3. Решение систем линейных уравнений

3.1 Общие сведения

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{12}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i - свободные члены, x_i – неизвестные.

Если система (12) имеет решение, то она называется совместной. Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

Если система (12) имеет единственной решение, то она называется определенной. Если система имеет множество решений, она называется неопределенной.

Если все свободные члены системы (12) равны нулю, система называется однородной. Такая система всегда совместна, имеет тривиальное решение – нулевое.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

1) матрица коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{2m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

2) матрица неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

3) матрица свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тогда система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A \cdot X = B. \tag{13}$$

Вопрос о совместности системы помогает решить теорема Кронекера-Капелли.

Теорема: Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $rang(A) = rang(A|B)$.

Матрица $(A|B)$ называется расширенной матрицей системы.

Если ранг матрицы *A* равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы *A* меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

При условии $rang(A) < m$ уравнения системы зависимые. При условии $rang(A) = m$ уравнения системы независимые.

Пусть $rang(A) < n.$ Переменные $x_1, x_2, ..., x_r$ называются базисными, основными, если базисный минор (определитель из коэффициентов при этих переменных) не равен нулю. Их число равно $rang(A)$. Число базисных решений меньше числа сочетаний

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} (r < m).$$

Остальные $(n-r)$ неизвестных называются не основными (свободными). Свободным переменным в решении могут присваиваться следующие значения:

1) *C=0* для базисных решений;
2) $C=C_i$ для общего решения;
3) *C* равно строкам единичной матрицы для фундаментального решения.

3.2 Методы решения систем линейных уравнений

1) Метод Крамера.

Теорема Крамера: Пусть Δ - главный определитель системы, состоящий из коэффициентов при неизвестных; Δ_j – определители, полученные из главного, заменой j –того столбца этого определителя столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое равенствами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; (j = 1, 2, ..., n) \tag{14}$$

Формула (14) называется формулой Крамера.

Исследование наличия решения системы:

а) если $\Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение;

б) если $\Delta = 0,$ но хотя бы один из определителей для неизвестных не равен нулю, то система не имеет решения;

в) если $\Delta = 0$ и все определители для неизвестных равны нулю, то система имеет множество решений.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение: найдем главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 26 \cdot$$

Составим определители для неизвестных и вычислим их:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 26; \; \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 26; \; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 26.$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=1;\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=1.$$

Ответ: $x_1=1;\quad x_2=1;\quad x_3=1$.

2) Метод обратных матриц.

Систему линейных уравнений (12) представим в матричной форме:

$$A\cdot X=B.$$

Найдем решение уравнения: $A^{-1}A\cdot X=A^{-1}B;\quad E\cdot X=A^{-1}\cdot B.$

Решение системы можно записать так:

$$X=A^{-1}\cdot B. \tag{15}$$

Пример. Найти решение системы уравнений матричным методом

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=4;\\ x_1-5x_2+3x_3=-1;\\ -3x_1+2x_2-4x_3=-5.\end{cases}$$

Решение: введем матрицы: $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&-5&3\\-3&2&-4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix}.$

Определитель матрицы A уже найден: $\det(A)=26.$ Следовательно, обратная матрица существует.

Найдем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}14&10&4\\-5&-11&-7\\-13&-13&-13\end{pmatrix}.$

Вычислим матрицу X :

$$X = A \cdot B = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 10 & 4 \\ -5 & -11 & -7 \\ -13 & -13 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 56-10-20 \\ -20+11+35 \\ -52+13+65 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 26 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 1.$

3**)** Метод Гаусса.

Метод Гаусса иначе называется методом исключения переменных. Метод основан на преобразовании уравнений с использованием преобразований, называемых гауссовыми.

К преобразования Гаусса относятся следующие действия:

а) можно менять уравнения системы местами;

б) умножать уравнение на любое число, не равное нулю;

в) к любому уравнению, умноженному на число, не равное нулю, можно прибавлять другое уравнение, умноженное на любое число, не равное нулю.

Суть метода Гаусса:

1) в системе выбираем уравнение, в котором имеется неизвестное с ненулевым коэффициентом (лучше выбирать коэффициент 1). Это уравнение объявляем ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению, называем главным.

2) ведущее уравнение ставим на первое место и с помощью преобразований Гаусса исключаем главное неизвестное из остальных уравнений;

3) данную процедуру применяем к следующим уравнениям.

Пример. Найти решение системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде расширенной матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов; используя преобразования Гаусса, приведем матрицу к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/7 & 4/7 \\ 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & -17/7 & -17/7 \end{array}\right)$$

Теперь вычислим неизвестные:

$$x_3=1,\quad x_2=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}x_3=1,\quad x_1=3-3x_2+x_3=1\cdot$$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=1$; $x_3=1$.

