4. Использование матриц, определителей и систем уравнений в экономике

4.1 Использование матриц в экономике

Пусть некоторое предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3 и использует для этого три вида сырья S_1, S_2, S_3. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции заданы таблицей. В ней же указаны план выпуска каждой продукции и стоимость единицы каждого типа сырья (в руб., табл.1).

Таблица 1

сырье / продукция	S_1	S_2	S_3	План выпуска
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	C_3
Стоимость ед. сырья	b_1	b_2	b_3	

Пусть матрица A – матрица нормы расхода сырья на производство продукции $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Матрица $C = (C_1\ C_2\ C_3)$ - матрица плана выпуска продукции.

Матрица $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ - матрица стоимости единицы каждого вида сырья. Используя матричное исчисление, можно найти:

1) матрицу затрат сырья $S_{13} = C_{13} \cdot A_{33}$,
2) общую стоимость сырья $Q_{11} = S_{13} \cdot B_{13}^T$,
3) матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции $R_{31} = A_{33} \cdot B_{31}$.

Пусть известны данные о дневной производительности двух предприятий, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также время работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья (табл. 2).

Таблица 2

продукция	производительность		затраты сырья			план выпуска продукции
	I предпр.	II предпр.	S_1	S_2	S_3	
P_1	P_{11}	P_{12}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	C_1
P_2	P_{21}	P_{22}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	C_2
P_3	P_{31}	P_{32}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	C_3
	кол-во рабочих дней		цена вида сырья			
	t_1	t_2	b_1	b_2	b_3	
			стоимость доставки сырья			
			d_1	d_2	d_3	

Можно найти:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий; составим матрицу производительности предприятий по каждому виду продукции:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}, \qquad \Pi_{год} = \begin{pmatrix} t_1 p_{11} & t_2 p_{12} \\ t_1 p_{21} & t_2 p_{22} \\ t_1 p_{31} & t_2 p_{32} \end{pmatrix};$$

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья.

Введем матрицу затрат на единицу продукции:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Дневной расход по типам сырья на предприятиях найдем как произведение матрицы затрат на матрицу производительности: $S = A \cdot \Pi$.

Годовая потребность сырья каждым предприятием найдется как $S_{год} = A \cdot \Pi_{год}$;

3) годовую сумму необходимого кредитования каждого предприятия для закупки сырья.

Суммы кредитования предприятий для закупки сырья можно определить как компоненты матрицы стоимости общего годового запаса сырья для каждого предприятия $P = C \cdot S_{год}$.

4.2 Использование систем линейных уравнений

Задачи о прогнозе выпуска продукции по запасам сырья. Пусть некоторое предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3 и использует для этого три вида сырья S_1, S_2, S_3. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции заданы таблицей. В ней же указаны запасы каждого типа сырья (табл.3) .

Таблица 3

сырье / продукция	S_1	S_2	S_3
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
Общий запас сырья	b_1	b_2	b_3

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица норм расхода сырья S_j

каждым предприятием на производство i – продукции P_i, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ – матрица запасов сырья S_j.

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Пусть x_1, x_2, x_3 - объемы выпуска продукции. Тогда при условии полного расходования запасов каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения (уравнения):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_2; \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

4.3 Многоотраслевая экономика

Многоотраслевое хозяйство требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль является и потребителем, и производителем. Возникает непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида.

Впервые эта проблема была выдвинута в 1936 году в трудах американского экономиста В.В. Леонтьева (Василий Васильевич Леонтьев, выходец из России, лауреат Нобелевской премии (1906-1999)). Известна как математическая модель Леонтьева. Модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа. Метод «выпуск-затраты» широко применяется в практике прогнозирования и программирования экономики.

4.4 Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)

Пусть имеется n отраслей экономики, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутренние нужды отраслей и потребление продукции другими отраслями, часть продукции предназначена для личного и общественного потребления (вне сферы материального производства).

Пусть x_i - общий (валовой) объем продукции *i*-ой отрасли $(i=1,2,...,n)$, x_{ij} - объем продукции *i*-ой отрасли, потребляемой *j*-ой отраслью в процессе производства $(i, j=1,2,...,n)$, y_i - объем конечного продукта *i*-ой отрасли для непроизводственного потребления. Тогда валовой объем продукции *i*-отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad (i=1,2,...,n) \tag{18}$$

Уравнение (18) называется соотношениями баланса.

Если все величины уравнения (18) имеют стоимостное выражение, то уравнения (18) называют стоимостный межотраслевой баланс.

Назовем коэффициентами прямых затрат продукции *i*-отрасли на производство единицы продукции *j*-отрасли выражение:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ (i, j=1,2,...,n) \tag{19}$$

Если предположить, что в течение некоторого времени (месяц, квартал, год) коэффициенты a_{ij} будут постоянны и зависеть только от сложившейся технологии производства, то зависимость материальных затрат, от валового выпуска будет линейной, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \, . \tag{20}$$

Поэтому модель межотраслевого баланса называется линейной и пишут:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{21}$$

Введем векторы:

1) вектор валового выпуска - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$,

2) вектор конечного продукта - $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$.

Введем матрицу прямых затрат $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение баланса в матричной форме может быть записано так:

$$X = AX + Y. \tag{22}$$

Основная цель межотраслевого баланса: отыскать такое решение *X*, которое при известной матрице прямых затрат *A* обеспечит заданный вектор конечного продукта *Y*.

Найдем решение матричного уравнения:

$$X - AX = Y; \qquad (E - A)X = Y.$$

Если матрица $(E-A)$ не вырожденная, т.е. $\Delta(E-A) \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{23}$$

Матрица $S = (E-A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат. Каждый элемент S_{ij} матрицы S - это величина валового выпуска продукции *i*-ой отрасли для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-ой отрасли. Значения $a_{ij}, x_i, y_i \geq 0$.

