Решение типового варианта повышенной сложности:

1. Выполните указанные действия:

$$(AB)^T + C^2; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем проводить вычисления по действиям: $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = (AB)_{3\times 3}$;

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 4 + 5\cdot 1 & 1\cdot 5 + 5\cdot 3 & -1\cdot 8 - 5\cdot 1 \\ -2\cdot 4 - 3\cdot 1 & 2\cdot 5 - 3\cdot 3 & -2\cdot 8 + 3\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot 1 & -3\cdot 5 + 4\cdot 3 & 3\cdot 8 - 4\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix};$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 16 \\ 20 & 1 & -3 \\ -13 & -13 & 20 \end{pmatrix};$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 3\cdot 4 - 4\cdot 3 & 0\cdot 3 + 3\cdot 0 + 4\cdot 4 & 0\cdot(-4) + 3\cdot 3 - 4\cdot 0 \\ -4\cdot 0 - 0\cdot 4 + 3\cdot 3 & -4\cdot 3 + 0\cdot 0 - 3\cdot 4 & 4\cdot 4 + 0\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 3\cdot 0 + 4\cdot 4 + 0\cdot 3 & 3\cdot 3 - 4\cdot 0 - 0\cdot 4 & -3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 16 & 9 \\ 9 & -24 & 16 \\ 16 & 9 & -24 \end{pmatrix};$$

$$(AB)^T + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 16 \\ 20 & 1 & -3 \\ -13 & -13 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 16 & 9 \\ 9 & -24 & 16 \\ 16 & 9 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-24 & -11+16 & 16+9 \\ 20+9 & 1-24 & -3+16 \\ -13+16 & -13+9 & 20-24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -23 & 5 & 25 \\ 29 & -23 & 13 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(AB)^T + C^2 = \begin{pmatrix} -23 & 5 & 25 \\ 29 & -23 & 13 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Найдите значение матричного многочлена *f(A)*:

$$f(x) = -4x + 58x^{-1} - 3x^2; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем составляющие элементы нашего многочлена:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 40 - 18 - 0 - 0 - 0 = -58; \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = +\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24; \ A_{12}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -18; \ A_{13}^T = +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20; \ A_{22}^T = +\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -15; \ A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31}^T = +\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 6\end{vmatrix} = 6;\quad A_{32}^T = -\begin{vmatrix}0 & -5\\ 2 & 6\end{vmatrix} = -10;\quad A_{33}^T = +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot A^* = \frac{1}{-58}\begin{pmatrix}-24 & -18 & 8\\ -20 & -15 & -3\\ 6 & -10 & -2\end{pmatrix} = \frac{1}{58}\begin{pmatrix}24 & 18 & -8\\ 20 & 15 & 3\\ -6 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 4\\ -5 & 6 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 4\\ -5 & 6 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 5 & 0\cdot 2 + 2\cdot 0 - 3\cdot 6 & 0\cdot(-3) + 2\cdot 4 + 3\cdot 0\\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 - 4\cdot 5 & 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 4\cdot 6 & -1\cdot 3 + 0\cdot 4 + 4\cdot 0\\ -5\cdot 0 + 6\cdot 1 - 0\cdot 5 & -5\cdot 2 + 6\cdot 0 + 0\cdot 6 & 5\cdot 3 + 6\cdot 4 + 0\cdot 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0+2+15 & 0+0-18 & 0+8+0\\ 0+0-20 & 2+0+24 & -3+0+0\\ 0+6+0 & -10+0+0 & 15+24+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & -18 & 8\\ -20 & 26 & -3\\ 6 & -10 & 39\end{pmatrix};$$

$$f(A) = -4A + 58A^{-1} - 3A^2 = \begin{pmatrix}0 & -8 & 12\\ -4 & 0 & -16\\ 20 & -24 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}24 & 18 & -8\\ 20 & 15 & 3\\ -6 & 10 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-51 & 54 & -24\\ 60 & -78 & 9\\ -18 & 30 & -117\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0+24-51 & -8+18+54 & 12-8-24\\ -4+20+60 & 0+15-78 & -16+3+9\\ 20-6-18 & -24+10+30 & 0+2-117\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27 & 64 & -20\\ 76 & -63 & -4\\ -4 & 16 & -115\end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix}27 & 64 & -20\\ 76 & -63 & -4\\ -4 & 16 & -115\end{pmatrix}.$

3. Решите уравнение или неравенство:

$$\begin{vmatrix}2 & 3-x & -2\\ 1 & -1 & 2-x\\ 4-x & 1 & -1\end{vmatrix} \le 0.$$

Левая часть данного матричного уравнения представляет собой определитель третьего порядка, поэтому раскроем определитель, например, по правилу треугольников.

$$2 - 2 + (3-x)(2-x)(4-x) - 2(4-x) + (3-x) - 2(2-x) \le 0;$$

$$(3-x)(x^2 - 6x + 8 + 1) - 2(4 - x + 2 - x) \le 0;\quad \times(-1)$$

$$(x-3)(x-3)^2 - 4(x-3) \ge 0;$$

$$(x-3)((x-3)^2 - 4) \ge 0;$$

$$(x-3)(x-5)(x-1) \ge 0;$$

Находим значения переменных, для которых сохраняется равенство нулю:$x_1 = 3; x_2 = 5; x_3 = 1$.

