# 2. Матрицы

## 2.1 Определение

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов. Размер матрицы – $m \times n$. Обозначаются матрицы большими латинскими буквами $A, B, A_{m\times n}$. Элементы матриц обозначаются маленькими буквами: $a_{ij}$, где $i$ – номер строки, $j$ – номер столбца.

Например, задана матрица $A$:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}. \cdot$$

## 2.2 Виды матриц

1) Матрица размером $1\times n$ называется матрицей-строкой.
2) Матрица размером $m\times 1$ называется матрицей-столбцом.
3) Матрица размером $m\times m$ называется квадратной порядка $m$. Для такой матрицы можно составить определитель, состоящий из элементов матрицы.

Если определитель такой матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной, в противном случае – невырожденной.

Пример. Для матрицы $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ найти определитель.

Решение: определитель матрицы равен: $\det A_{2\times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7.$

4) Матрица, у которой число строк и столбцов не равны, называется прямоугольной.
5) Матрица, элементами которой являются нули, называется нуль-матрицей $O$.
6) Матрица, элементы которой задаются по формуле

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_{ij}, & i = j, \end{cases}$$ , называется диагональной.

7) Диагональная матрица размером $m\times m$, элементы которой

задаются по формуле $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$, называется единичной и обозначается $E$.

8) Матрицы одного размера $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называются равными, если их соответствующие элементы равны ( $a_{ij} = b_{ij}$ ).

9) Противоположной для матрицы $A$ называется матрица тех же размеров $(-A)$, определенная следующим образом: $(-a_{ij}) = -(a_{ij})$.

## 2.3 Операции над матрицами

1) Сложение матриц.

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{8}$$

Свойства:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$;
3. $A + O = O + A = A$; $O$ - нулевая матрица;
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$.

2) Умножение матриц на число.

При умножении матрицы $A$ на число $\alpha$ получается матрица $C = \alpha \cdot A$, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}. \tag{9}$$

Свойства:

1. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;
3. $-1 \cdot A = -A$;
4. $1 \cdot A = A$;
5. $O \cdot A = A \cdot O = O$;
6. $\alpha \cdot O = O$.

3) Умножение матриц.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}, \quad (10)$$

то есть определяется сумма произведений соответствующих элементов $i$ – строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j$ – столбца матрицы $B$. Матрицы можно умножать, если внутренние размерности совпадают.

Свойства:

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
2. $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$;
3. $E \cdot A = A \cdot E = A$;
4. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m}$.

Если выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными.

Пример. Выполнить действия с матрицами $2A + 3B$; $A \cdot B + E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим матрицы на числа:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 36 & 15 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму матриц

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2-12 & 10+0 \\ 16+36 & -4+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 52 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение матриц $A \cdot B$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-4)+5\cdot 12 & 1\cdot 0+5\cdot 5 \\ 8\cdot(-4)+(-2)\cdot 12 & 8\cdot 0+(-2)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 25 \\ -56 & -10 \end{pmatrix}.$$

Найдем разность матриц

$$AB - E = \begin{pmatrix} 56 & 25 \\ -56 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 25 \\ -56 & -11 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Транспонированная матрица

Матрица $A^T$ называется транспонированной к матрице $A$, если в матрице $A$ строчки и столбцы поменять местами.

Свойства транспонированных матриц:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;

2) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример. Построить транспонированную матрицу для матрицы

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: транспонированной является матрица: $A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$.

## 2.5 Обратная матрица

Матрица $A^{-1}$ называется обратной матрицей для матрицы $A$, если справедливо следующее условие:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{11}$$

Необходимые условия существования обратной матрицы:

1) матрица $A$ должна быть квадратной;

2) определитель матрицы $A$ не равен нулю, т.е. матрица $A$ должна быть невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. составить определитель матрицы $A$ и вычислить его;
2. если $\det A = 0$, то обратная матрица не существует;
3. если $\det A \neq 0$, составить присоединенную матрицу $A_{np}$, состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы $A$;
4. транспонировать присоединенную матрицу $A_{np}$;
5. записать обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^T_{np}$.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы $A$: $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&6\\4&1&0\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем определитель матрицы $A$: $\det A=\begin{vmatrix}1&4&3\\2&5&6\\4&1&0\end{vmatrix}=36.$

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы $A$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5&6\\1&0\end{vmatrix}=-6;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&6\\4&0\end{vmatrix}=24;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&5\\4&1\end{vmatrix}=-18;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3&4\\1&0\end{vmatrix}=4;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\4&0\end{vmatrix}=-12;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&4\\4&1\end{vmatrix}=15;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}4&3\\5&6\end{vmatrix}=9;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&6\end{vmatrix}=0;\quad A_{33}=-\begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}=-3.$$

Составим присоединенную матрицу: $A_{пр}=\begin{pmatrix}-6&24&-18\\4&-12&15\\9&0&-3\end{pmatrix}$.

