Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy+27x^2y^2\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt[3]{x};\ (x\ge 0)$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями: $2x+3y-12=0;$ $2z=y^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^5}$, где $V: \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность тела: $V: 25\left(x^2+y^2\right)=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ \mu=2\left(x^2+y^2\right)$.

6. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями: $V: 4y=\sqrt{x^2+z^2};\ \ x^2+z^2=16;\ \ y\ge 0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α от точки M к точке N: $\vec{F}=\left(x^2-2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2-2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок от точки $M(-4;0)$ до $N(0;2)$.

8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_K \dfrac{y\cdot dS}{x}$, где K -дуга полукубической параболы $y^2=\dfrac{4}{9}x^3$ от точки $A\left(3;2\sqrt{3}\right)$ до $B\left(8;\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k};\ P: x+y+z=1$.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S -часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x-y+4z)\cdot dS$: $P: 2x+2y+z=4$.

Контрольные вопросы

1. Что называется двойным интегралом?
2. Какое поле называется скалярным?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)\,dx$.

2. вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2+y^2-2y=0;$ $x^2+y^2-6y=0;$ $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};$ $x=0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\dfrac{5\sqrt{x}}{3};$ $y=\dfrac{5x}{9};$ $z\ge 0;$ $z=\dfrac{5}{9}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(2x-3y+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V:\ \begin{matrix} -1\le x\le 0 \\ 0\le y\le 1 \\ 2\le z\le 3 \end{matrix}$.

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V: x^2+y^2=2x;$ $x+z=2;$ $y\ge 0;$ $x\ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha xydl$, где α - часть окружности $x^2+y^2=9$, лежащая в первой четверти.

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(1-x^2\right)dx + x\left(1+y^2\right)dy$, где $\alpha: x^2+y^2=R^2$.

8. вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль кривой α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$: $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок прямой MN.

9. Вычислить массу дуги α при заданной плотности μ: $\alpha: \rho=e^{\frac{3}{4}\varphi};$ $\varphi\in\left[0;\dfrac{4\pi}{7}\right];$ $\mu=\rho^{\frac{4}{3}}$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$; $P: 2x+3y+z=1$.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.

3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 3

1. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x=4-x^2;\ y=x^2-2x$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2-2y+z\right)dxdydz$, где $V:\ \begin{matrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \\ -1\le z\le 3 \end{matrix}$.

3. Найти массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми, если $\mu=\mu(x;y)$ - поверхностная плотность пластинки $D: x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=9;\ x\ge 0;\ y\le 0;\ \mu=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$.

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y=4;\ x=\sqrt{2y};\ z\ge 0;\ z=\dfrac{3x}{5}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{x\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y\le x;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где α - отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y=2-\dfrac{x^2}{8}$ от точки $M(0;2)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{yz^2}{x^2}$ и $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\cdot z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=(2x-z)\cdot\vec{i}+(y-x)\cdot\vec{j}+(x+2z)\cdot\vec{k}$, через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P:\ x-y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x-y+z)dS$, где $P: x-y+z=2$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.

3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 4

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2;\ x\geq 0$.

2. Найти площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x^2-2x+y^2=0;\ x^2-4x+y^2=0;\ y=0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $V: x+y=4;\ y=\sqrt{2x};\ z\geq 0;\ z=3y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y^2dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 36;\ x\geq 0;\ z\geq 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность $V: x^2+y^2+z^2=4;\ \ x^2+y^2=4z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ \mu=10z$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=1+\sin\varphi$, если $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=\sin\left(\frac{\pi}{4};\frac{\varphi}{2}\right)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+2x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=4,\ (y\geq 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(-2;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+2y+z=4$ с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(y+x)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x+2y+2z=4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

2. Какое поле называется векторным?

3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 5

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями: $D: y=0;\ y \ge x;\ y=-\sqrt{2-x^2}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\frac{5}{6}\sqrt{x};\ y=\frac{5}{18}x;\ z\ge 0;\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

3. Найти массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $x=2;\ y\ge 0;\ y^2=2x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7x^2}{4}+y$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=8x;\ x=2$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=2\left(x^2+y^2\right);\ z=2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{2y}dl$, где α - первая арка циклоиды: $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=x^3\cdot\vec{i}-y^3\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=4\ (x\ge 0; y\ge 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=u(x;y;z)$ и $v=v(x;y;z)$ в точке $M\left(2;\frac{1}{3};\sqrt{\frac{3}{2}}\right);\ u=x^2yz^3;\ v=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}+(3x+z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+y+2z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}: (y-z)\cdot\vec{i}+3xyz\cdot\vec{j}+(z-x)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.

2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.

3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_{D} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dxdy$, где $D: x = 1;\ y = -x^3;\ y = \sqrt{x}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2 + y^2 - 4y = 0;\ x^2 + y^2 - 8y = 0;\ y = x;\ x = 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_{V} \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, где $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16;\ z \geq 0$.

5. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $x = 19\sqrt{2y};\ x = 4\sqrt{2y};\ z \geq 0;\ z - y = 2$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 2(1-\cos\varphi)$, где $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$, если плотность $\mu = \cos\frac{\varphi}{2}$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x+y)\cdot\vec{i} + x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (y+2z)\cdot\vec{i} + (x+2z)\cdot\vec{j} + (x-2y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} + (x+3y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = (y-z)\cdot\vec{i} + (x+z)\cdot\vec{j} + \left(x^2 - y^2\right)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?

2. Что такое дивергенция векторного поля?

3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

Вариант 7

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt{x}$.

2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 1;\ \ x^2 + y^2 = 4;\ \left(x \geq 0;\ y \geq 0\right)$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(5x + \dfrac{3z}{2}\right)dxdydz$, где $V: y = x;$ $y = 0;\ x = 1;\ z \geq 0;\ z = x^2 + 15y^2$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: z = 9\sqrt{x^2 + y^2};\ z = 36$.

5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl$, где α -дуга кривой: $x = \cos t;\ y = \sin t;\ z = \sqrt{3} \cdot t;\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = \left(x + y\right) \cdot \vec{i} + \left(x - y\right) \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha:\ y = x^2$ от точки $M\left(-1;1\right)$ до точки $N\left(1;1\right)$.

7. Найти производную скалярного поля: $u = x + \ln\left(z^2 + y^2\right)$ в точке $M\left(2;1;1\right)$ по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S -часть плоскости $P: x + 2y + z = 2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S \left(5x + 2y + 2z\right)dS$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = \left(x + z\right) \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + \left(x + y - z\right) \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность, образованную плоскостью $P: x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = \left(2y - z\right) \cdot \vec{i} + \left(x + y\right) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x + 2y + 2z = 4$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.