В результате исключения неизвестных последнее уравнение может иметь вид:

1) $a^* x_n=b^*$, то система имеет единственное решение;

2) $0\cdot x_n=b^*$, то система не имеет решения;

3) $0\cdot x_n=0$, то система имеет множество решений.

Пример. Найти все базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1; \\ \qquad x_2-x_3+2x_4=2; \\ 2x_1+x_2 \qquad +3x_4=3. \end{cases}$$

Решение. Система имеет три уравнения и четыре неизвестных. Выполним преобразования матрицы коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы коэффициентов $r(A)=r(A/B)=2$. Следовательно, одну строку можно отбросить. Получим систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ \quad\quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

Найдем число базисных решений: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6$.

1) Пусть базисными будут x_1 и x_2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 2 \neq 0$, $x_3 = x_4 = 0$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ \quad\quad x_2 = 2. \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ x_2 = 2 \end{matrix}$.

Тогда первое базисное решение будет иметь вид $\left(-\dfrac{1}{2}; 2; 0; 0\right)$.

2) Пусть базисными будут x_2 и x_3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $x_1 = x_4 = 0$

$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1; \\ x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_2 = \dfrac{3}{2}, \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}$.

Тогда второе базисное решение будет иметь вид $\left(0; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 0\right)$.

3) Пусть базисными будут x_3 и x_4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ $x_1 = x_2 = 0$

$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1; \\ -x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_4 = 1, \\ x_3 = 0 \end{matrix}$

Тогда третье базисное решение будет иметь вид $(0; 0; 0; 1)$.

4) Пусть базисными будут x_1 и x_3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $x_2 = x_4 = 0$

$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1; \\ \quad -x_3 = 2. \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x_3 = -2, \\ x_1 = \dfrac{3}{2} \end{matrix}$

Тогда четвертое базисное решение будет иметь вид $\left(\dfrac{3}{2}; 0; -2; 0\right)$.

5) Пусть базисными будут x_1 и x_4 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 1; \\ \quad 2x_4 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = 1 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

Пятое базисное решение будет иметь вид $(0;0;0;1)$.

6) Пусть базисными будут x_2 и x_4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $x_1 = x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 1; \\ x + 2x_4 = 2. \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

Шестое базисное решение будет иметь вид $(0;0;0;1)$.

Ответ: получили шесть базисных решений:

$\left(-\frac{1}{2};2;0;0\right)$, $\left(0;-\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$, $(0;0;0;1)$, $\left(\frac{3}{2};0;-2;0\right)$, $(0;0;0;1)$, $(0;0;0;1)$.

3.3 Решение систем однородных линейных уравнений

Система из m линейных уравнений с n неизвестными при нулевых свободных членах называется однородной

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Система (16) всегда совместна, она имеет тривиальное решение $(0,0,\ldots 0)$.

Система (16) имеет нетривиальное решение, если

1) $m < n;$
2) $m = n, \Delta A = 0.$

Эти условия аналогичны выполнению условия $rangA < n.$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – решение системы уравнений (16). Запишем это решение в виде строки $e = \left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$.

Свойства решений:

1. если строка $e = \left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$ - решение системы (16), то

$\lambda e = \left(\lambda x_1^0; \lambda x_2^0; ...; \lambda x_n^0\right)$ является решением этой системы, λ - некоторое число, неравное нулю;

2. если $e = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ и $e_1 = \left(x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*\right)$ решения системы (16), то при любых C_1 и C_2 их комбинация тоже является решением системы:

$$C_1 e + C_2 e_1 = \left(C_1 x_1^0 + C_2 x_1^*; C_1 x_2^0 + C_2 x_2^*; ...; C_1 x_n^0 + C_2 x_n^*\right).$$

Выражение $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ называется линейной комбинацией решений системы.

Если $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ одновременно не равные нулю, то строки (решения) $e_1, e_2, ..., e_n$ называются линейно зависимыми.

Если $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0$ только при $\lambda_i = 0$, то решение $e_1, e_2, ..., e_m$ называются линейно независимыми.

Система линейно независимых решений $e_1, e_2, ..., e_k$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (16) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, ..., e_k$.

Если $rangA < r$, то фундаментальная система решений (16) состоит из $(n - r)$ решений.

Общее решение системы (16) имеет вид:

$$C_1 e_1 + C_2 e_2 + ... + C_k e_k,\ e_1, e_2, ..., e_k. \tag{17}$$

Такое решение называется фундаментальной системой решений, где C_1, C_2, ..., $C_к$ - производные числа $(k = n - r)$.

