6.N – мерный вектор и векторное пространство

1.1 Определение N – мерного вектора

N-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде: $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$, где x_i – i-тая компонента вектора. Например, в экономике используются векторы $\overline{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ - потребительская корзина, $\overline{y}(y_1, y_2, ..., y_n)$ - соответствующие цены товаров.

Два вектора называются равными $\overline{x} = \overline{y}$, если равны соответствующие компоненты $x_i = y_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

1.2 Операции над векторами

1. Сложение векторов.

Суммой векторов $\vec{x} + \vec{y}$ одной размерности называется вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$, если его компоненты вычисляются по формуле: $z_i = x_i + y_i$

2. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\overline{x}$ на число λ называется вектор $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, компоненты которого вычисляются по формуле: $y_i = \lambda x_i$, при этом $\lambda > 0$ $\vec{y} \uparrow\uparrow \vec{x}$, $\lambda < 0$ $\vec{y} \uparrow\downarrow \vec{x}$.

Свойства операций:

1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;

2) $\left(\overline{x} + \overline{y}\right) + \overline{z} = \overline{x} + \left(\overline{y} + \overline{z}\right)$;

3) $\alpha\left(\beta\overline{x}\right) = (\alpha\beta)\overline{x}$;

4) $\alpha\left(\overline{x} + \overline{y}\right) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$;

5) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$;

6) $\overline{0} = (0, 0, ..., 0) \Rightarrow \overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$;

7) $-\overline{x}$ - противоположный вектор, следовательно $\overline{x} + \left(-\overline{x}\right) = \overline{0}$;

8) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$.

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше свойствам, называется векторным пространством R.

Если под векторами $\overline{x}$, $\overline{y}$ рассматривать элементы любой природы, то такое множество образует линейное пространство.

1.3 Линейная зависимость векторов

Вектор $\vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ векторного пространства R, если выполняется равенство

$$\vec{a}_n = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_{n-1} \vec{a}_{n-1}, \quad (48)$$

λ_i -любые числа.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа λ_i, одновременно не равные равны, что справедливо равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = 0. \quad (49)$$

Если равенство (49) выполняется только при $\lambda_i = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Теорема*:* если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ - линейно зависимые, то хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других векторов.

На плоскости два линейно независимых вектора – это не коллинеарные вектора. Тогда любой третий вектор можно представить в виде: $\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$.

В пространстве три некомпланарных вектора можно считать линейно независимыми и любой четвертый представить в виде:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = 0 .$$

Свойства векторов линейного пространства:

1) если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ имеется нулевой вектор $\overline{0}$, то эти векторы линейно зависимы;

2) если часть векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы, то и все векторы линейно зависимы.

Например, проверим, являются ли векторы линейно зависимыми

$$\overline{a_1} = (1; -1; 1; -1),\ \overline{a_2} = (1; 0; 1; 0),\ \overline{a_3} = (1; -3; 1; -3)\ ?$$

Решение. Составим равенство: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = 0$,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Пусть $\lambda_1 = C$ $\begin{cases} C + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$, $C + 3\lambda_3 = 0,\ \lambda_3 = -\dfrac{C}{3},\ \lambda_2 = -\dfrac{2C}{3}$.

Система имеет множество решений $\left(C; -\dfrac{2}{3}C; -\dfrac{1}{3}\right)$. Следовательно, заданные векторы линейно зависимые.

1.4 Размеренность и базис векторного пространства

Векторное (линейное) пространство R называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $(n+1)$ векторов – линейно зависимые.

n – называется размерностью пространства R и обозначается $\dim(R)$. Например, R – плоскость, $\dim(R_2) = 2$, R – трехмерное пространство, $\dim(R_3) = 3$.

Множество n независимых векторов n-мерного пространства R называется базисом.

Пусть имеется *n*-мерное пространство R_n, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – базис R_n. Любой вектор $\vec{x}$ - линейно зависимый, следовательно,

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n + \lambda\vec{x} = 0,$$

$$\overline{x} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{e}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{e}_2 + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda}\vec{e}_n, \ \lambda \neq 0 \qquad (50)$$

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}, \qquad (51)$$

где $x_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ - координаты вектора $\vec{x}$.

Выражения (50), (51) являются разложениями вектора $\overline{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, $\vec{x}_i$ – координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе. Такое разложение единственное.

Теорема: если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – система линейно независимых векторов пространства R_n и любой вектор $\overline{a}$ линейно выражается через них, то пространство R является *n*-мерным и векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ являются его базисом.

