Решение типового варианта:

1. Найдите произведение матриц ABC:

$$ABC = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 8 & -9 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как произведение матриц не перестановочно, то найти данное произведение можно двумя способами:

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C.$$

Для определенности воспользуемся вторым равенством, т. е. сначала перемножим матрицы A и B, а затем результат домножим на матрицу C. Определимся с размерами матриц (AB) и $((AB)C)$:

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = (AB)_{2\times 3};$$

$$(AB)_{2\times 3} \cdot C_{3\times 2} = \big((AB)C\big)_{2\times 2}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 8 & -9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 - 3\cdot 5 + 7\cdot 8 & 4\cdot 4 + 3\cdot 2 - 7\cdot 9 & -4\cdot 1 - 3\cdot 1 - 7\cdot 5 \\ 2\cdot 3 - 5\cdot 5 + 6\cdot 8 & 2\cdot 4 + 5\cdot 2 - 6\cdot 9 & -2\cdot 1 - 5\cdot 1 - 6\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 - 15 + 56 & 16 + 6 - 63 & -4 - 3 - 35 \\ 6 - 25 + 48 & 8 + 10 - 54 & -2 - 5 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & -41 & -42 \\ 29 & -36 & -37 \end{pmatrix},$$

$$(AB) \cdot C = \begin{pmatrix} 53 & -41 & -42 \\ 29 & -36 & -37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53\cdot 3 - 41\cdot 4 + 42\cdot 5 & 53\cdot 2 - 41\cdot 1 - 42\cdot 1 \\ 29\cdot 3 - 36\cdot 4 + 37\cdot 5 & 29\cdot 2 - 36\cdot 1 - 37\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 159 - 164 + 205 & 106 - 41 - 42 \\ 87 - 144 + 185 & 58 - 36 - 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 23 \\ 128 & -15 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $ABC = \begin{pmatrix} 200 & 23 \\ 128 & -15 \end{pmatrix}$.

2. Найдите значение матричного многочлена *f(A)*:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 5x + 8; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдем значения составляющих элементов данного матричного многочлена:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 4\cdot 6 & -1\cdot 4 - 4\cdot 5 \\ -1\cdot 6 - 5\cdot 6 & 6\cdot 4 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 24 & -4 - 20 \\ -6 - 30 & 24 + 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -24 \\ -36 & 49 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & -24 \\ -36 & 49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25\cdot 1 - 24\cdot 6 & 25\cdot 4 + 24\cdot 5 \\ 36\cdot 1 + 49\cdot 6 & -36\cdot 4 - 49\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -25 - 144 & 100 + 120 \\ 36 + 294 & -144 - 245 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -169 & 220 \\ 330 & -389 \end{pmatrix}.$$

Возвращаемся к исходному многочлену $f(x)$ и находим его значение при $x = A$:

$$f(x) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -169 & 220 \\ 330 & -389 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 25 & -24 \\ -36 & 49 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -338 & 440 \\ 660 & -778 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 225 & -216 \\ -324 & 441 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -30 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -338 + 225 + 5 + 8 & 440 - 216 - 20 + 0 \\ 660 - 324 - 30 + 0 & -778 + 441 + 25 + 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -100 & 204 \\ 306 & -304 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} -100 & 204 \\ 306 & -304 \end{pmatrix}$.

3. Решите уравнение или неравенство:

$$\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 4 \\ 6-x & 2 & 5 \\ 8-x & x-1 & 2 \end{vmatrix} \le -1.$$

Нам дано матричное уравнение, левая часть которого представляет собой определитель третьего порядка. Чтобы решить данное уравнение вычислим определитель, используя правило треугольников:

$$2\cdot 2\cdot 2 + 5\cdot(x-2)\cdot(8-x) + (6-x)\cdot(x-1)\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot(8-x) - 2\cdot(x-2)\cdot(6-x) -$$

$$-5\cdot 2\cdot(x-1) \le -1;$$

$$8 - 5x^2 + 50x - 80 - 4x^2 + 28x - 24 - 64 + 8x + 2x^2 - 16x + 24 - 10x + 10 + 1 \le 0;$$

$$-7x^2 + 60x - 125 \le 0;$$

$$7x^2 - 60x + 125 \ge 0.$$

Далее находим дискриминант, а затем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = (-60)^2 - 4\cdot 7\cdot 125 = 3600 - 3500 = 100 = 10^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \qquad x_1 = \frac{60-10}{2\cdot 7} = \frac{25}{7}; \qquad x_2 = \frac{60+10}{2\cdot 7} = \frac{70}{2\cdot 7} = 5;$$

$$7\cdot\left(x - \frac{25}{7}\right)\cdot(x-5) \ge 0.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{25}{7}; 5\right]$.

