5. Векторы

5.1 Определение и начальные сведения о векторах

Любые две точки *A*,*B* определяют направленный отрезок, если точка *A* определяет начало, точка *B* – конец отрезка, направление задается от *A* к *B*.

Направленный отрезок называется вектором. Обозначается $\overrightarrow{AB}, \overline{a}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется длинной или модулем вектора, обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектора $\overline{a}, \overline{b}$ называются коллинеарным**и**, если они лежат на одной прямой или принадлежат параллельным прямым, при этом при совпадении направления их называют противоположно направленные $(\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b})$, если направление векторов противоположное, векторы называются сонаправленные $(\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b})$.

Векторы называются равными $\left(\overline{a}=\overline{в}\right)$, если они коллинеарные, одинаково направлены и их длинны равны: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b},\ \left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|$.

Векторы $\overline{a},\ -\overline{a}$ называются противоположными, если они коллинеарные, противоположно направлены и их длины равны:

$$\overline{a}\uparrow\downarrow(-\overline{a}),\ \left|\overline{a}\right|=\left|\overline{-a}\right|.$$

Три вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или ей параллельны.

5.2 Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов. Пусть даны два вектора $\overline{a}, \overline{b}$.

Суммой двух векторов $\overline{a}+\overline{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, который идет из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (рис. 3).

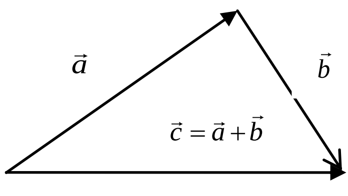

Рис. 3

2. Вычитание векторов. Разностью векторов $\bar{a}-\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c} \Rightarrow \bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$ (рис.4).

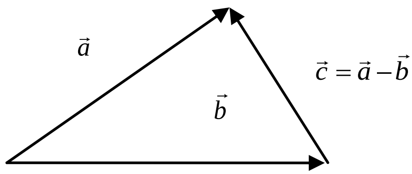

Рис. 4

При вычислении по правилу параллелограмма суммой векторов является диагональ, выходящая из общего начала этих векторов, а разностью векторов является диагональ, не имеющая общего начала с векторами $\bar{a}, \bar{b}$.

3. Умножение вектора на число. Произведением вектора $\bar{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\bar{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину равную $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ и тоже направление, что и вектор $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$ (рис.5).

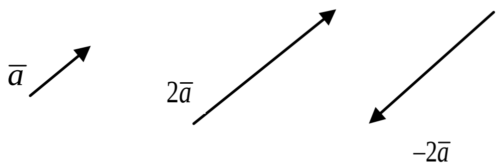

Рис. 5

Вектор, модуль которого равен нулю, называется нулевым или нуль вектором: $\bar{0}$.

Единичным вектором $\bar{a}$, или ортом, называется вектор, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, координаты которого получены делением координат вектора $\bar{a}$ на его длину: $\bar{e}=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Любой вектор можно представить в стандартной форме: $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{e}$.

5.3 Основные свойства линейных операций над векторами

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ - переместительный закон;
2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ - сочетательный закон сложения;
3. $\lambda(\mu\cdot\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$ - сочетательный закон умножения;
4. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ - распределительный закон относительно суммы чисел;
5. $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ - распределительный закон относительно суммы векторов;
6. $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;
7. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.
8. Теорема о коллинеарных векторах. Два ненулевых вектора $\overline{a},\overline{b}$ коллинеарные тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$\overline{b}=k\overline{a}. \tag{26}$$

9. Теорема о компланарных векторах. Три ненулевых вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарные тогда и только тогда, когда они принадлежат одной плоскости или один из них является линейной комбинацией двух других:

$$\overline{c}=k\overline{a}+l\overline{b},\quad k,l \text{ - числа.} \tag{27}$$

Рассмотрим пример. Пусть заданы вектора $\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$. Покажем, что они компланарные:

$$\overline{a}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})+\frac{1}{2}(\overline{a}-\overline{b})=\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}=\overline{a},$$

т.е. вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией двух других векторов.

5.4 Проекция вектора на ось

Пусть задан вектор $\overline{a}$ и некоторая ось l, $\overline{a}=\overline{AB}$. Из начала и конца вектора опустим перпендикуляры на ось, точки пересечения с осью обозначим A', B' (рис. 6).