Покажем, что следующие вектора образуют базис

$$\overline{a_1} = (1;1;1);\ \overline{a_2} = (1;2;3);\ \overline{a_3} = (1;3;3).$$

Решение: если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ образуют базис, то они линейно независимы, следовательно $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$ $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - линейно-независимые векторы и составляют базис.

1.5 Переход к новому базису

Пусть пространство R имеет два базиса: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – старый; $l_1^*, l_2^*, ..., l_n^*$ - новый:

$$\begin{cases} \vec{l}_1^* = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{l}_2^* = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n \\ \ldots \\ \vec{l}_n^* = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \tag{52}$$

Матрица коэффициентов этой системы называется матрицей перехода от старого $(\vec{e}_i)$ к новому $(\vec{l}_i^*)$ базису:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Обратный переход от $(\vec{l}_i^*)$ к $(\vec{e}_i)$ осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Пусть задан вектор $\overline{x}$. Запишем его в разных базисах:

1) в базисе $(\vec{e}_i)$ $\overline{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ (в старом),

2) в базисе $(\vec{l}_i^*)$ $\overline{x} = x_1^*\vec{l}_1^* + x_2^*\vec{l}_2^* + \ldots + x_n^*\vec{l}_n^*$ (в новом).

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{54}$$

Например, в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ заданы векторы $\overline{a_1} = (1;1;0)$, $\overline{a_2} = (1;-1;1)$, $\overline{a_3} = (-3;5;-6)$ и $\overline{b} = (4;-4;5)$. Выразить вектор $\overline{b}$ в базисе векторов $\overline{a_1};\overline{a_2};\overline{a_3}$.

Решение: а) Покажем, что $\overline{a_1};\overline{a_2};\overline{a_3}$ образуют базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

следовательно векторы образуют базис.

б) Выразим связь между базисами:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{a}_3 = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{матрица перехода } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

в) Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

г) По формуле (47) найдем координаты $\overline{b}$ в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{b} = \frac{1}{2}\overline{a_1} + 2\overline{a_2} - \frac{1}{2}\overline{a_3}.$$

1.6 Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство

Пусть заданы два вектора в пространстве R_n: $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Скалярным произведением двух векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ называется число, вычисляемое по формуле:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n . \qquad (55)$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$,
2. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$,
3. $\lambda \vec{x} \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$, где λ - действительное число,
4. $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$, если $\vec{x} \neq 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, если $\vec{x} = 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = x^2$

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющих свойствам 1-4, называется евклидовым пространством.

Длиной (нормой, модулем**)** вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из скалярного произведения вектора на себя:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} . \qquad (56)$$

Свойства длины вектора:

1) $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

2) $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|, \quad \lambda$ - действительное число;

3) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ - неравенство Коши-Буняковского;

4) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ - неравенство треугольника.

Угол между векторами определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} , \; 0 < \varphi < \pi . \qquad (57)$$

Два вектора называются ортогональными**,** если их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \quad \vec{x} \perp \vec{y} . \qquad (58)$$

Вектор $\vec{e}$ называется единичным, если $|\vec{e}| = 1$.

Если единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ... \vec{e}_n$ n-мерного евклидового пространства попарно ортогональны и норма каждого вектора равна 1, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ... \vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис.

Теорема: Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Например, в трехмерном пространстве таким базисом является система векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.=-

6.7. Упражнения

1. В пространстве V^5 в некотором базисе заданы векторы:

$\bar{x}_1 = (1; 0; 2; 5; 1)$; $\bar{x}_2 = (3; 1; -1; 2; 3)$; $\bar{x}_3 = (2; 0; 4; 2; 2)$;
$\bar{x}_4 = (1; 1; 2; 3; 2)$.

Определить координаты следующих векторов:

$\overline{y_1} = \bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 - \bar{x}_4$; $\overline{y_2} = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 3\bar{x}_4$;
$\overline{y_3} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \frac{1}{2}\bar{x}_3 + 2\bar{x}_4$; $\overline{y_4} = \frac{1}{3}\bar{x}_1 - \frac{1}{3}\bar{x}_2 - \frac{1}{2}\bar{x}_3 - \bar{x}_4$.

2. Найти длину вектора 1) $\bar{x} = (-10; 2; -1; 3.5)$; 2) $\bar{x} = 4\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 - \bar{e}_4$.

3. Найти косинус угла между векторами
1) $\bar{x} = \bar{e}_1\sqrt{7} + \bar{e}_2\sqrt{5} + \bar{e}_3 + \bar{e}_4$; $\bar{y} = \bar{e}_1\sqrt{7} + \bar{e}_2\sqrt{5}$;
2) $\bar{x} = (0; 4; 12; 6; -5)$; $\bar{y} = (-10; 2; -1; -3.5)$.