4. Решите матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Нам дано матричное уравнение вида $X\cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$. Решение такого уравнения ищется в виде $X = B\cdot A^{-1}$, где A^{-1} - матрица обратная для матрицы A.

Найдем обратную матрицу, используя формулу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot A^*$, где A^*- присоединенная матрица, то есть матрица, состоящая из алгебраических дополнений: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$; $A_{ij}^T = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}^T$, а M_{ij}^T – минор элемента a_{ij}^T.

В нашем случае:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 5\cdot 2 = 12 - 10 = 2;$$

Находим алгебраические дополнения матрицы A^T: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\cdot 4 = 4; \quad A_{12}^T = (-1)^{1+2}\cdot(-2) = 2;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1}\cdot(-5) = 5; \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2}\cdot 3 = 3.$$

Составляем присоединенную матрицу и находим решение данного матричного уравнения: $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, следовательно, обратная матрица согласно формуле примет вид: $A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ -2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 & -2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 7 \cdot 4 - 6 \cdot 5 & 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 + 15 & 2 + 9 \\ -8 + 25 & -4 + 15 \\ 28 - 30 & 14 - 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & 11 \\ 17 & 11 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & 11 \\ 17 & 11 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Проверьте систему на совместность и решите ее тремя способами:

- методом Гаусса;
- матричным методом;
- методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = -8; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -15; \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

Проверим систему уравнений на совместность по теореме Кронекера-Капелли, то есть покажем, что ранг матрицы из коэффициентов (A) равен рангу расширенной матрицы $(A|B)$:

$$r(A) = r(A|B).$$

Найдем ранг каждой матрицы, приводя каждую к ступенчатому (треугольному) виду, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$r(A|B) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 & -15 \\ 1 & -3 & -5 & -9 \end{array}\right) = [\text{поменяем местами (1)и (3) строки}] = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -9 \\ 2 & 1 & -4 & -15 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{array}\right) \ominus$$

Выполним следующие действия, чтобы в первом столбце второй и третьей строк получить равные нулю элементы:

$$(I) \cdot (-2) + (II) = (II)_{\text{н}};$$

$$(I) \cdot (-3) + (III) = (III)_{\text{н}}.$$

А затем во втором столбце третьей строки получим нулевой элемент:

$$(II) \cdot (-15) + (III) \cdot 7 = (III)_{\text{н}}.$$

Приведем вычисления, соответствующие указанным действиям:

$$+\begin{array}{cccc} -2 & 6 & 10 & 18 \\ 2 & 1 & -4 & -15 \\ \hline 0 & 7 & 6 & 3 \end{array}; \quad +\begin{array}{cccc} -3 & 9 & 15 & 27 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \\ \hline 0 & 15 & 16 & 19 \end{array}; \quad +\begin{array}{cccc} 0 & -105 & -90 & -45 \\ 0 & 105 & 112 & 113 \\ \hline 0 & 0 & 22 & 88 \end{array};$$

$$\ominus\, r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 15 & 16 & 19 \end{array}\right) = r\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 22 & 88 \end{array}\right).$$

По виду последней матрицы, имеющей ступенчатый вид, мы можем определить ранг матриц (A) и $(A|B)$. Получаем, что:

$$r(A) = r(A|B) = 3.$$

Так как ранги этих матриц равны, то система линейных уравнений совместна, то есть имеет решение, причем это решение будет единственным, потому что количество уравнений (m), количество переменных (n) и ранг системы уравнений (r) совпадают: $n = m = r = 3$.

Найдем решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Суть метода состоит в последовательном исключении переменных, то есть первая переменная исключается из каждого уравнения, кроме первого, вторая переменная – из всех уравнений, кроме второго и так далее. Прямой ход метода Гаусса приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Обратный ход позволяет найти значения всех переменных, начиная с последней.