2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?

3. Вычисление работы силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α с помощью криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 8

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, ели область D задана указанными линиями: $D: x=\sqrt{9-x^2};\ y=x;\ y\ge 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $y=\cos x;\ y\le x+1;\ y\ge 0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y=6;\ y=\sqrt{3x};\ z\ge 0;\ z=4y$.

4. Найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $V: x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=6z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=90y$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=1-y^2-z^2;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\varphi;\ 0\le\varphi\le\dfrac{4}{3}$ при заданной плотности $\mu=\dfrac{3}{4}\rho$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка: $\int\limits_\alpha xdy-x^2ydx$, где α часть кривой $y=x^3$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(2;8)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z^3}{xy^2}$ и $v=9\sqrt{2}\cdot x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x+y)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}-2xz\cdot\vec{j}-3(y+z)\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Физические приложения двойного интеграла.
2. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 9

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: y = x^2 + 2;\ x \ge 0;\ x = 2;\ y = x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x = 1$; $y \ge 0;\ y^2 = 4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = 6x + 3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)}$, где $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах $\iiint\limits_V \frac{x dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ y \le x;\ z \ge 0$.

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z = 3\left(x^2 + y^2\right);\ x^2 + y^2 = 9;\ z \ge 0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$, при заданной плотности $\mu = \rho^2$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + \left(xy^2 + y\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)\right)dy$, где $\alpha: x^2 + y^2 = 4$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$ в точке $M(1;5;-2)$ по направлению $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S-часть плоскости $P: x + y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (6x - y + 8z)\,dS$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x - y)\cdot\vec{i} + (2y + z)\cdot\vec{j} + (2z - x)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x - 3y + z = 6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f\left(x;y\right)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f\left(x;y\right)dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $y=5\sqrt{x};\ y=\dfrac{5x}{3};\ z\ge 0;\ z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного указанными поверхностями: $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=9z^2;\ x\ge 0; y\ge 0;\ z\ge 0$, если поверхностная плотность $\mu=10z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(y^2-2xy\right)dl$, где α - отрезок прямой от точки $A\left(-3;4\right)$ до $B\left(3;1\right)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F}=\left(2x-y\right)\cdot\vec{i}+\left(x^2+x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль кривой $\alpha: x^2+y^2=9;\ y\ge 0$ от точки $M\left(3;0\right)$ до точки $N\left(-3;0\right)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{x^2}{yz^2}$ и $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(2y+z\right)\cdot\vec{i}+\left(x-y\right)\cdot\vec{j}-2z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x-y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(x+y+z\right)\cdot\vec{i}+2z\cdot\vec{j}+\left(y-7z\right)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+3y+z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как изменить прядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy+9x^2y^2\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=-x^2;\ y=\sqrt{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=16;\ x\ge 0;\ y\le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, заданного указанными кривыми: $V: y=17\sqrt{2x};\ y=2\sqrt{2x};\ z\ge 0;\ z+x=\dfrac{1}{2}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=36;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ y\le -x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\sin\varphi;\ 0\le\varphi\le\pi$, при заданной плотности $\mu=\rho^3$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 9x^2+y^2=1;\ x\ge 0;\ y\ge 0$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(0;3)$.

8. Найти производную скалярного поля u: $u=y\cdot\ln\left(1+x^2\right)-arctgz$ в точке $M(0;1;1)$ по направлению $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+3y+2z=6$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+(y+z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 3x-2y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Вариант 12

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x=4-y^2$; $x-y+2=0$

.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $D: x=1;\ y\geq 0;\ y^2=4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=x+3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz$, где $V: z=x^2+3y^2;\ z\geq 0;\ y\geq 0;\ x=1;\ y=x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x=2\sqrt{y^2+z^2};\ y^2+z^2=4;\ x\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела $V: x^2+y^2=z;\ z=3$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2+y^2-4x=0$ в третьей четверти.

7. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z}{x^3y^2}$ и $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$ в точке $M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

.

8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_\alpha (x-y)^2\,dx-(x+y)^2\,dy$, где α - часть прямой между точками $M(2;0)$ и $N(4;2)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (2x+5y+10z)\,dS$, $P: 2x+y+3z=6$.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4z\cdot\vec{i}+(x-y-z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x-2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

Вариант 13

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $x \ge 0;\ y \ge x;\ y = \sqrt{9-x^2}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2 - 4x + y^2 = 0;\ x^2 - 8x + y^2 = 0;\ y = 0;\ y = \sqrt{3} \cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного указанными поверхностями: $x = \frac{5}{2}\sqrt{y};\ x = \frac{5}{6}y;\ z \ge 0;\ z = \frac{5}{6}\left(3 + \sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$, где $V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $4y = x^2 + z^2;\ y = 9$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2 + y^2 = 2x$ во второй четверти.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F} = \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2z$ в точке $M(1;3;2)$ по направлению $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = (y+z) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (y-2) \cdot z \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = 6x^2 \cdot \vec{i} + 3\cos(3x + 2z) \cdot \vec{j} + \cos(3y + 2z) \cdot \vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 14

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $D: y^2 = 2x;\ x^2 = 2y;\ x \le 1$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_{D} \left(24xy + 18x^2y^2\right) dx\,dy$, где $D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $D: x^2 + y^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 9;\ x \le 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{y - 4x}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2};\ x = 20$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = 2y;\ y = 2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha} \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_{\alpha} \left(x^2 - \dfrac{y^3}{3}\right) dx + \left(\dfrac{x^3}{3} - y^2\right) dy$, где $\alpha: x^2 + y^2 = 4$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \dfrac{z^2}{xy^2}$ и $v = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3}; 2; \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = 3x \cdot \vec{i} + (z + y) \cdot \vec{j} + (x - z) \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x + 3y + z = 3$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + (y - 2z) \cdot \vec{j} + (2x - y + 2z) \cdot \vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x + 2y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $xy=1;\ \ y=x^2;\ y=2;\ x=0$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16;\ y=\sqrt{3}x;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=20\sqrt{2y};\ x=5\sqrt{2y};\ z=0;\ x+y=\frac{1}{2}$.