Пример. Решить систему уравнений и найти фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & -9 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг $rangA = 2$. Следовательно, за базисный минор можно взять любой минор второго порядка.

1) Пусть базисный минор состоит из коэффициентов переменных

$$x_3; x_4 : \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2 .$$

$x_3; x_4$ - основные переменные; $x_1; x_2$ – неосновные переменные. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ \qquad\qquad 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases} \qquad k = 4 - 2 = 2.$$

Для получения фундаментального решения e_1, e_2 поочередно заменяем неосновные переменные $x_1; x_2$ элементами строк единичной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $x_1 = 1; x_2 = 0$ $\quad \begin{cases} 1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ \quad 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases} \quad e_1 = (1, 0, -3, 2)$

2) $x_1 = 0; x_2 = 1$ $\quad \begin{cases} 1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ \quad 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_3 = -3. \end{cases} \quad e_2 = (0, 1, -3, 2)$

Ответ: фундаментальная система решений $\begin{cases} e_1 = (0; 1; -3; 2), \\ e_2 = (1; 0; = 3; 2). \end{cases}$

3.4 Упражнения

1. Решить системы уравнений методами Крамера и обратной матрицы:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 8; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + x_3 = 4; \\ 6x_1 + x_2 - 5x_3 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 7; \\ -3x_1 + x_2 - 7x_3 = -11; \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 15. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ 2x_1 + 8x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 10; \\ 4x_1 + x_2 - 14x_3 = 20; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$

2. Решить системы уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -5; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 27; \\ -3x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 27; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 =; 6; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8; \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 11; \\ 8x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 31. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_3 - 4x_4 = 15; \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 20; \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 17. \end{cases}$

3. Найти фундаментальную систему решений:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 7x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 = 0; \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

4. Найти все базисные решения системы уравнений

1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2; \\ x_1 + 13x_2 - 6x_3 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 = 7; \\ 4x_1 - 2x_3 + x_4 = 5; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 12; \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 9. \end{cases}$

5. При каком параметре λ прямые пересекаются в одной точке:

1) $2x - 3y = 6,\ 3x + \lambda y = 9,\ \lambda x + 4y = 3;$

2) $2x - \lambda y = 6,\ x + \lambda y = 4,\ x - 5y = 5.$

В обоих случаях построить эти прямые.

3.5 Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента:

1) Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} Nx_1 - Mx_2 + Dx_3 = N + M; \\ -Mx_1 + 4x_2 - Nx_3 = 4D; \\ (2+M)x_1 + 5x_2 - (3-N)x_3 = 3M. \end{cases}$ б) $\begin{cases} Dx_1 - 2Nx_2 = M; \\ Mx_1 + 3Nx_2 = D. \end{cases}$

2) Решить систему методом обратной матрицы:

а) $\begin{cases} (M-4)x_1 + 2x_2 + Nx_3 = 2D; \\ (M+2)x_1 + Nx_2 + Mx_3 = -D; \\ Mx_1 + Nx_2 - 3Dx_3 = -NM. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (N+2M)x_1 + Dx_2 = 5N; \\ MDx_1 - 2Nx_2 = DN. \end{cases}$

3) Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases} Nx_1 + Mx_2 + Dx_3 - x_4 = 6M; \\ x_1 - 2Nx_2 - Dx_3 - Mx_4 = -6; \\ Mx_1 + Nx_2 + x_3 + Dx_4 = 10; \\ Dx_1 + x_2 - Mx_3 + Nx_4 = D. \end{cases}$ б) $\begin{cases} Dx_1 + (M+N)x_2 + 3x_3 - x_5 = 0; \\ Mx_1 + Nx_2 + Dx_4 - (M+D)x_5 = 0; \\ -Mx_1 + x_3 + Nx_4 + Dx_5 = 0; \\ x_1 + Mx_2 - Dx_3 + (2+N)x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.6 Контрольная работа

1. Решить систему уравнений тремя способами:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + (3+2M)x_3 = 2M + 1; \\ (2-N)x_1 + Dx_2 + 2x_3 = -N + D; \\ x_1 + x_2 - 3Dx_3 = -3D - 2. \end{cases}$$

2. Решить систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + Nx_2 + x_3 - Dx_4 = 0; \\ Nx_1 - 2Mx_2 - x_3 - 4x_4 = 0; \\ Mx_1 + Nx_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ Dx_1 + x_2 - Mx_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Определить сколько решений имеет система уравнений при определенных значениях параметра λ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - Nx_4 = M; \\ Nx_1 + 3x_2 + Dx_3 - 3x_4 = \lambda; \\ x_1 + Nx_2 + Mx_3 + x_4 = 3; \\ Mx_1 + Dx_2 - x_3 + 2x_4 = D. \end{cases}$$