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется длинна $A'B'$ направленного отрезка $A'B'$ со своим знаком: $A'B'=\pm\left|\overline{A'B'}\right|$, где знак

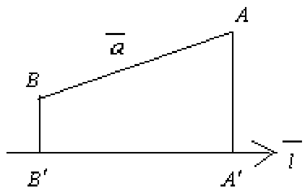

Рис. 6

«$\pm$» зависит от совпадения направления вектора $\overline{AB}$ и оси l или несовпадения.

Теорема. Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна длине вектора $\overline{a}$ умноженной на косинус угла между вектором $\overline{a}$ и осью l:

$$np_l \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi \qquad (28)$$

Следствие 1: проекция вектора на ось: 1) положительная, если угол φ - острый; 2) отрицательная, если угол φ - тупой; 3) равна нулю, если угол.прямой.

Следствие 2: проекции равных векторов на одну и ту же ось, равны:

$$\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow np_l \overline{a} = np_l \overline{b} .$$

Теорема. Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$np_l (\overline{a} + \overline{b}) = np_l \overline{a} + np_l \overline{b}$$

Теорема. При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ, его проекция умножается на это же число, т.е.

$$np_l \lambda \overline{a} = \lambda np_l \overline{a}$$

5.5 Проекции вектора в прямоугольной системе координат

Пусть в пространстве задана система координат $XYZO$ и произвольный вектор $\overline{AB}$.

Проекции X, Y, Z вектора $\overline{AB}$ на оси координат называются его координатами, при этом пишут: $\overline{AB} = \{X, Y, Z\}$.

Теорема 6. Каковы бы ни были точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ координаты вектора $\overline{AB}$ определяются по формулам:

$$X = X_2 - X_1; \quad Y = Y_2 - Y_1; \quad Z = Z_2 - Z_1 \qquad (29)$$

Следствие 1: если $\overline{AB}$ выходит из начала координат, т.е. $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, то координаты $\overline{AB}$ равны координатам его конца;

Следствие 2: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (30)

Следствие 3: Если $\overline{a} = \left\{x_1; y_1; z_1\right\}$ и $\overline{b} = \left\{x_2; y_2; z_2\right\}$, то

$$\overline{a} + \overline{b} = \left\{x_2 + x_1; y_2 + y_1; z_2 + z_1\right\} \qquad (31)$$

Следствие 4: Если $\overline{a} = \left\{x_1; y_1; z_1\right\}$, то $\lambda\overline{a} = \left\{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\right\}$ (32)

Следствие 5: Если $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, то $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1} = \lambda$ (33)

5.6 Направляющиеся косинусы вектора

Пусть дан произвольный вектор $\overline{a} = \left\{x; y; z\right\}$, выходящий из начала координат, не совпадающий с осями координат образующий с ними углы α, β, γ. Найдем длину вектора: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В силу определения проекции вектора на ось получим:

$$X = np_x\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\alpha,$$

$$Y = np_y\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\beta, \qquad (34)$$

$$Z = np_z\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\gamma.$$

Выразим косинусы углов, которые называются направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad (35)$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Основное свойство косинусов: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

5.7 Разложение вектора по базису

Упорядоченная тройка неколлинеарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ называется базисо**м** и любой вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$:

$$\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3, \qquad (36)$$

где x_1, x_2, x_3 - координаты вектора $\overline{a}$ в базисе векторов ($\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$). В прямоугольной системе координат за базис выбирают единичные вектора осей координат: $\bar{i} \uparrow\uparrow OX$, $\bar{j} \uparrow\uparrow OY$, $\bar{k} \uparrow\uparrow OZ$, $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$. Тогда справедлива теорема.

Теорема**.** Любой вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\overline{a} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j} + \gamma\overline{k}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ - числа.} \qquad (37)$$

Такое представление называется разложением по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, а вектор $\overline{a}$ имеет координаты (α, β, γ).

Например, записать разложение вектора $\overline{a} = \{1, 5, -3\}$ по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Вектор будет иметь вид: $\overline{a} = \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

5.8 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}, \overline{b}$ называется число (скаляр) равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi, \qquad (38)$$

или

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a} \qquad (39)$$

Типичным примером скалярного произведения в физике является формула работы $A = F \cdot S\cos\varphi$, где F - сила, точка приложения которой перемещается на расстояние S.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$;
2. $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$;

3. $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$;

4. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$;

5. $\bar{a}\bar{b}=0$, если $\bar{a}\perp\bar{b}$, и, обратно, $\bar{a}\perp\bar{b}$, если $\bar{a}\,\bar{b}=0$.