5. Найти момент инерции однородного тела V: $x^2+z^2=2y;\ y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить массу дуги α, описываемой уравнением: $\rho=4;\ \ 0\le\varphi\le\sqrt{3}$ при заданной плотности $\mu=15\rho^3$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_\alpha \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где α - отрезок прямой от точки $M(1;1)$ до точки $N(2;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};3\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

9. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=3x^2y\cdot\vec{i}-2xy^2\cdot\vec{j}-2xyz\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x+3y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_D (3x+10y-z)\,dS$.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 16

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x=\dfrac{5}{3}\sqrt{y};$ $x=\dfrac{5y}{9};\ z\ge 0;\ z=\dfrac{5}{9}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=35z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=9-x^2-y^2;\ z=0$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α, заданной уравнением: $\rho=5\cdot e^{\frac{5\varphi}{12}};\quad 0\le\varphi\le 1$, при заданной плотности $\mu=\dfrac{12}{13}\cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}:\vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{x^2}{yz^2};\quad v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x-2y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4y-x+4z)\,dS$.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y-z)\cdot\vec{i}+(2x+y)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 2x+y+z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 17

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: x = y^2 + 1;\ x + y = 3$
.

2. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x + y = 8;\ y = \sqrt{4x};\ z = 0;\ z = 3y$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 9;\ x^2 + y^2 = 16;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V x^2 dx\,dy\,dz$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \le x$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = y;\ x^2 + z^2 = 10;\ y \ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(xy + y^2\right) dl$, где α - часть прямой от точки $A(-2;3)$ до точки $B(2;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (xy - x)\cdot\vec{i} + \dfrac{x^2}{2}\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y = 2\sqrt{x}$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(1;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = x^2y^2z - \ln(z-1)$ в точке $M(1;1;2)$ по направлению $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot\vec{i} + 2z\cdot\vec{j} + (y - 7z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + 3y + z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = 3(x - z)\cdot\vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\cdot\vec{j} + 3z\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидаольности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 18

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f(x;y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y^2 = -8x + 16;\ y^2 = 24x + 48$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(27 + 54y^3\right) dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = \sqrt{xy}$

.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y^2 + z^2 = x;\ y^2 + z^2 = 9;\ x \ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ x^2 + y^2 = 4;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 2z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2 y + xy\right) dl$, где α - ломаная ABC, $A(0;0);\ B(3;0);\ C(0;3)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xy^2 dx + \frac{3}{2}x^2 y dy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;2);\ C(1;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{y^3}{x^2 z}$ и $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$ в точке $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}};\frac{1}{2}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S $\iint\limits_S (5x + y - z)dS$, где S - часть плоскости $P: x + 2y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x - y)\cdot\vec{i} + (2y + z)\cdot\vec{j} + (2z - x)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x - 3y + z = 6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 19

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластики D, ограниченной кривыми: $x = 2;\quad y = 0;\ 2y^2 = x;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \ge x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $3\sqrt{x^2 + z^2} = y;\ x^2 + z^2 = 16;\ y \ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2 + y^2 = 2z;\ z = 2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α: $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t); \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{1}{3}$ при заданной плотности $\mu = \frac{3}{2}e^{2t}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2 + y^2 = 9,\ y \ge 0$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(-3;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = 5xy^3z^2$ в точке $M_1(2;1;-1)$ по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(4;-3;0)$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2y - z)\cdot\vec{i} + (x + 2y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x + 3y + 2z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + (x + z)\cdot\vec{k}$ является соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 20

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана следующими линиями: $y \geq 0;\ x+2y-12=0;\ y=\lg x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x=2;\quad y \geq 0;\ y^2=\dfrac{x}{2}$ если поверхностная плотность пластинки $\mu = 4x+6y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5}$, где $V: \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2+y^2=4y;\ z=4-x^2;\ z \geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=9;\ x \geq 0$ относительно оси OX .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2-xy\right)dl$, где α - ломаная ABC, $A(2;1);\ B(6;1);\ C(4;-1)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha (x+y)^2\,dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где α - верхняя половина окружности $x^2+y^2=9$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=xyz$ и $v=x^2+9y^2+6z^2$ в точке $M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S : $\iint\limits_S (6x+y+4z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 3x+3y+z=3$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=(x+2z)\cdot\vec{i}+(y-3z)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 3x+2y+2z=6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 21

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ \ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2;\ x\geq 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-4y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=\sqrt{3}x;\ x=0$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=9;\ x\leq 0;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{y-2x}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $z=x^2+y^2+1;\ x^2+y^2=4x;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=x^2;\ y^2+z^2=9;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases}x=4\left(\cos t+t\cdot\sin t\right);\\ y=4\left(\sin t-t\cdot\cos t\right);\end{cases}$ $0\leq t\leq 2$, при заданной плотности $\mu=t^2+1$.

7. Найти работу силы $\vec{F}:\vec{F}=y\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 2x^2+y^2=1;\ y\geq 0$ от точки $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ до точки $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$ в точке $M\left(1;1;0\right)$ по направлению $\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4x\cdot\vec{i}+\left(x-y-z\right)\cdot\vec{j}+\left(3y+2z\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+y+z=4$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+\left(x+z\right)\cdot\vec{j}+\left(y+z\right)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x+3y+z=3$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.

2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?

3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x;y)dx + \int_1^0 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x;y)dx$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint_V 63\left(1+2\sqrt{y}\right)dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = \sqrt{xy}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченного кривыми: $y^2 = 2x+1;\ x - y = 1$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $\sqrt{x^2+y^2} = 3z;\ x^2+y^2 = 4;\ \ z \ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2 = 16;\ x^2+y^2 = 9z^2;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 5z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int_\alpha \sqrt{2y}dl$, где α - первая арка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1-\cos t). \end{cases}$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции $u(x;y)$. Найти эту функцию: $\left(20x^3 - 21x^2y + 2y\right)dx + \left(3+2x-7x^3\right)dy$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \dfrac{x^2}{y^2z^3}$ и $v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot z}$ в точке $M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint_S (3x-2y+6z)dS$, где S - часть плоскости $P: 2x+y+2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным, соленоидальным или гармоническим: $\vec{a} = (x+y)\cdot\vec{i} + (y+z)\cdot\vec{j} + 2(x-z)\cdot\vec{k}$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.

2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.

3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 23

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=\sqrt{x};\ y=2\sqrt{x};\ x=4$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=9;\ x\ge 0;\ y\le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{5x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить объем тела V, заданного указанными поверхностями: $y=6\sqrt{3x};\ y=\sqrt{3x};\ z\ge 0;\ z+x=3$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y\ge 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x;\ z\ge 0$.