Ответ: $x \in [1;3] \cup [5;+\infty]$.

4. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}.$$

В общем виде данное нам матричное уравнение описывается формулой $A\cdot X\cdot B = C$, решение которого можно найти таким образом: $X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$.

Находим матрицы обратные для $A = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix}6 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, используя формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot A^*; \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}; \ A_{ij}^T = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}^T;$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\Delta_B} \cdot B^*; \quad B^* = \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{12}^T \\ B_{21}^T & B_{22}^T \end{pmatrix}; \ B_{ij}^T = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}^T .$$

$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5; \ A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1; \quad A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4; \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot A^* = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_B = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8; \ B^T = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$

$$B_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3; \quad B_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2;$$

$$5B_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5; \quad B_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot 6 = 6.$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\Delta_B} \cdot B^* = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 & -1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 7 & -4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 14 & -6 + 16 \\ 4 + 21 & -24 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A^{-1} \cdot C) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 & -3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ 5 \cdot 3 - 0 \cdot 5 & -5 \cdot 2 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 9 - 10 & -6 + 12 \\ 15 - 0 & -10 + 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix};$$

Ответ: $X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$.

5. Проверьте систему на совместность и решите ее тремя способами:
   - методом Гаусса;
   - матричным методом;
   - методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28; \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1; \\ 5x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 5. \end{cases}$$

Проверим систему уравнений на совместность по теореме Кронекера-Капелли, то есть покажем, что ранг матрицы из коэффициентов (A) равен рангу расширенной матрицы $(A|B)$:

$$r(A) = r(A|B).$$

Найдем ранг каждой матрицы, приводя каждую к ступенчатому (треугольному) виду, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$r(A|B) = r \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 5 & 9 & -8 & 5 \end{array} \right) \ominus$$

Перечислим элементарные преобразования, которые позволят нам привести расширенную матрицу к ступенчатому виду:

- получаем нулевые элементы в первом столбце второй и третьей строк:
$$(I)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+(II)=(II)_{\text{н}};$$
$$(I)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+(III)=(III)_{\text{н}}.$$
- получаем нулевой элемент во втором столбце третьей строки:
$$(II)\cdot\left(-\frac{38}{34}\right)+(III)=(III)_{\text{н}}.$$
- Заметим, что элементы последней строки кратны числу 776, поэтому сократим элементы этой строки на указанное число:
$$(III)\cdot\frac{1}{776}=(III)_{\text{н}}$$

Выполнение указанных действий предлагаем читателю провести самостоятельно. Результаты вычислений позволяют нам сделать следующие записи:

$$\ominus\, r\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & 9 & 28\\ 0 & 34 & -75 & -198\\ 0 & 38 & -61 & -130\end{array}\right)=r\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & 9 & 28\\ 0 & 34 & -75 & -198\\ 0 & 0 & 776 & 3104\end{array}\right)=r\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & 9 & 28\\ 0 & 34 & -75 & -198\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right).$$

По виду последней матрицы, имеющей ступенчатый вид, мы можем определить ранг матриц (A) и $(A|B)$. Получаем, что:

$$r(A)=r(A|B)=3.$$

Так как ранги этих матриц равны, то система линейных уравнений совместна, то есть имеет решение, причем это решение будет единственным, потому что количество уравнений (m), количество переменных (n) и ранг системы уравнений (r) совпадают: $n=m=r=3$.

Найдем решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Суть метода состоит в последовательном исключении переменных, то есть первая переменная исключается из каждого уравнения, кроме первого, вторая переменная – из всех уравнений, кроме второго и так далее. Прямой ход метода Гаусса приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Обратный ход позволяет найти значения всех переменных, начиная с последней.

В нашем случае, расширенная матрица системы уже приведена к ступенчатому виду (при определении ранга), поэтому воспользуемся результатом. Перейдем от последней матрицы к системе уравнений:

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+9x_3=28;\\ 34x_2-75x_3=-198;\\ x_3=4.\end{cases}$$

На этом месте прямой ход метода Гаусса закончен. Находим значения переменных, входящих в систему, используя обратный ход. Из последнего уравнения находим значение последней переменной, это значение подставляем в предпоследнее уравнение и определяем значение предпоследней переменной и т.д.

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+9x_3=28;\\ 34x_2-75\cdot 4=-198;\\ x_3=4\end{cases}\quad\begin{cases}2x_1-4\cdot 3+9\cdot 4=28;\\ x_2=3;\\ x_3=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=2;\\ x_2=3;\\ x_3=4.\end{cases}$$

Ответ: $X=(2;3;4)$.

Найдем решение системы линейных уравнений матричным методом. Для этого запишем систему линейных уравнений в виде матричного уравнения: $A\cdot X=B,$ где A – матрица системы, т.е. матрица из коэффициентов, B – столбец свободных членов. Решение такого матричного уравнения ищем в виде: $X = A^{-1} \cdot B$.