Скалярное произведение можно находить в координатах. Справедлива теорема: если векторы $\bar{a},\bar{b}$ заданы своими координатами: $\bar{a}=(x_1,\,y_1,\,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,\,y_2,\,z_2)$, то их скалярное произведение определяется формулой:

$$\bar{a}\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{40}$$

Следствие 1: $\bar{a}\perp\bar{b}$, если $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ (41)

Следствие 2: $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ (42)

5.9 Векторное произведение векторов

Тройка векторов называется упорядоченной, если указано, какой из них читается первым, какой второй и т.д.

Упорядоченная тройка векторов называется правой, если послеприведения их к общему началу из конца третьего вектораратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левой (рис.7).

Векторным произведение**м** двух векторов $\bar{a},\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}\times\bar{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. длина $\bar{a}\times\bar{b}$ равна произведению модулей векторов на синус угла между ними:

$$|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi\ ; \tag{43}$$

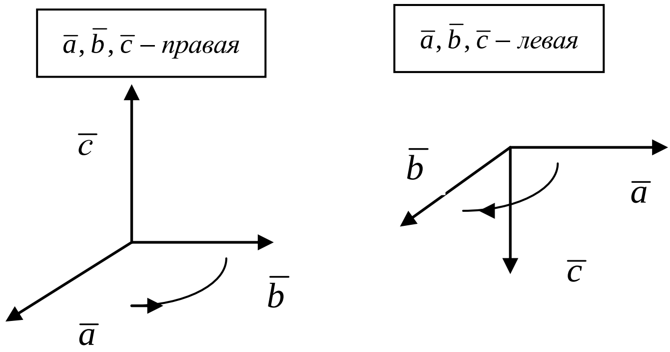

Рис. 7

2. вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\bar{a},\bar{b}$;

3. векторы $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{a}\times\bar{b}$ образуют правую тройку векторов.

Геометрический смысл векторного произведения заключается в том, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

Основные свойства векторного произведения:

1. $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$ (произведение векторов некоммутативно);
2. $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$ (из определения);
3. $\left(\lambda\bar{a}\right)\times\bar{b} = \bar{a}\times\left(\lambda\bar{b}\right) = \lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$, т.е. число можно выносить за знак векторного произведения;
4. $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{c} = \left(\bar{a}\times\bar{c}\right)+\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$;
5. $\bar{a}\times\bar{b} = 0$, если $\bar{a},\bar{b}$ - коллинеарные.

Векторное произведение можно найти в координатах, если векторы заданы в координатной форме. Справедлива теорема: если векторы $\bar{a},\bar{b}$ заданы своими координатами: $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ определяется формулой:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad (44)$$

5.10 Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}\times\bar{c}$:

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=\overline{abc}\ . \qquad (45)$$

Свойства смешанного произведения:

1. $(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$;
2. если векторы компланарные, то $\overline{abc}=0$; (46)
3. $\left|\overline{abc}\right|=V,$ где V - объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;
4. $\frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|=V_{\Delta},$ где V_{Δ} - объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах.

Смешанное произведение в координатной форме можно посчитать, используя теорему: если векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ заданы своими координатами $\bar{a}=\{x_1;y_1;z_1\},\ \bar{b}=\{x_2;y_2;z_2\},\ \bar{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$, то

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (47)$$

5.11 Упражнения

1. По данным векторам $\bar{a},\bar{b}$ построить векторы: 1) $-\bar{a}-\bar{b}$; 2) $\frac{1}{3}\bar{a}-2\bar{b}$; 3) $4\bar{a}+\bar{b}$; 4) $2(\bar{a}+\bar{b})$; 5) $-3\bar{a}+2\bar{b}$; 6) $\frac{3}{4}\cdot(\bar{a}+2\bar{b})-$ $-\frac{1}{4}(\bar{a}-2\bar{b})-\bar{a}-\bar{b}$.

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1D_1C_1$ заданы векторы $\overline{AB}=\bar{a},\ \overline{AD}=\bar{b},\overline{AA_1}=\bar{c}$. Постройте каждый из следующих векторов: 1) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$; 3) $\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$; 4) $\frac{1}{2}\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$; 5) $-\bar{a}-\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$.

3. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AB}=\bar{a},\ \overline{AD}=\bar{b},$ точка M – точка

пересечений диагоналей параллелограмма. Выразить через векторы $\bar{a}, \bar{b}$ векторы $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$.

