

1. Определители

1.1 Определитель второго порядка

Пусть задана таблица четырех чисел, расположенных в две строки и в два столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Элементы a_{11} , a_{12} – образуют первую строку, элементы a_{21} , a_{22} образуют вторую строку. Элементы a_{11} , a_{21} образуют первый столбец, элементы a_{12} , a_{22} образуют второй столбец. Элементы a_{11} , a_{22} стоят на главной диагонали, элементы a_{12} , a_{21} стоят на побочной диагонали.

Определителем второго порядка для чисел (1) называется число, которое вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2)$$

Иначе это определение можно дать так: определителем второго порядка для чисел (1) называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали. При этом пишут

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (3)$$

Определитель (от латинского слова *determinant*) обозначается Δ или \det .

Пример. Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -2 & 25 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 20 - 18 = 2$.

$$2) \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ -2 & 25 \end{vmatrix} = -10 \cdot 25 - 1 \cdot (-2) = -250 + 2 = -248.$$

1.2 Определитель третьего порядка

Пусть задана таблица, состоящая из девяти чисел, расположенных в три строки и три столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Определителем третьего порядка для таблицы чисел (4) называется число, которое вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \quad (5)$$

при этом пишут

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно использовать правило, называемое правилом "треугольника":

- три первых слагаемых в формуле (5) берутся со знаком плюс и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными главной диагонали и с вершинами в элементах на побочной диагонали (рис.1);

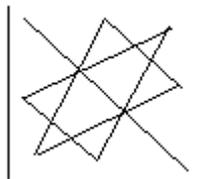


Рис. 1

- три следующих слагаемых берутся со знаком минус и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными побочной

диагонали и с вершинами в элементах, стоящих на главной диагонали (рис.2).

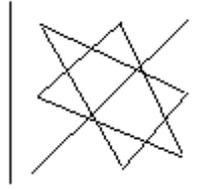


Рис.2

Пример. Вычислить определитель третьего порядка по правилу

«треугольника» $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) \cdot (-1) + 0 - (1 \cdot 2 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0) =$$

$$= 8 + 20 - (-10 - 2) = 28 + 12 = 40.$$

Можно правило «треугольника» превратить в правило «параллелограмма». Оно заключается в следующем: 1) припишем под определителем две первых строки; 2) мысленно проведем три прямые параллельные главной диагонали, выходящие из элементов первого столбца, получим сумму произведений элементов рис. 1; 3) мысленно проведем три прямые параллельные побочной диагонали, выходящие из элементов третьего столбца, получим сумму произведений элементов рис. 2.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка по правилу

$$\text{«параллелограмма» } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 20 - (-10 - 2 + 0) = 40.$$

1.3 Минор определителя

Пусть задан определитель третьего порядка $\Delta_3 = |a_{ij}|$, где i – индекс строки, j – индекс столбца.

Минором любого элемента a_{ij} определителя Δ_3 , называется определитель меньшего порядка, который получен из элементов определителя, оставшихся после вычеркивания элементов i – строки и j – столбца. Обозначается минор M_{ij} .

Пример. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ найти миноры M_{11} , M_{32} .

Решение:

а) минор M_{11} получим, вычеркивая первую строку и первый столбец определителя:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3;$$

б) для получения минора M_{32} вычеркнем третью строку и второй столбец определителя:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6.$$

1.4 Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением любого элемента определителя a_{ij} называется минор этого элемента с определенным знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (6)$$

Пример. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ найти алгебраические

дополнения A_{11} , A_{32} .

Решение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = 6.$$

1.5 Разложение определителя по строке или столбцу

Теорема: определитель n -ого порядка равен сумме произведений элементов выбранной строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}. \quad (7)$$

В выражении (7) записано разложение определителя по элементам i строки. Аналогичное разложение можно записать по любой строке или столбцу.

Пример. Записать разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ по второй

строке и по третьему столбцу.

Решение:

1) Вычислим определитель разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Вычислим этот же определитель разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3A_{13} + 6A_{23} + 9A_{33} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

1.6 Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится, если строчки и столбцы определителя поменять местами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Значение определителя изменится на противоположное по знаку, если две строки или два столбца определителя поменять местами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Общий множитель элементов строки или столбца определителя можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Определитель равен нулю, если он имеет строку или столбец, состоящий из нулей.

5. Определитель равен нулю, если он имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца.

6. Определитель равен нулю, если он имеет две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца.

7. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на какое-то число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка, используя свойства определителей и разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решение: прежде чем вычислить определитель, получим в первой строчке нули, во втором и четвертом столбцах. Для этого умножим первый столбец на (-2) и сложим со вторым, второй столбец изменится, и умножим первый столбец на (-3) и сложим с четвертым, изменится четвертый столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -5 & -1 & -16 \\ 3 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -16 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + 96 - 75) - (18 + 80 - 5) = -71.$$

Решим этот же пример, получив нули в третьем столбце. Для этого к третьей строке прибавим вторую, изменится третья строка, и к четвертой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-5) , изменится четвертая строка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 13 & 25 & 0 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 13 & 25 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= -(50 - 26 + 300) - (78 - 25 + 200) = -71.$$

1.7 Упражнения

1. Вычислить определители второго и третьего порядка:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 24 & 7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad 7) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad 9) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad 10) \begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 12 & 5 & 1 \\ 13 & 6 & 3 \end{vmatrix};$$

$$11) \begin{vmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -3 & -4 & -3 \\ 18 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad 12) \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad 13) \begin{vmatrix} 15 & 3 & 5 \\ 3 & 65 & 3 \\ 30 & -4 & 0 \end{vmatrix}; \quad 14) \begin{vmatrix} 1 & 13 & 4 \\ 3 & 5 & 13 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$15) \begin{vmatrix} -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix}; \quad 16) \begin{vmatrix} 10 & 32 & 15 \\ 34 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}; \quad 17) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 18) \begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения и неравенства:

$$1) \begin{vmatrix} 12 & x+5 \\ 10 & 3-x \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x & 2-x \\ 1 & 3x \end{vmatrix} = 0; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & x & 3x \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$4) \begin{vmatrix} x & ax \\ b-x & a \end{vmatrix} < 0; \quad 5) \begin{vmatrix} 6 & 4-x \\ x+3 & 3-x \end{vmatrix} > 0; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ 3 & -x+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

$$7) \begin{vmatrix} x & x & 3x \\ 4 & x-2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad 8) \begin{vmatrix} x & 6 & -x \\ 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & x \end{vmatrix} < 0; \quad 9) \begin{vmatrix} 3 & -6 & 3x \\ 2 & x & 2 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

$$10) \begin{vmatrix} 2x & 5-x \\ x-2 & 7 \end{vmatrix} = 0; 11) \begin{vmatrix} -2 & x & 5 \\ 3x & -x+1 & 7 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} > 0; 12) \begin{vmatrix} 5x & x^2 & -x \\ -3 & 6x & 2 \\ 11 & 12x & x \end{vmatrix} < 0.$$

3. Разложить определитель по указанной строке или столбцу и вычислить его.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 1 & 2 \\ -7 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ по первой строке и четвертому столбцу;}$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \text{ по третьей строке и первому столбцу;}$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ по второму столбцу.}$$

4. Вычислить $M_{12} + M_{32} - M_{11}$, определив миноры определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -7 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить $M_{11} + M_{22} + M_{33}$, определив миноры определителя

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

6. Найти алгебраические A_{11} ; A_{32} ; A_{31} ; A_{21} дополнения

определителя $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 11 & 2 & 1 & 5 \\ 13 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Вычислить определители, используя свойства определителей:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 14 \\ 8 & 5 & -1 & 7 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 10 & 20 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -5 & 4 \\ -8 & 10 & 1 & 6 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & -2 & 9 & 1 \end{vmatrix};$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.8 Домашнее задание

Выполнить контрольное домашнее задание, заменив параметры N – номер студента в журнале, D – число дня рождения студента, M – число месяца рождения студента:

1. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -D & N \\ M & -2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} M & M+N & 4D \\ 3 & -N & 3 \\ D & M & 1 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 2+N & D & 1 & M \\ M & N & D & -N \\ N & 4 & -M & 1 \\ 3+D & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 2D & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & M & 2 & 1 \\ D & N & 1 & 0 & M \\ 3 & 1 & N & 4 & 1 \\ 4 & M & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Найти все алгебраические дополнения к элементам определителя

$$1) \begin{vmatrix} D & 2N \\ -M & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} M & M+N & 4D \\ 0 & N & 3+N \\ D & -M & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} D & M-N & -D \\ N & 2N & 3+M \\ -D & M & M+N \end{vmatrix}.$$

3. Привести определитель к диагональному виду и вычислить

$$\begin{vmatrix} M & 3 & 1 & N \\ 0 & -N & 0 & 3 \\ D & M & 1 & 0 \\ 1 & D & -1 & D \end{vmatrix}.$$

1.9 Контрольная работа

Задан определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & N & 4 & N \\ -3 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Найти:

- 1) минор M_{13} ;
- 2) алгебраическое дополнение A_{23} ;
- 3) вычислить определитель, разложив по четвертому столбцу;
- 4) вычислить определитель, приведя к треугольному виду;
- 5) вычислить определитель, приведя его к диагональному виду.