5. Вычислить момент инерции тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=4;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=\ln x;\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$, если заданная плотность $\mu=2x^2$.

7. Найти работу силы $\vec{F}=(xy-x)\cdot\vec{i}+xy\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y=2\sqrt{x}$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(4;4)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z-3z$ в точке $M_1(1;-2;-1)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(13;-5;0)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x+2y+z=6$ с координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+3z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+4y+2z=8$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?

2. Способы вычисления потока векторного поля.

3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 24

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy$, где D: $x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right)dx\,dy\,dz$, где V : $y=9x;\ y\geq 0;\ x=1;\ z\geq 0;\ z=\sqrt{xy}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=9;\ x^2+y^2=16;\ x\geq 0;\ y\geq 0$ если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

4. Найти объем тела V , заданного указанными поверхностями: $z=4-y^2;\ x^2+y^2=4x;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V , заданного следующими поверхностями: $x^2+z^2=y;\ y=2$ относительно оси OY .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где α - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где α - контур треугольника ABC , $A(0;0);\ B(1;0);\ C(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{1}{x^2yz}$ и $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot z}$ в точке $M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхность интеграл первого рода по поверхности $S:\iint\limits_S (2x-3y+z)dS$, где S - часть плоскости $P: x+2y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+2y+z=4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.

3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x;y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2-6y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, заданного следующими поверхностями: $x=16\sqrt{2y};\ x=\sqrt{2y};\ z\ge 0;\ z+y=2$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=z^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=6z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $V:\ x=y^2+z^2;\ y^2+z^2=1;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=-3(\cos t - t\sin t) \\ y=-3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0\le t\le \frac{1}{3}$ при плотности $\mu=t$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$ в точке $M(1;-3;4)$ по направлению $\vec{l}=\vec{j}-\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(3x+y)\cdot\vec{i}+(x+z)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(2x-yz)\cdot\vec{i}+(xz-2y)\cdot\vec{j}+2xyz\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2.Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 26

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=(x-4)^2$; $y=16-x^2$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной следующими кривыми: $x=2;\ y\ge 0;\ 2y^2=x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7}{2}x^2+6y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=1;\ y\ge x;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного ограничивающими поверхностями: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$; $x^2+y^2=9;\ z=0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \begin{cases} x=10\cos^3 t; \\ y=10\sin^3 t; \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=2\cos^2 t$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha (x+y)dx+(y-x)dy$, где $\alpha: \begin{cases} y=x^2; \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\frac{x}{yz^2}$ и $v=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности $S: \iint\limits_S (2x+3y-z)dS$, где S - часть плоскости $P: 2x+y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+3y\cdot\vec{j}+(y-z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x-y-2z=-2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.

2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?

3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 27

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 25;\ x \geq 0;\ y \leq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{x - 5y}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz$, где V: $z = 10y;\ x + y = 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y = 3\sqrt{x^2 + z^2};\ x^2 + z^2 = 36;\ \ y \geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V: $y^2 + z^2 = x^2;\ \ y^2 + z^2 = 1;\ x \geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{x + 2y + 5}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;-2)$ до точки $B(1;0)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение $\left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + \left(2 - 6xy\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u = xy - \dfrac{x}{z}$ в точке $M(-4;3;-1)$ по направлению $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x + y)\cdot\vec{i} + (x + z)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: x + 2y + z = 2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = xy(3x - 4y)\cdot\vec{i} + x^2(x - 4y)\cdot\vec{j} + 3z^2\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.

2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.

3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

Вариант 28

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x;y)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x;y)\,dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y=\frac{1}{x};\ y=x;\ x=2$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $z=\sqrt{y};\ \ y=2x;\ y=3;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y=x;\ z\ge 0;\ x\ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $49\left(x^2+y^2\right)=4z^2;\ 7\left(x^2+y^2\right)=2z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=20xz$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(2z-\sqrt{y^2+x^2}\right)dl$, где α - первый виток канонической винтовой линии $x=t\cos t;\ y=t\sin t;\ z=t$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z+z^2x$ в точке $M_1(1;-1;2)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(3;4;-1)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y+z)\cdot\vec{i}+(x+6y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x+3y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?

2. Оператор Гамильтона.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 29

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана указанными линиями: $x=1;\ y=-\sqrt[3]{x};\ y=x^3$.

2. Найти массу пластинки D, заданной указанными линиями: $D: x=2;\ y^2=2x;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{7x^2}{4}+\dfrac{y}{2}$.

3. Найти площадь области D, заданной ограничивающими ее линиями: $x^2-4x+y^2=0;\ x^2-6x+y^2=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}x$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2\leq 9;\ y\geq 0;\ y\leq \dfrac{x}{\sqrt{3}};\ z\geq 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y=3\sqrt{x^2+z^2};\ y=9$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=2+2\arcsin\sqrt{x};\ \dfrac{1}{4}\leq x\leq 1$ при заданной плотности $\mu=x^2+x$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xdy-ydx$, где α - контур треугольника ABC, $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=z^2+2arctg(x-y)$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S (7x+y+2z)dS$, где S - часть плоскости $P: 3x-2y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=\dfrac{x}{y}\cdot\vec{i}+\dfrac{y}{z}\cdot\vec{j}+\dfrac{z}{x}\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу тела с переменной плотностью?

2. Оператор Лапласа и его некоторые применения.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 30

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x;y)\,dx\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y = x^2 + 2x;\ y = x + 2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;$ $y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = 5\left(x^2 + y^2\right)$.

4. Вычислить центр масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x = 6\sqrt{y^2 + z^2};\ y^2 + z^2 = 9;\ x \ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 3z;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 15x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, где $0 \le x \le \frac{7}{9}$ при заданной плотности $\mu = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+x)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx + \left(2xy - x^2 - 3y^2\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S (2x+3y+2z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: x + 3y + z = 3$, отсеченная координатными плоскостями.

9. Найти угол между градиентами скалярных полей, $u = xy^2z$ и $v = \sqrt{2}\cdot x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}\cdot z^2$ в точке $M\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x+y-z)\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + (x+2z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции и координаты центра тяжести некоторого тела?

2. Некоторые применения оператора Гамильтона.

3. Как найти момент инерции поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 31

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D \left(12xy+27x^2y^2\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt[3]{x};\ (x\geq 0)$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями: $2x+3y-12=0;$ $2z=y^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}$, где $V: \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность тела: $V: 25\left(x^2+y^2\right)=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0;\ \mu=2\left(x^2+y^2\right)$.

6. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями: $V: 4y=\sqrt{x^2+z^2};\ x^2+z^2=16;\ y\geq 0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α от точки M к точке N: $\vec{F}=\left(x^2-2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2-2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок от точки $M(-4;0)$ до $N(0;2)$.

8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int_K \frac{y\cdot dS}{x}$, где K -дуга полукубической параболы $y^2=\frac{4}{9}x^3$ от точки $A\left(3;2\sqrt{3}\right)$ до $B\left(8;\frac{32\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k};\ P: x+y+z=1$.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S -часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint_S (4x-y+4z)\cdot dS$: $P: 2x+2y+z=4$.

Контрольные вопросы

1. Что называется двойным интегралом?

2. Какое поле называется скалярным?

3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 32

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)\,dx$.

2. вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2+y^2-2y=0$; $x^2+y^2-6y=0$; $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $x=0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\dfrac{5\sqrt{x}}{3}$; $y=\dfrac{5x}{9}$; $z\ge 0$; $z=\dfrac{5}{9}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(2x-3y+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V: \begin{array}{c} -1\le x\le 0 \\ 0\le y\le 1 \\ 2\le z\le 3 \end{array}$.

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V: x^2+y^2=2x;\ \ x+z=2;\ y\ge 0;\ x\ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha xy\,dl$, где α - часть окружности $x^2+y^2=9$, лежащая в первой четверти.

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(1-x^2\right)dx + x\left(1+y^2\right)dy$, где $\alpha: x^2+y^2=R^2$.

8. вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль кривой α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$: $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок прямой MN.

9. Вычислить массу дуги α при заданной плотности μ: $\alpha: \rho=e^{\frac{3}{4}\varphi}$; $\varphi\in\left[0;\dfrac{4\pi}{7}\right]$; $\mu=\rho^{\frac{4}{3}}$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$; $P: 2x+3y+z=1$.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 33

1. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x = 4 - x^2;\ y = x^2 - 2x$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2 - 2y + z\right) dxdydz$, где $V: \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 3 \end{matrix}$.

3. Найти массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми, если $\mu = \mu(x; y)$ - поверхностная плотность пластинки $D: x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 9;\ x \ge 0;\ y \le 0;\ \mu = \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}$.

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x + y = 4;\ x = \sqrt{2y};\ z \ge 0;\ z = \dfrac{3x}{5}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{x \cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9;\ y \le x;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где α - отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = \left(x^2 + 2y\right) \cdot \vec{i} + \left(y^2 + 2x\right) \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$ от точки $M(0;2)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$ и $v = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6} \cdot z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = (2x - z) \cdot \vec{i} + (y - x) \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$, через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x - y + z = 2$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x - y + z) dS$, где $P: x - y + z = 2$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.

3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 34

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2;\ x\geq 0$.

2. Найти площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x^2-2x+y^2=0;\ x^2-4x+y^2=0;\ y=0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $V: x+y=4;\ y=\sqrt{2x};\ z\geq 0;\ z=3y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y^2dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 36;\ x\geq 0;\ z\geq 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность $V: x^2+y^2+z^2=4;\ \ x^2+y^2=4z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ \mu=10z$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=1+\sin\varphi$, если $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=\sin\left(\frac{\pi}{4};\frac{\varphi}{2}\right)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+2x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=4,\ (y\geq 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(-2;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+2y+z=4$ с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(y+x)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x+2y+2z=4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

2. Какое поле называется векторным?

3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 35

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_{D} f\left(x;y\right)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями: $D: y=0;\ y \geq x;\ y=-\sqrt{2-x^2}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\frac{5}{6}\sqrt{x};\ y=\frac{5}{18}x;\ z\geq 0;\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

3. Найти массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $x=2;\ y\geq 0;\ y^2=2x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7x^2}{4}+y$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=8x;\ x=2$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=2\left(x^2+y^2\right);\ z=2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\sqrt{2y}dl$, где α - первая арка циклоиды: $\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right) \\ y=2\left(1-\cos t\right) \end{cases}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=x^3\cdot\vec{i}-y^3\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=4\ \left(x\geq 0; y\geq 0\right)$ от точки $M\left(2;0\right)$ до точки $N\left(0;2\right)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=u\left(x;y;z\right)$ и $v=v\left(x;y;z\right)$ в точке $M\left(2;\frac{1}{3};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; $u=x^2yz^3;\ v=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=\left(2z-x\right)\cdot\vec{i}+\left(x-y\right)\cdot\vec{j}+\left(3x+z\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+y+2z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}:(y-z)\cdot\vec{i}+3xyz\cdot\vec{j}+(z-x)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.
2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 36

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=-x^3;\ y=\sqrt{x}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2+y^2-4y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x^2dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=16;\ z\geq 0$.

5. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $x=19\sqrt{2y};\ x=4\sqrt{2y};\ z\geq 0;\ z-y=2$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2(1-\cos\varphi)$, где $\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi$, если плотность $\mu=\cos\frac{\varphi}{2}$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y+2z)\cdot\vec{i}+(x+2z)\cdot\vec{j}+(x-2y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+y+2z=2$ и координатными плоскостями.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+(x+3y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(y-z)\cdot\vec{i}+(x+z)\cdot\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?

2. Что такое дивергенция векторного поля?

3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

Вариант 37

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x^2+y^2=1;\ \ x^2+y^2=4;\ (x \ge 0;\ y \ge 0)$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(5x + \dfrac{3z}{2}\right)dxdydz$, где $V: y=x;$ $y=0;\ x=1;\ z \ge 0;\ z=x^2+15y^2$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: z=9\sqrt{x^2+y^2};\ z=36$.

5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, где α -дуга кривой: $x=\cos t;\ y=\sin t;\ z=\sqrt{3}\cdot t;\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

6. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (x+y)\cdot\vec{i} + (x-y)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha:\ y=x^2$ от точки $M(-1;1)$ до точки $N(1;1)$.

7. Найти производную скалярного поля: $u = x + \ln\left(z^2+y^2\right)$ в точке $M(2;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S -часть плоскости $P: x+2y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (5x+2y+2z)dS$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} + 2y\cdot\vec{j} + (x+y-z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2y-z)\cdot\vec{i} + (x+y)\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+2y+2z=4$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.

2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?

3. Вычисление работы силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α с помощью криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 38

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy$ в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, ели область D задана указанными линиями: $D: x=\sqrt{9-x^2};\ y=x;\ y\geq 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $y=\cos x;\ y\leq x+1;\ y\geq 0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y=6;\ y=\sqrt{3x};\ z\geq 0;\ z=4y$.

4. Найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $V: x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=6z;\ x\geq 0;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=90y$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=1-y^2-z^2;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\varphi;\ 0\leq\varphi\leq\dfrac{4}{3}$ при заданной плотности $\mu=\dfrac{3}{4}\rho$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка: $\int\limits_\alpha xdy-x^2ydx$, где α часть кривой $y=x^3$ от точки $M\left(0;0\right)$ до точки $N\left(2;8\right)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z^3}{xy^2}$ и $v=9\sqrt{2}\cdot x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(2z-x\right)\cdot\vec{i}+\left(x+y\right)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(x+y\right)\cdot\vec{i}-2xz\cdot\vec{j}-3\left(y+z\right)\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

3. Физические приложения двойного интеграла.
4. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 39

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: y = x^2 + 2;\ x \ge 0;\ x = 2;\ y = x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x = 1$; $y \ge 0;\ y^2 = 4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = 6x + 3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)}$, где $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах $\iiint\limits_V \frac{x dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ y \le x;\ z \ge 0$.

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z = 3\left(x^2 + y^2\right);\ x^2 + y^2 = 9;\ z \ge 0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$, при заданной плотности $\mu = \rho^2$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + \left(xy^2 + y\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)\right)dy$, где $\alpha: x^2 + y^2 = 4$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$ в точке $M(1;5;-2)$ по направлению $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S-часть плоскости $P: x + y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (6x - y + 8z)\,dS$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x - y)\cdot\vec{i} + (2y + z)\cdot\vec{j} + (2z - x)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x - 3y + z = 6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 40

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x;y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $y=5\sqrt{x};\ y=\dfrac{5x}{3};\ z\ge 0;\ z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного указанными поверхностями: $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=9z^2;\ x\ge 0; y\ge 0;\ z\ge 0$, если поверхностная плотность $\mu=10z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(y^2-2xy\right)dl$, где α - отрезок прямой от точки $A(-3;4)$ до $B(3;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(2x-y)\cdot\vec{i}+\left(x^2+x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль кривой $\alpha: x^2+y^2=9;\ y\ge 0$ от точки $M(3;0)$ до точки $N(-3;0)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{x^2}{yz^2}$ и $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y+z)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}-2z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x-y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y+z)\cdot\vec{i}+2z\cdot\vec{j}+(y-7z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+3y+z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как изменить прядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

Вариант 41

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy+9x^2y^2\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=-x^2;\ y=\sqrt{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=16;\ x\ge 0;\ y\le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, заданного указанными кривыми: $V: y=17\sqrt{2x};\ y=2\sqrt{2x};\ z\ge 0;\ z+x=\dfrac{1}{2}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=36;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ y\le -x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\sin\varphi;\ 0\le\varphi\le\pi$, при заданной плотности $\mu=\rho^3$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 9x^2+y^2=1;\ x\ge 0;\ y\ge 0$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(0;3)$.

8. Найти производную скалярного поля u: $u=y\cdot\ln\left(1+x^2\right)-arctgz$ в точке $M(0;1;1)$ по направлению $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+3y+2z=6$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+(y+z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 3x-2y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Вариант 42

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x=4-y^2;\ x-y+2=0$

.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $D: x=1;\ y\ge 0;\ y^2=4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = x+3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz$, где $V: z=x^2+3y^2;\ z\ge 0;\ y\ge 0;\ x=1;\ y=x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x=2\sqrt{y^2+z^2};\ y^2+z^2=4;\ x\ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела $V: x^2+y^2=z;\ z=3$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2+y^2-4x=0$ в третьей четверти.

7. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z}{x^3y^2}$ и $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$ в точке $M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

.

8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_\alpha (x-y)^2\,dx-(x+y)^2\,dy$, где α - часть прямой между точками $M(2;0)$ и $N(4;2)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (2x+5y+10z)\,dS$, $P: 2x+y+3z=6$.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4z\cdot\vec{i}+(x-y-z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x-2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

Вариант 43

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $x \ge 0;\ y \ge x;\ y = \sqrt{9 - x^2}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2 - 4x + y^2 = 0;\ x^2 - 8x + y^2 = 0;\ y = 0;\ y = \sqrt{3} \cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного указанными поверхностями: $x = \frac{5}{2}\sqrt{y};\ x = \frac{5}{6}y;\ z \ge 0;\ z = \frac{5}{6}\left(3 + \sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^4}$, где $V: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $4y = x^2 + z^2;\ y = 9$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2 + y^2 = 2x$ во второй четверти.

7. Вычислить работу силы $\vec{F} : \vec{F} = \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2 z$ в точке $M(1;3;2)$ по направлению $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a} : \vec{a} = (y + z) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + (y - 2) \cdot z \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = 6x^2 \cdot \vec{i} + 3\cos(3x + 2z) \cdot \vec{j} + \cos(3y + 2z) \cdot \vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 44

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $D: y^2=2x;\ x^2=2y;\ x\le 1$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy+18x^2y^2\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $D: x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=9;\ x\le 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{y-4x}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=5\sqrt{y^2+z^2};\ x=20$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+z^2=2y;\ y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(x^2-\dfrac{y^3}{3}\right)dx+\left(\dfrac{x^3}{3}-y^2\right)dy$, где $\alpha: x^2+y^2=4$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z^2}{xy^2}$ и $v=3\sqrt{2}x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=3x\cdot\vec{i}+(z+y)\cdot\vec{j}+(x-z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x+3y+z=3$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+(y-2z)\cdot\vec{j}+(2x-y+2z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x+2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

Вариант 45

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $xy=1;\ \ y=x^2;\ y=2;\ x=0$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16;\ y=\sqrt{3}x;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=20\sqrt{2y};\ x=5\sqrt{2y};\ z=0;\ x+y=\frac{1}{2}$.

5. Найти момент инерции однородного тела $V:\ x^2+z^2=2y;\ y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить массу дуги α, описываемой уравнением: $\rho=4;\ \ 0\le\varphi\le\sqrt{3}$ при заданной плотности $\mu=15\rho^3$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_{\alpha}\frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где α - отрезок прямой от точки $M(1;1)$ до точки $N(2;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};3\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

9. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=3x^2y\cdot\vec{i}-2xy^2\cdot\vec{j}-2xyz\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x+3y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_D(3x+10y-z)\,dS$.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 46

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x=\frac{5}{3}\sqrt{y};$ $x=\frac{5y}{9};\ z\ge 0;\ z=\frac{5}{9}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=35z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=9-x^2-y^2;\ z=0$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α, заданной уравнением: $\rho=5\cdot e^{\frac{5\varphi}{12}};\quad 0\le\varphi\le 1$, при заданной плотности $\mu=\frac{12}{13}\cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\frac{x^2}{yz^2};\quad v=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x-2y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4y-x+4z)dS$.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y-z)\cdot\vec{i}+(2x+y)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 2x+y+z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 47

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: x = y^2 + 1;\ x + y = 3$
.

2. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x + y = 8;\ y = \sqrt{4x};\ z = 0;\ z = 3y$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 9;\ x^2 + y^2 = 16;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V x^2 dx\,dy\,dz$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \le x$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = y;\ x^2 + z^2 = 10;\ y \ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha} \left(xy + y^2\right) dl$, где α - часть прямой от точки $A(-2;3)$ до точки $B(2;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (xy - x)\cdot\vec{i} + \dfrac{x^2}{2}\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y = 2\sqrt{x}$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(1;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1)$ в точке $M(1;1;2)$ по направлению $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot\vec{i} + 2z\cdot\vec{j} + (y - 7z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + 3y + z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = 3(x - z)\cdot\vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\cdot\vec{j} + 3z\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидаольности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 48

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x;y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y^2 = -8x+16;\ y^2 = 24x+48$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(27+54y^3\right)dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \geq 0;\ x = 1;\ z \geq 0;\ z = \sqrt{xy}$

.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y^2+z^2 = x;\ y^2+z^2 = 9;\ x \geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2+y^2+z^2 = 9;\ x^2+y^2 = 4;\ y \geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 2z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2y+xy\right)dl$, где α - ломаная ABC, $A(0;0);\ B(3;0);\ C(0;3)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xy^2dx + \frac{3}{2}x^2ydy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;2);\ C(1;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{y^3}{x^2z}$ и $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$ в точке $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}};\frac{1}{2}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S $\iint\limits_S (5x+y-z)dS$, где S - часть плоскости $P: x+2y+2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x-y)\cdot\vec{i} + (2y+z)\cdot\vec{j} + (2z-x)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x-3y+z = 6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 49

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластики D, ограниченной кривыми: $x = 2;\quad y = 0;\ 2y^2 = x;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность $\mu = \frac{7x^2}{4} + y$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V : x^2 + y^2 + z^2 = 16;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \ge x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $3\sqrt{x^2 + z^2} = y;\ x^2 + z^2 = 16;\ y \ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2 + y^2 = 2z;\ z = 2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α: $\begin{cases} x = e^t\left(\cos t + \sin t\right); \\ y = e^t\left(\cos t - \sin t\right); \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{1}{3}$ при заданной плотности $\mu = \frac{3}{2}e^{2t}$.

7. Найти работу силы $\vec{F} : \vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)$ при перемещении вдоль линии $\alpha : x^2 + y^2 = 9,\ y \ge 0$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(-3;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = 5xy^3z^2$ в точке $M_1\left(2;1;-1\right)$ по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2\left(4;-3;0\right)$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = \left(2y - z\right)\cdot\vec{i} + \left(x + 2y\right)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P : x + 3y + 2z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = \left(x + y - z\right)\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + \left(x + z\right)\cdot\vec{k}$ является соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 50

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана следующими линиями: $y \ge 0;\ x+2y-12=0;\ y=\lg x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x=2;\quad y\ge 0;\ y^2=\dfrac{x}{2}$ если поверхностная плотность пластинки $\mu = 4x+6y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5}$, где $V: \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2+y^2=4y;\ z=4-x^2;\ z\ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=9;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2-xy\right)dl$, где α - ломаная ABC, $A(2;1);\ B(6;1);\ C(4;-1)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha (x+y)^2\,dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где α - верхняя половина окружности $x^2+y^2=9$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=xyz$ и $v=x^2+9y^2+6z^2$ в точке $M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S (6x+y+4z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 3x+3y+z=3$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=(x+2z)\cdot\vec{i}+(y-3z)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 3x+2y+2z=6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.

2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.

3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 51

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ \ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2;\ x\geq 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-4y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=\sqrt{3}x;\ x=0$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=9;\ x\leq 0;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{y-2x}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $z=x^2+y^2+1;\ x^2+y^2=4x;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=x^2;\ y^2+z^2=9;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \begin{cases} x=4\left(\cos t+t\cdot\sin t\right); \\ y=4\left(\sin t-t\cdot\cos t\right); \end{cases}$ $0\leq t\leq 2$, при заданной плотности $\mu=t^2+1$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=y\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 2x^2+y^2=1;\ y\geq 0$ от точки $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ до точки $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$ в точке $M\left(1;1;0\right)$ по направлению $\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4x\cdot\vec{i}+\left(x-y-z\right)\cdot\vec{j}+\left(3y+2z\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+y+z=4$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+\left(x+z\right)\cdot\vec{j}+\left(y+z\right)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x+3y+z=3$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 52

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x;y)\,dx + \int_1^0 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x;y)\,dx$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint_V 63\left(1+2\sqrt{y}\right)dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = \sqrt{xy}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченного кривыми: $y^2 = 2x+1;\ x - y = 1$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $\sqrt{x^2+y^2} = 3z;\ x^2+y^2 = 4;\ \ z \ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2 = 16;\ x^2+y^2 = 9z^2;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 5z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int_\alpha \sqrt{2y}\,dl$, где α - первая арка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции $u(x;y)$. Найти эту функцию: $\left(20x^3 - 21x^2y + 2y\right)dx + \left(3 + 2x - 7x^3\right)dy$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \dfrac{x^2}{y^2z^3}$ и $v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot z}$ в точке $M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint_S (3x - 2y + 6z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 2x + y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным, соленоидальным или гармоническим: $\vec{a} = (x+y)\cdot\vec{i} + (y+z)\cdot\vec{j} + 2(x-z)\cdot\vec{k}$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.

2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.

3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 53

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=\sqrt{x};\ y=2\sqrt{x};\ x=4$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=9;\ x\ge 0;\ y\le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{5x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить объем тела V, заданного указанными поверхностями: $y=6\sqrt{3x};\ y=\sqrt{3x};\ z\ge 0;\ z+x=3$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y\ge 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x;\ z\ge 0$.

5. Вычислить момент инерции тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=4;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=\ln x;\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$, если заданная плотность $\mu=2x^2$.