4. В треугольнике ABC: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$, точка M – середина стороны BC. Выразить через векторы $\bar{a}, \bar{b}$ вектор $\overline{AM}$.

5. В треугольнике ABC: $\overline{AM} = \bar{a}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, точка M – точка пересечения медиан треугольника. Выразить через векторы $\bar{a}, \bar{b}$вектор $\overline{AB}$ *и* $\overline{BC}$.

6. В параллелограмме $ABCD$: $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{AM} = \bar{b}$, точки K *и* M – середины сторон BC *и* CD параллелограмма. Выразить через векторы $\bar{a}, \bar{b}$ векторы $\overline{BD}, \overline{AD}$.

7. В треугольнике ABC точка M – точка пересечения медиан треугольника, $O -$ произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

8. В треугольнике ABC, $\overline{AK}$ *и* $\overline{BM} -$ медианы, причем $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{BM} = \bar{b}$. Выразить векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ через $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$.

9. Векторы $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF} -$ медианы треугольника. Доказать равенство $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \bar{0}$.

10. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\bar{a}, \bar{b}$, чтобы имело место соотношение $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$?

11. Даны два ненулевых вектора $\bar{a}, \bar{b}$. Будут ли коллинеарны векторы $\bar{c}$ *и* $\bar{d}$, если: $\bar{c} = \bar{a} - 2\sqrt{3} \cdot \bar{b}$; $\bar{d} = -\sqrt{3} \cdot \bar{a} + 6\bar{b}$?

12. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{3; -1; 2\}$.

13. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{1; 2; -2\}$ на вектор $\vec{b} = \{1; 1; -1\}$.

14. Найти площадь и углы параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$ и $\vec{b} = \{1; 3; 2\}$.

15. Разложить вектор $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ по трем некомпланарным векторам $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}, \bar{q} = \bar{a} - \bar{b}, \bar{r} = 2\bar{b} + 3\bar{c}$.

16. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами:

$$\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}, \bar{q} = \bar{b} - \bar{c}, \bar{r} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}, \bar{s} = \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}.$$

17. Проверить, являются ли компланарными векторы $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{k} + \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$.

18. Заданы векторы $\vec{a} = \{4; -3; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 3; -2\}$. Найти а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \times \vec{b}$; в) $\vec{b} \times \vec{a}$; г) $3\vec{a} - \vec{b}$.

19. Найти угол между векторами $4\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}=\{2;-1;2\}$, $\vec{b}=\{5;7;0\}$.

20. Разложить вектор $\vec{d}=\{3;11;8\}$ по базису векторов $\vec{a}=\{1;2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;1;1\}$, $\vec{c}=\{1;1;2\}$.

21. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$; $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$.

22. При каком значении n векторы $\vec{a}=3\vec{i}+n\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$ перпендикулярны.

23. Найти модуль векторного произведения векторов $\vec{a}=\{6;7;3\}$, $\vec{b}=\{5;-1;2\}$.

5.12 Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента:

Для векторов $\vec{a}=Ni+Mj+(N+M)k$, $\vec{d}=2i-5j+(N+D)k$, $\vec{c}=Di-Nj+3k$ найти: 1) длины векторов; 2) углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, 3) скалярные произведения для каждой пары векторов, 4) векторные произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и $\vec{b}$, 5) смешанное произведение векторов, 6) площади параллелограммов, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и $\vec{a}$, 7) определить, какую тройку векторов образуют векторы $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$, 8) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{2c}$, $\overrightarrow{3b}$, $\overrightarrow{Na}$, 9) высоту треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{m}=N\vec{a}+2M\vec{b}$, $\vec{n}=D\vec{c}-M\vec{a}$, $\vec{p}=-3\vec{b}+M\vec{c}$, 10) разложить вектор $\vec{q}=\{2N,-6,\ 10\}$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.

5.13 Контрольная работа

Заданы четыре точки $A(M,N,D)$; $B(7,-3,N)$; $C(2,M,-3)$; $D(5,8,12)$. Определить вид треугольника A,B,C, найти его площадь, косинусы внутренних углов, длину медиан AM, CK, объем пирамиды $ABCD$ и ее высоту, опущенную из вершины D. Какими должны быть параметры β и γ, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{s}=(\beta,\ 4,\ \gamma)$ были коллинеарными. Найти единичные вектора для $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$.