4. При каком значении параметра α векторы $\bar{x} = \alpha\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2 - \bar{e}_3 - \alpha\bar{e}_4$ и $\bar{y} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \alpha\bar{e}_3 - \bar{e}_4$ имеют равные длины?

5. При каком значении параметра n векторы $\vec{a} = \{-4; 3; 6; n; -5\}$ и $\vec{x} = \{n; -2; 10; -31; 2\}$ ортогональны.

6. В базисе $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ заданы векторы $\vec{a}_1 = \{3; 5\}$, $\vec{a}_2 = \{1; 2\}$. Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразите вектор $\vec{b} = \{4; 5\}$.

7. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_i\}$:
1) V^3: $\bar{e}_1 = (3; 1; 4)$; $\bar{e}_2 = (5; 2; 1)$; $\bar{e}_3 = (1; 1; 6)$; $\bar{x} = (2; 1; 1)$;
2) V^3: $\bar{e}_1 = (1; 2; 1)$; $\bar{e}_2 = (2; 3; 3)$; $\bar{e}_3 = (3; 7; 1)$; $\bar{x} = (1; 1; 3)$;
3) V^3: $\bar{e}_1 = (1; 2; 4)$; $\bar{e}_2 = (1; -3; -1)$; $\bar{e}_3 = (1; 1; 5)$; $\bar{x} = (1; 4; -1)$

4) V^4: $\bar{e}_1 = (1;1;1;1)$; $\bar{e}_2 = (1;2;1;1)$; $\bar{e}_3 = (1;1;2;1)$;
$\bar{e}_4 = (1;3;2;3)$; $\bar{x} = (3;2;3;1)$.

8. Найти связь между координатами вектора $\bar{x}$ в базисах $\{\bar{e}_i\}$ и $\{\bar{f}_i\}$ пространства V^n:
1) V^3: $\bar{e}_1 = (1;1;1)$; $\bar{e}_2 = (1;1;2)$; $\bar{e}_3 = (1;2;3)$;
$\bar{f}_1 = (2;1;-3)$; $\bar{f}_2 = (3;2;-5)$; $\bar{f}_3 = (1;-1;1)$;
2) V^4: $\bar{e}_1 = (0;1;1;1)$; $\bar{e}_2 = (1;0;1;1)$; $\bar{e}_3 = (1;1;0;1)$;
$\bar{e}_4 = (1;1;1;0)$;
$\bar{f}_1 = (1;1;1;1)$; $\bar{f}_2 = (1;2;1;1)$; $\bar{f}_3 = (1;1;2;1)$; $\bar{f}_4 = (1;3;2;3)$.

9. Исследовать на линейную зависимость (независимость) системы векторов:
1) $\bar{x}_1 = (1;1;1;1)$; $\bar{x}_2 = (1;-1;-1;1)$; $\bar{x}_3 = (1;-1;1;-1)$;
$\bar{x}_4 = (1;1;-1;-1)$;
2) $\bar{x}_1 = (4;-5;2;6)$; $\bar{x}_2 = (2;-2;1;3)$; $\bar{x}_3 = (6;-3;3;9)$;
$\bar{x}_4 = (4;-1;5;6)$;
3) $\bar{x}_1 = (1;-1;0;0)$; $\bar{x}_2 = (0;1;-1;0)$; $\bar{x}_3 = (1;0;-1;1)$;
$\bar{x}_4 = (0;0;0;1)$; $\bar{x}_5 = (3;-5;2;-3)$.

10. Найти ранг данной системы векторов и какой-нибудь базис:
1) $\bar{a}_1 = (5;2;-3;1)$; $\bar{a}_2 = (4;1;-2;3)$; $\bar{a}_3 = (1;1;-1;-2)$;
$\bar{a}_4 = (3;4;-1;2)$;
2) $\bar{a}_1 = (2;-1;3;5)$; $\bar{a}_2 = (4;-3;1;3)$; $\bar{a}_3 = (3;-2;3;4)$;
$\bar{a}_4 = (4;-1;15;17)$; $\bar{a}_5 = (7;-6;-7;0)$;
3) $\bar{a}_1 = (1;2;3;-4)$; $\bar{a}_2 = (2;3;-4;1)$; $\bar{a}_3 = (2;-5;8;-3)$;
$\bar{a}_4 = (5;26;-9;-12)$; $\bar{a}_5 = (3;-4;1;2)$.