Транспонируем матрицу $A_{пр}$: $A_{пр}^{T}=\begin{pmatrix}-6&4&9\\24&-12&0\\-18&15&-3\end{pmatrix}$.

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}-6&4&9\\24&-12&0\\-18&15&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}&\frac{1}{9}&\frac{1}{4}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{12}&-\frac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычислений следует выполнить умножение: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

## 2.6 Ранг матрицы

Минором матрицы $A_{m\times n}$ называется определитель, полученный вычеркиванием *к*-строк и *к*-столбцов. Минором может быть определитель любого порядка $k \le \min(m;n)$: $M^k = \Delta_k$.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ найти все миноры второго порядка.

Решение. Всего можно найти три минора:

$$M_1^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7;, \quad M_2^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5;, \quad M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.\cdot$$

Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок не равного нулю минора. Обозначается ранг $rangA$ или $r(A)$. В примере миноры второго порядка не равны нулю, то $rangA = 2$.

Свойства ранга матрицы:

1) $rangA \le \min(m;n)$;

2) $rangA = 0$, если все элементы матрицы $A$ равны нулю;

3) если $\det(A)_{m\times m} \ne 0$, то $rangA = m$.

## 2.7 Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров.

Пусть задана матрица $A_{3\times 4}$:

а) выбирается любой элемент матрицы, неравный нулю, и около него строится определитель второго порядка;

б) если построенный определитель не равен нулю, то около него строится определитель третьего порядка;

в) если все определители третьего порядка равны нулю, и миноры большего порядка построить нельзя, то $rangA = 2$, если найдется хотя бы один определитель третьего порядка не равный нулю, то $rangA = 3$

2. Метод элементарных преобразований матриц.

Теорема: ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарные преобразования матриц:

1) отбрасывание строки, состоящей из нулей;

2) умножение элементов строки на любое число, не равное нулю;

3) изменение порядка строк;

4) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на любое число, не равное нулю;

5) транспонирование матрицы.

После элементарных преобразований матрицу приводят к матрице трапецеидального вида.

Пример. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ найти ранг матрицы обоим методами.

Решение. Первый метод. Найдем миноры первого, второго и третьего порядков, выстраивая их около первого члена матрицы:

$$M_1^1 = 2; \quad M_1^2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad M_1^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -73.$$

Следовательно, $rangA = 3$.

Второй метод. Приведем матрицу к трапециидальному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -11 & 22 & -8 \\ 0 & -7 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 22 & -8 \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}.$$

Протокол действий:

1) переставили первый и четвертый столбцы местами;

2) от второй строки отняли четыре первых строки ($C_2 - 4C_1$);

3) от третьей строки отняли две первых ($C_3$ - $2C_1$);

4) из второго столбца вычли четвертый столбец.

Теперь легко найти неравный нулю минор максимального порядка и ранг матрицы: $rangA = 3$.

## 2.1 Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований

Элементарные преобразования матриц можно использовать для получения обратных матриц, присоединяя к данной матрице единичную матрицу: $(A|E) \sim (E|A)$.

Пример. Для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Используем метод элементарных преобразований, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{8} \end{array}\right).$$

Протокол действий:

1) элементы второй строки умножим на (-1) и поменяем местами с первой строкой;
2) от второй строки отнимем две первых строки ($C_2$-2$C_1$);
3) поделим вторую строку на 9 и третью строку на 2;

4) от третьей строки отнимем вторую строку ($C_3$-$C_2$);
5) поделим третью строку на 4/3;
6) из второй строки вычтем третью, умноженную на 2/3 ($C_2$-2/3$C_3$);
7) к первой строке прибавим три вторых строки и одну третью ($C_1$+3$C_2$+$C_3$).

В результате получили обратную матрицу:

$$A^{-1}=\left(\begin{vmatrix} 5/12 & -1/6 & -3/8 \\ 1/6 & 1/3 & -1/4 \\ -1/12 & -1/6 & 3/8 \end{vmatrix}\right)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -9 \\ 4 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

## 2.8 Упражнения

1. Выполнить действия:

1) $A+3B-2C$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) $AB+BC$, если

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) $AB$-$E$ и $BA$-$E$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$

4) $-5A+BC-E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

5) $ABC+2E$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1\\5&1&3\\1&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&4&7\\2&3&-1\end{pmatrix}.$$

6) $E\text{-}(A\text{-}B)C$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&-7&1\\-2&4&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3&9&4&1\\1&3&0&1\\2&5&5&9\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7&0\\-4&2\\1&8\\-2&3\end{pmatrix}.$$