В нашем случае, расширенная матрица системы уже приведена к ступенчатому виду (при определении ранга), поэтому воспользуемся результатом. Перейдем от последней матрицы к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -9; \\ 7x_2 + 6x_3 = 3; \\ 22x_3 = 88. \end{cases}$$

На этом месте прямой ход метода Гаусса закончен. Находим значения переменных, входящих в систему, используя обратный ход. Из последнего уравнения находим значение последней переменной, это значение подставляем в предпоследнее уравнение и определяем значение предпоследней переменной и т.д.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -9; \\ 7x_2 + 6x_3 = 3; \\ x_3 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -9; \\ 7x_2 + 6 \cdot 4 = 3; \\ x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 = -9; \\ x_2 = -3; \\ x_3 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = -3; \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $X = (2; -3; 4)$.

Найдем решение системы линейных уравнений матричным методом. Для этого запишем систему линейных уравнений в виде матричного уравнения: $A \cdot X = B$, где A – матрица системы, т.е. матрица из коэффициентов, B – столбец свободных членов. Решение такого матричного уравнения ищем в виде: $X = A^{-1} \cdot B$.

Ищем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 24 - 6 - 1 - 36 + 60 = -22;$$

Транспонируем исходную матрицу и находим алгебраические дополнения этой матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -17; \ A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 27; \ A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -25;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 6; \ A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -16; \ A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 14;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7; \ A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 15; \ A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

Составляем присоединенную, а затем и обратную матрицы:

$$A^* = \begin{pmatrix} -17 & 27 & -25 \\ 6 & -16 & 14 \\ -7 & 15 & -9 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{-22} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 27 & -25 \\ 6 & -16 & 14 \\ -7 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Далее находим решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-22} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 27 & -25 \\ 6 & -16 & 14 \\ -7 & 15 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-22} \cdot \begin{pmatrix} 17 \cdot 8 - 27 \cdot 15 + 25 \cdot 9 \\ -6 \cdot 8 + 16 \cdot 15 - 14 \cdot 9 \\ 7 \cdot 8 - 15 \cdot 15 + 9 \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-22} \cdot \begin{pmatrix} -44 \\ 66 \\ -88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = (2; -3; 4)$.

Найдем решение системы линейных уравнений методом Крамера, то есть с применением формул: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,3;$ Δ - определитель матрицы из коэффициентов; Δ_i – определитель, получаемый из Δ, заменой i – го столбца на столбец свободных членов. В нашем случае:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -22;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 6 & 1 \\ -15 & 1 & -4 \\ -9 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 40 + 216 + 45 + 9 - 450 + 96 = -44;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 2 & -15 & -4 \\ 1 & -9 & -5 \end{vmatrix} = 225 + 32 - 18 + 15 - 80 - 108 = 66;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 2 & 1 & -15 \\ 1 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -27 - 90 + 48 + 8 + 108 - 135 = -88.$$

Находим значения всех переменных по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{66}{-22} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-88}{-22} = 4.$$

Ответ: $X = (2; -3; 4)$.

6. Найдите решение однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\,; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Находим определитель матрицы системы:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 15 + 6 - 20 - 3 + 6 = 0.$$

Так как однородная система линейных уравнений всегда совместна, но в нашем случае $\Delta = 0$, то данная нам однородная система уравнений имеет множество решений. Так как находится минор второго порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$, то $r(A) = 2$. Поэтому мы можем этот минор считать базисным, а соответствующие выбранным коэффициентам переменные – базисными переменными. В нашем случае переменные x_2, x_3 – базисные, соответственно переменная x_1 – свободная. Чтобы найти общее решение системы выразим базисные переменные через свободные.

Выписываем укороченную систему уравнений, соответствующую выбранному базисному минору:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Перепишем эту систему, учитывая, что свободным переменным можно придавать произвольные значения. Поэтому пусть $x_1 = C$, тогда укороченная система примет вид:

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = -2C; \\ 2x_2 - 3x_3 = -3\text{C}. \end{cases}$$

Так как количество уравнений укороченной системы (m), количество переменных укороченной системы (n) и ранг матрицы из коэффициентов равны между собой, $n = m = r = 2$, то укороченная система уравнений имеет единственное решение. Найдем это решение, например, по формулам Крамера: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2C & 2 \\ -3C & -3 \end{vmatrix} = 6C + 6C = 12C; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2C \\ 2 & -3C \end{vmatrix} = 3C + 4C = 7C.$$

Теперь находим значения переменных $x_2; x_{3,}$ используя формулы Крамера:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12C}{-1} = -12C; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7C}{-1} = -7C.$$

Окончательно получаем следующее общее решение исходной системы:

$$x_1 = C; \quad x_2 = -12C; \quad x_3 = -7C.$$

Ответ: $X = (C; -12C; -7C)$.