Решение уравнения (22) существует при условии, что матрица A продуктивна. Матрица A называется продуктивной, если для любого $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$. Модель Леонтьева в этом случае называется продуктивной.

Существуют разные критерии продуктивности матрицы A. Для решения задач будем использовать один из них: матрица A - продуктивна, если максимальная сумма элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы один из столбцов имеет сумму элементов строго меньше единицы, т.е. для $a \geq 0 \quad i, j = 1, 2, ..., n$

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \tag{24}$$

и сумма элементов в столбце j меньше единицы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1. \tag{25}$$

Рассмотрим пример. Заданы две отрасли. Нормы потребления и объемы выпуска продукции этими отраслями заданы в табл. 4.

Таблица 4

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	Y	X
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, второй отрасли на 20%.

Решение. Введем матрицы: потребления $X_{ij} = \begin{pmatrix} 100 & 160 \\ 275 & 40 \end{pmatrix}$,

валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}$ и конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 240 \\ 85 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат, оценим коэффициенты матрицы A:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{100}{500} = 0.2, \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{160}{400} = 0.4,$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{275}{500} = 0.55, \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{40}{400} = 0.1 .$$

Матрица прямых затрат имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 \end{pmatrix}$. Матрица продуктивна (сумма по столбцам: 0,75 и 0,5).

Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$S = (E - A)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.55 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Найдем новый вектор конечного продукта: $Y_н = \begin{pmatrix} 240 * 2 \\ 85 + 85 * 02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix}$.

Вычислим необходимый объем валового продукта для матрицы $Y_н$:

$$X = SY = 2\begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.55 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 480 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 945.6 \\ 691.2 \end{pmatrix}.$$

4.5 Упражнения

1. Пусть швейное предприятие выпускает три вида продукции юбки, блузки и платья, при этом использует три вида тканей: хлопок, лен, шелк. Нормы расхода каждого вида тканей на изготовление единицы продукции заданы в таблице. В ней же указаны план выпуска каждой продукции, стоимость единицы каждого вида тканей, стоимость доставки тканей на предприятие (табл. 5).

Таблица 5

Ткань / Изделие	Хлопок (м)	Лен (м)	Шелк (м)	План выпуска(шт.)
Юбка	2	1,5	1	100
Блузка	0,5	1	1,5	120
Платье	1	1	3	110
Стоимость ткани (руб./м)	70	110	250	
Стоимость доставки ткани (руб./м)	0,5	0,6	0,8	

Найти матрицу затрат сырья, общую стоимость сырья, матрицу затрат на перевозку тканей, матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции, общую стоимость производства продукции.

2. Известно, что на предприятие завезли ткани в следующем объеме: хлопка – 530 м, льна – 345 м, шелка – 590 м. Найти план производства юбок, блузок и платьев, используя нормы расхода предыдущей задачи. Оценить общий доход предприятия, если известно, что предприятие реализует изготовленную продукцию по ценам: юбка – 700 руб., блузка – 800 руб., платье – 2000 руб.

3. Для производства печатных каталогов, буклетов и листовок предприятию требуется три вида сырья: бумага, краски, скрепки. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, стоимость сырья и готовой продукции заданы в табл. 6.

Таблица 6

Сырье / Изделие	Бумага	Краски	Скрепки	План выпуска(шт)
Каталог	6	5	3	100
Буклет	3	3	4	210
Листовка	2	4	2	300
Стоимость сырья (руб./усл.ед.)	10	20	0,1	
Запасы сырья (усл.ед.)	1420	1700	1160	

Найти матрицу затрат сырья, общую стоимость сырья, матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции.

4. Используя запасы сырья и нормы расхода сырья на изготовление печатной продукции предыдущей задачи, найти план производства предприятия и его прибыль, если готовую продукцию предприятие собирается реализовывать по ценам: каталог – 50 руб., буклет – 2 руб, листовка – 1 руб.

4.6 Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента:

Пусть известны данные о дневной производительности двух предприятий, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также время работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья (табл. 7). Составить все матрицы задачи:

a) норм расхода сырья,
b) стоимости сырья, стоимости доставки сырья,
c) плана выпуска продукции предприятиями,
d) производительности труда на каждом предприятии.

Найти:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;
2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;
3) дневной расход по типам сырья на предприятиях;
4) годовую потребность сырья для каждого предприятия;
5) годовую сумму необходимого кредитования каждого предприятия для закупки сырья;
6) матрицу затрат сырья;
7) общую стоимость сырья;
8) матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции;
9) объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Таблица 7

<table>
<tr><td rowspan="2">Продукция</td><td colspan="2">Производительность</td><td colspan="3">Затраты сырья</td><td rowspan="2">План выпуска продукции</td></tr>
<tr><td>Предприятие 1</td><td>IIпредприятие 2</td><td>S_1</td><td>S_2</td><td>S_3</td></tr>
<tr><td>P_1</td><td>$D+5$</td><td>$2M$</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>$10N+10D$</td></tr>
<tr><td>P_2</td><td>$N+2$</td><td>$3D$</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>$20(M+N)$</td></tr>
<tr><td>P_3</td><td>$2M$</td><td>D</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>$NM-D$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">кол-во рабочих дней</td><td colspan="3">цена вида сырья</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>15</td><td>20</td><td>$2N$</td><td>$3M$</td><td>$2D$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">стоимость доставки сырья</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>2N</td><td>N+M</td><td>3M</td><td></td></tr>
</table>