Ищем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -8 \end{vmatrix} = -48 + 120 + 567 - 135 + 108 - 224 = 388;$$

Транспонируем исходную матрицу и находим алгебраические дополнения этой матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 9 \\ 9 & -6 & -8 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = +\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 30;\ A_{12}^T = -\begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 49;\ A_{13}^T = +\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 26;\ A_{22}^T = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = -61;\ A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 75;$$

$$A_{31}^T = +\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 48;\ A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -38;\ A_{33}^T = +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 34.$$

Составляем присоединенную, а затем и обратную матрицы:

$$A^* = \begin{pmatrix} 30 & 49 & -3 \\ 26 & -61 & 75 \\ 48 & -38 & 34 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{388} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 49 & -3 \\ 26 & -61 & 75 \\ 48 & -38 & 34 \end{pmatrix}.$$

Далее находим решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{388} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 49 & -3 \\ 26 & -61 & 75 \\ 48 & -38 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{388} \cdot \begin{pmatrix} 30 \cdot 28 - 49 \cdot 1 - 3 \cdot 5 \\ 26 \cdot 28 + 61 \cdot 1 + 75 \cdot 5 \\ 48 \cdot 28 + 38 \cdot 1 + 34 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{388} \cdot \begin{pmatrix} 776 \\ 1164 \\ 1552 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = (2; 3; 4)$.

Найдем решение системы линейных уравнений методом Крамера, то есть с применением формул: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,3;$ Δ - определитель матрицы из коэффициентов; Δ_i – определитель, получаемый из Δ, заменой i – го столбца на столбец свободных членов. В нашем случае:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -8 \end{vmatrix} = -48 + 120 + 567 - 135 + 108 - 224 = 388;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 28 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -8 \end{vmatrix} = -672 + 120 - 81 - 135 + 32 + 1512 = 776;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 9 \\ 7 & -1 & -6 \\ 5 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 840 + 315 + 45 + 60 + 1568 = 1164;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 28 \\ 7 & 3 & -1 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1764 + 20 - 420 + 18 + 140 = 1552;$$

Находим значения всех переменных по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{776}{388} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1164}{388} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1552}{388} = 4.$$

Ответ: $X = (2; 3; 4)$.

6. Найдите решение однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$$

Нам дана однородная система линейных уравнений причем количество переменных больше числа уравнений. Определим ранг матрицы системы, чтобы найти количество базисных переменных. Для этого выпишем матрицу из коэффициентов и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

1. Поменяем местами первую и третью строки: $(I) \leftrightarrow (III)$;
2. Получим нулевые элементы в первом столбце во второй и третьей строках:

$$(I) \cdot (-6) + (II) = (II_{\text{н}});$$

$$(I) \cdot (-7) + (III) = (III_{\text{н}}).$$

Выполним указанные действия:

$$+\begin{array}{ccccc} -6 & -6 & 6 & 12 & 18 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \end{array}; \qquad +\begin{array}{ccccc} -7 & -7 & 7 & 14 & 21 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \end{array}.$$

3. Получим нулевой элемент в третьей строке второго столбца:

$$(II) \cdot (-1) + (III) = (III_{\text{н}}).$$

Выполним указанные действия:

$$+\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & -4 & -16 & -25 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

В результате процесс нахождения ранга примет вид:

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Так как ранг матрицы из коэффициентов равен двум, то базисных переменных тоже две, а свободных $n - r = 5 - 2 = 3$. В качестве базисных переменных выбираем x_1, x_2, так как определитель из коэффициентов при этих переменных отличен то нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3 \neq 0; \text{то есть } M_2 - \text{базисный минор.}$$

Соответственно переменные x_3, x_4, x_5 — свободные, которым можно придавать произвольные значения, поэтому $x_1 = C_1;\ x_2 = C_2;\ x_3 = C_3$. Составляем укороченную систему уравнений, заменяя свободные переменные на константы и перенося их в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = C_1 + 2C_2 + 3C_3; \\ -3x_2 = -4C_1 - 16C_2 - 25C_3; \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет единственное решение. Найдем его:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{4}{3}C_1 + \frac{16}{3}C_2 + \frac{25}{3}C_3; \\ x_1 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 - x_2 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 - \frac{4}{3}C_1 - \frac{16}{3}C_2 - \frac{25}{3}C_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}C_1 - \frac{10}{3}C_2 - \frac{16}{3}C_3; \\ x_2 = \frac{4}{3}C_1 + \frac{16}{3}C_2 + \frac{25}{3}C_3. \end{cases}$$

Таким образом мы можем составить общее решение данной однородной системы уравнений.
Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}C_1 - \frac{10}{3}C_2 - \frac{16}{3}C_3; \\ x_2 = \frac{4}{3}C_1 + \frac{16}{3}C_2 + \frac{25}{3}C_3; \\ x_1 = C_1; \\ x_2 = C_2; \\ x_3 = C_3. \end{cases}$$