overline{e_i'}\}$, где:
$\overline{e_1'} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$; $\overline{e_2'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$; $\overline{e_3'} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, если она задана в базисе $\{\overline{e_i}\}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

1. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{e_i'}\}$, если он задан в базисе $\{\overline{e_i}\}$:

1) $\bar{x} = (1; 2; 4)$;
$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3; \\ \overline{e_2'} = \frac{3}{2}\bar{e}_1 - \bar{e}_2; \\ \overline{e_3'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

2) $\bar{x} = (10; 5; 1)$;
$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \frac{6}{5}\bar{e}_3; \\ \overline{e_2'} = 6\bar{e}_1 - \bar{e}_2; \\ \overline{e_3'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

3) $\bar{x} = (1; 4; -8)$;
$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3; \\ \overline{e_2'} = \frac{3}{4}\bar{e}_1 - \bar{e}_2; \\ \overline{e_3'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

2. В пространстве R^4 заданы векторы $\{\bar{e}_i\}$. Показать, что эти векторы образуют базис. Найти матрицу перехода от канонического базиса к данному и координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе:

1) $\bar{e}_1 = (1;1;0)$; $\bar{e}_2 = (0;1;1)$; $\bar{e}_3 = (1;0;1)$; $\bar{x} = (-1;2;1)$;

2) $\bar{e}_1 = (1;1;1)$; $\bar{e}_2 = (1;1;2)$; $\bar{e}_3 = (1;2;3)$; $\bar{x} = (6;9;14)$;

3) $\bar{e}_1 = (2;1;-3)$; $\bar{e}_2 = (3;2;-5)$; $\bar{e}_3 = (1;-1;1)$; $\bar{x} = (6;2;-7)$;

4) $\bar{e}_1 = (1;2;-1;-2)$; $\bar{e}_2 = (2;3;0;-1)$; $\bar{e}_3 = (1;2;1;4)$;
$\bar{e}_4 = (13-10)$; $\bar{x} = (7;14;-1;2)$.

3. Составить матрицу перехода от базиса $\{\bar{e}_i\}$ к базису $\{\bar{e}_i'\}$:

1) $\bar{e}_1 = (1;2;1)$; $\bar{e}_2 = (2;3;3)$; $\bar{e}_3 = (3;7;1)$; $\bar{e}_1{}' = (3;1;1)$;
$\bar{e}_2{}' = (5;2;1)$; $\bar{e}_3{}' = (1;1;-6)$;

2) $\bar{e}_1 = (1;1;1;1)$; $\bar{e}_2 = (1;2;1;1)$; $\bar{e}_3 = (1;1;2;1)$; $\bar{e}_4 = (1;3;2;3)$;

3) $\bar{e}_1{}' = (1;0;3;3)$; $\bar{e}_2{}' = (-2;-3;-5;-4)$; $\bar{e}_3{}' = (2;2;5;4)$;
$\bar{e}_4{}' = (-2;-3;-4;-4)$.

4. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\{\bar{e}_i'\}$, где:
$\bar{e}_1' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$; $\bar{e}_2' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$; $\bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, если она задана в базисе $\{\bar{e}_i\}$:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

5. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ оператор $\tilde{A}$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе $\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$; $\vec{e}_2^{\,*} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.

7.Привести к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы Q следующие симметрические матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8.Написать матрицу квадратичной формы и определить знак квадратичной формы:
1) $F = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;
2) $F = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;
3) $F = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

9. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:
1) $2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
2) $\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
3) $2\lambda x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;
4) $2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

10. Найти все значения параметра λ, при которых отрицательно определены следующие квадратичные формы:
1) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
2) $-2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;
3) $2\lambda x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
4) $-x_1^2 - 2x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

11. Привести к каноническому виду квадратичную форму методом Лагранжа:
1) $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
2) $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;
3) $F = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
4) $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;
5) $F = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$.

12. Привести к каноническому виду квадратичную форму с помощью ортогонального преобразования:
1) $F = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$;
2) $F = x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$;
3) $F = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;
4) $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$;
5) $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
6) $F = 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;
7) $F = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;
8) $F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

13. Найти соотношение цен трех товаров, если наборы этих товаров:
$x_1 = (2;3;4)$; $x_2 = (6;3;1)$; $x_3 = (8;2;4)$.

Контрольная работа по теме:
Векторные пространства и квадратичные формы.

1. Найти косинус угла между векторами:
$\bar{x} = \bar{e_1}\sqrt{N} + \bar{e_2}\sqrt{(N-2)} + \bar{e_3} + \bar{e_4}$; $\bar{y} = \bar{e_1}\sqrt{N} + \bar{e_2}\sqrt{(N-2)}$.

2.При каком значении параметров α и β векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будут коллинеарны, если $\bar{a} = (N; N; \beta)$; $\bar{b} = (\alpha; 2; N)$.

3.Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e_i}\}$:
V^3: $\bar{e}_1 = (3N; 1; 4)$; $\bar{e}_2 = (5N; 2; 1)$; $\bar{e}_3 = (N; 1; 6)$; $\bar{x} = (2N; 1; 1)$

4.Исследовать на линейную зависимость (независимость) системы векторов:
$\bar{x}_1 = (N; -N; 0; 0)$; $\bar{x}_2 = (0; N; -1; 0)$; $\bar{x}_3 = (N; 0; -1; 1)$;
$\bar{x}_4 = (0; 0; 0; 1)$; $\bar{x}_5 = (3N; -5N; 2; -3)$.

5.Найти ранг данной системы векторов и какой-нибудь базис:
$\bar{a}_1 = (1; 2; 3N; -4)$; $\bar{a}_2 = (2; 3; -4N; 1)$; $\bar{a}_3 = (2; -5; 8N; -3)$;
$\bar{a}_4 = (5; 26; -9N; -12)$; $\bar{a}_5 = (3; -4; N; 2)$.

6.Установить, что следующие векторы ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:
$\bar{a}_1 = (2; 1; -1; 0)$; $\bar{a}_2 = (1; 1; -1; N)$.

7.Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e_i'}\}$, если он задан в базисе $\{\bar{e_i}\}$: $\bar{x} = (10; 5N; 1)$;

$$\begin{cases} \bar{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \frac{6}{5}\bar{e}_3; \\ \bar{e_2'} = 6N\bar{e}_1 - N\bar{e}_2; \\ \bar{e_3'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

8.Составить матрицу перехода от базиса $\{\bar{e_i}\}$ к базису $\{\bar{e_i'}\}$:
$\bar{e}_1 = (1; 2; N)$; $\bar{e}_2 = (2; 3; 3N)$; $\bar{e}_3 = (3; 7; N)$; $\bar{e}_1{}' = (3; 1; 1)$;
$\bar{e}_2{}' = (5; 2; 1)$; $\bar{e}_3{}' = (1; 1; -6)$;

9.Найти матрицу линейного оператора в базисе $\{\overline{e_i'}\}$, где: $\overline{e_1'} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$; $\overline{e_2'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$; $\overline{e_3'} = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, если она задана в базисе $\{\overline{e_i}\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ N & 0 & N \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Найти собственные числа и собственные векторы данной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ N & 2 & -1 \\ N & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

$$F(x_1; x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + N^2 \cdot x_3^2 + 2x_1x_2 + 2Nx_1x_3 + 6Nx_2x_3.$$

12. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования:

$$F(x_1; x_2) = 9Nx_1^2 + 24Nx_1x_2 + 16Nx_2^2.$$