11. Найти все значения λ, при которых вектор $\bar{x}$ линейно выражается через векторы $\{\bar{a}_i\}$:
1) $\bar{a}_1 = (2;3;5)$; $\bar{a}_2 = (3;7;8)$; $\bar{a}_3 = (1;-6;1)$; $\bar{x} = (7;-2;\lambda)$;
2) $\bar{a}_1 = (3;2;5)$; $\bar{a}_2 = (2;4;7)$; $\bar{a}_3 = (5;6;\lambda)$; $\bar{x} = (1;3;5)$;
3) $\bar{a}_1 = (3;2;6)$; $\bar{a}_2 = (7;3;9)$; $\bar{a}_3 = (5;1;3)$; $\bar{x} = (\lambda;2;5)$.

12. Найти нормированный вектор $\bar{a}$, ортогональный векторам

$\bar{x} = 3\overline{e_1} - \overline{e_2} - \overline{e_3} - \overline{e_4}$; $\bar{y} = \overline{e_1} - 3\overline{e_2} + \overline{e_3} + \overline{e_4}$; $\bar{z} = \overline{e_1} + \overline{e_2} - 3\overline{e_3} + \overline{e_4}$.

13. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки данной системы векторов:

1) $\bar{a}_1 = (1; 1; 1)$; $\bar{a}_2 = (2; 1; 0)$;

2) $\bar{a}_1 = (1; -1; 1; -1)$; $\bar{a}_2 = (3; 0; -1; 1)$; $\bar{a}_3 = (1; 0; 1; 1)$.

14. Установить, что следующие векторы ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

1) $\bar{a}_1 = (2; 1-; 1; 0)$; $\bar{a}_2 = (1; 1; -1; 1)$;

2) $\bar{a}_1 = (-1; 0-; 2; 1)$; $\bar{a}_2 = (1; 1; 1; -1)$.

15. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированного базиса:

1) $\bar{a}_1 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right)$; $\bar{a}_2 = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

2) $\bar{a}_1 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\bar{a}_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

16. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{e_i'}\}$, если он задан в базисе $\{\overline{e_i}\}$;

1) $\bar{x} = (1; 2; 4)$;
$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3; \\ \overline{e_2'} = \frac{3}{2}\bar{e}_1 - \bar{e}_2; \\ \overline{e_3'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

2) $\bar{x} = (10; 5; 1)$;
$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \frac{6}{5}\bar{e}_3; \\ \overline{e_2'} = 6\bar{e}_1 - \bar{e}_2; \\ \overline{e_3'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

3) $\bar{x} = (1; 4; -8)$;
$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3; \\ \overline{e_2'} = \frac{3}{4}\bar{e}_1 - \bar{e}_2; \\ \overline{e_3'} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \end{cases}$$

17. В пространстве R^4 заданы векторы $\{\overline{e_i}\}$. Показать, что эти векторы образуют базис. Найти матрицу перехода от канонического базиса к данному и координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе:

1) $\bar{e}_1 = (1; 1; 0)$; $\bar{e}_2 = (0; 1; 1)$; $\bar{e}_3 = (1; 0; 1)$; $\bar{x} = (-1; 2; 1)$;

2) $\bar{e}_1 = (1; 1; 1)$; $\bar{e}_2 = (1; 1; 2)$; $\bar{e}_3 = (1; 2; 3)$; $\bar{x} = (6; 9; 14)$;

3) $\bar{e}_1 = (2; 1; -3)$; $\bar{e}_2 = (3; 2; -5)$; $\bar{e}_3 = (1; -1; 1)$; $\bar{x} = (6; 2; -7)$;

4) $\bar{e}_1 = (1; 2; -1; -2)$; $\bar{e}_2 = (2; 3; 0; -1)$; $\bar{e}_3 = (1; 2; 1; 4)$;
$\bar{e}_4 = (13 - 10)$; $\bar{x} = (7; 14; -1; 2)$

18. Составить матрицу перехода от базиса $\{\overline{e_i}\}$ к базису $\{\overline{e_i'}\}$:

1) $\bar{e}_1 = (1; 2; 1)$; $\bar{e}_2 = (2; 3; 3)$; $\bar{e}_3 = (3; 7; 1)$;

$\bar{e}_1{}' = (3; 1; 1)$; $\bar{e}_1{}' = (5; 2; 1)$; $\bar{e}_1{}' = (1; 1; -6)$;

2) $\bar{e}_1 = (1; 1; 1; 1)$; $\bar{e}_2 = (1; 2; 1; 1)$; $\bar{e}_3 = (1; 1; 2; 1)$; $\bar{e}_4 = (1; 3; 2; 3)$;

$\bar{e}_1{}' = (1; 0; 3; 3)$; $\bar{e}_2{}' = (-2; -3; -5; -4)$; $\bar{e}_3{}' = (2; 2; 5; 4)$;

$\bar{e}_4{}' = (-2; -3; -4; -4)$.