7) $AE\text{-}EA+B$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&15\\11&20&3\\54&17&-6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&5&-2\\-5&1&30\\4&4&61\end{pmatrix}.$

8) $(A+3B)\text{-}3(E+AB)$, если

$$A=\begin{pmatrix}12&3&0\\2&-7&2\\8&6&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9&0&-2\\1&-2&3\\-2&3&9\end{pmatrix}.$$

9) $AB+CB\text{-}AC$, если $A=\begin{pmatrix}3&5\\7&9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2&3\\-6&5\end{pmatrix}.$

2. Найти обратную матрицу $A^{-1}$ и проверить выполнение условия

$A^{-1}A=AA^{-1}=E$, если $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&1&4\\2&-6&8\end{pmatrix}.$

3. Найти обратную матрицу для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}7&-3&5\\6&1&3\\5&3&6\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}7&-4&1\\3&0&6\\9&4&8\end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix}0&1&4\\1&0&-3\\3&1&10\end{pmatrix}$;

4) $D=\begin{pmatrix}12 & 5 & -5\\ 11 & 30 & -3\\ 3 & -4 & 3\end{pmatrix}$; 5) $F=\begin{pmatrix}5 & -15 & 0\\ 10 & 5 & 30\\ 5 & 10 & 20\end{pmatrix}$; 6) $G=\begin{pmatrix}6 & 5 & 7\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 9\end{pmatrix}$;

7) $N=\begin{pmatrix}16 & 15 & 17\\ 3 & 13 & 14\\ 0 & 10 & 1\end{pmatrix}$; 8) $Q=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 7\\ -1 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$; 9) $K=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 1 & 13\end{pmatrix}$;

10) $S=\begin{pmatrix}45 & 14\\ 31 & 1\end{pmatrix}$; 11) $R=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$; 12) $H=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 21 & 3\end{pmatrix}$;

13 $L=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; 14) $M=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3 & 6\\ 6 & 0 & 1 & 8\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; 15) $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2\\ 7 & 2 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 5\\ 9 & 5 & 8 & 10\end{pmatrix}$.

4. Проверить являются ли матрицы $A$ и $B$ перестановочными, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 3\\ 3 & -4 & 0 & 2\\ 2 & 7 & 5 & 3\\ 5 & 3 & 5 & 5\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}10 & 2 & 4 & 3\\ 8 & 0 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 0 & 5\\ 4 & -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 0 & 1\\ 6 & 11 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

4) $D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 5) $Y=\begin{pmatrix}4 & 1 & 7\\ 1 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 10\end{pmatrix}$; 6) $R=\begin{pmatrix}6 & 8 & 4\\ -1 & 10 & 3\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$;

7) $H=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$; 8) $S=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

## 2.9 Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры $N$ – номер студента в журнале, $D$ – число дня рождения студента, $M$ – число месяца рождения студента, *A, B, C* - матрицы:

1) Вычислить *NA+MB-(M+N)C-E*, если заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -M & 1 \\ 3 & 2N \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} D & N \\ -M & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2M & -(N+M) \\ 3D & -NM \end{pmatrix}.$$

2) Найти значение выражения *N(BA)+M(BC)+DE*, если заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} M & 5 \\ 3 & -N \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & D & 5N \\ N & M & 2D \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -M & D \\ N & 5N \\ 3M & -4 \end{pmatrix}.$$

3) Найти обратную матрицу к матрицам:

а) $A=\begin{pmatrix} N & M & 1 \\ D & 2 & -M \\ 1 & -N & 4 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} N & D \\ -M & 6 \end{pmatrix}$.

4) Методами преобразования матриц найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2M & N & 3-D \\ 3+N & 2+N & 0 & D \\ 2 & 5 & 1 & D+3 \\ 5-M & 2+M & M & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2N & 3 & 1 \\ 1+N & M & 3+N \\ 5-M & 1 & D \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} M & 1 & D \\ D & 2N & N \\ 2+N & 3M & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & N & D \\ 2 & 1 & M \end{pmatrix}\cdot X\begin{pmatrix} M & N & D \\ 2 & 6 & 0 \\ N & D & M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 2D \\ -N & M & 0 \\ M & -4 & N \end{pmatrix}$.

6) Найти ранг матриц:

а) $A=\begin{pmatrix} -N & MN & 1+N \\ D+6 & 2-M & -M \\ M & -N & 4+D \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2D & M & N-1 \\ D-1 & 2 & -M-1 \\ D & -NM & M+D \end{pmatrix}$.

## 2.10 Контрольная работа

Задана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & N+M & 5 \\ 7 & N & -M \\ 1 & -D & 2 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Вычислить матрицы: $B=A\cdot A^T$; $C=2A+B-E$.