7. Найти работу силы $\vec{F}=(xy-x)\cdot\vec{i}+xy\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y=2\sqrt{x}$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(4;4)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z-3z$ в точке $M_1(1;-2;-1)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(13;-5;0)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x+2y+z=6$ с координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+3z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+4y+2z=8$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?

2. Способы вычисления потока векторного поля.

3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 54

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy$, где D: $x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right)dx\,dy\,dz$, где V: $y=9x;\ y\ge 0;\ x=1;\ z\ge 0;\ z=\sqrt{xy}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=9;\ x^2+y^2=16;\ x\ge 0;\ y\ge 0$ если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

4. Найти объем тела V, заданного указанными поверхностями: $z=4-y^2;\ x^2+y^2=4x;\ z\ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2+z^2=y;\ y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где α - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;0);\ C(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{1}{x^2yz}$ и $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot z}$ в точке $M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхность интеграл первого рода по поверхности $S:\iint\limits_S (2x-3y+z)dS$, где S - часть плоскости $P: x+2y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+2y+z=4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.

3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 55

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x;y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2-6y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, заданного следующими поверхностями: $x=16\sqrt{2y};\ x=\sqrt{2y};\ z\geq 0;\ z+y=2$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=6z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $V:\ x=y^2+z^2;\ y^2+z^2=1;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=-3(\cos t - t\sin t) \\ y=-3(\sin t - t\cos t)\end{cases}$ $0\leq t\leq \frac{1}{3}$ при плотности $\mu=t$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$ в точке $M(1;-3;4)$ по направлению $\vec{l}=\vec{j}-\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(3x+y)\cdot\vec{i}+(x+z)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(2x-yz)\cdot\vec{i}+(xz-2y)\cdot\vec{j}+2xyz\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2.Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 56

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=(x-4)^2$; $y=16-x^2$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной следующими кривыми: $x=2;\ y\ge 0;\ 2y^2=x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7}{2}x^2+6y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=1;\ y\ge x;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного ограничивающими поверхностями: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$; $x^2+y^2=9;\ z=0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=10\cos^3 t; \\ y=10\sin^3 t; \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=2\cos^2 t$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha (x+y)\,dx+(y-x)\,dy$, где $\alpha:\begin{cases} y=x^2; \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\frac{x}{yz^2}$ и $v=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности $S: \iint\limits_S (2x+3y-z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 2x+y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+3y\cdot\vec{j}+(y-z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x-y-2z=-2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.

2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?

3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 57

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 25;\ x \ge 0;\ y \le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{x - 5y}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz$, где V: $z = 10y;\ x + y = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y = 3\sqrt{x^2 + z^2};\ x^2 + z^2 = 36;\ \ y \ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V: $y^2 + z^2 = x^2;\quad y^2 + z^2 = 1;\ x \ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{x + 2y + 5}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;-2)$ до точки $B(1;0)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение $\left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + \left(2 - 6xy\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x; y)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u = xy - \dfrac{x}{z}$ в точке $M(-4;3;-1)$ по направлению $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x + y)\cdot\vec{i} + (x + z)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: x + 2y + z = 2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = xy(3x - 4y)\cdot\vec{i} + x^2(x - 4y)\cdot\vec{j} + 3z^2\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.

2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.

3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

Вариант 58

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f(x;y)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f(x;y)\,dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y=\frac{1}{x};\ y=x;\ x=2$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $z=\sqrt{y};\ \ y=2x;\ y=3;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_{V} \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y=x;\ z\ge 0;\ x\ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $49\left(x^2+y^2\right)=4z^2;\ 7\left(x^2+y^2\right)=2z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=20xz$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\left(2z-\sqrt{y^2+x^2}\right)dl$, где α - первый виток канонической винтовой линии $x=t\cos t;\ y=t\sin t;\ z=t$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z+z^2x$ в точке $M_1(1;-1;2)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(3;4;-1)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y+z)\cdot\vec{i}+(x+6y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x+3y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?

2. Оператор Гамильтона.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 59

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана указанными линиями: $x=1;\ y=-\sqrt[3]{x};\ y=x^3$.

2. Найти массу пластинки D, заданной указанными линиями: $D: x=2;\ y^2=2x;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{7x^2}{4}+\dfrac{y}{2}$.

3. Найти площадь области D, заданной ограничивающими ее линиями: $x^2-4x+y^2=0;\ x^2-6x+y^2=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}x$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2\le 9;\ y\ge 0;\ y\le \dfrac{x}{\sqrt{3}};\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y=3\sqrt{x^2+z^2};\ y=9$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=2+2\arcsin\sqrt{x};\ \dfrac{1}{4}\le x\le 1$ при заданной плотности $\mu=x^2+x$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xdy-ydx$, где α - контур треугольника ABC, $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=z^2+2arctg(x-y)$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S (7x+y+2z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 3x-2y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=\dfrac{x}{y}\cdot\vec{i}+\dfrac{y}{z}\cdot\vec{j}+\dfrac{z}{x}\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу тела с переменной плотностью?

2. Оператор Лапласа и его некоторые применения.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 60

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x;y)\,dx\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y = x^2 + 2x;\ y = x + 2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_{V} (3x + 4y)\,dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \geq 0;\ x = 1;\ z \geq 0;\ z = 5\left(x^2 + y^2\right)$.

4. Вычислить центр масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x = 6\sqrt{y^2 + z^2};\ y^2 + z^2 = 9;\ x \geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 3z;\ x \geq 0;\ y \geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 15x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha : y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, где $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$ при заданной плотности $\mu = \frac{27}{\sqrt{2}}(1 + x)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx + \left(2xy - x^2 - 3y^2\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_{S} (2x + 3y + 2z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: x + 3y + z = 3$, отсеченная координатными плоскостями.

9. Найти угол между градиентами скалярных полей, $u = xy^2z$ и $v = \sqrt{2} \cdot x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} \cdot z^2$ в точке $M\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z) \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции и координаты центра тяжести некоторого тела?

2. Некоторые применения оператора Гамильтона.

3. Как найти момент инерции поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 61

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt[3]{x};\ (x \ge 0)$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями: $2x+3y-12=0;$ $2z=y^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}$, где $V: \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность тела: $V: 25\left(x^2+y^2\right)=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ \mu=2\left(x^2+y^2\right)$.

6. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями: $V: 4y=\sqrt{x^2+z^2};\ x^2+z^2=16;\ y\ge 0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α от точки M к точке N: $\vec{F}=\left(x^2-2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2-2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок от точки $M(-4;0)$ до $N(0;2)$.

8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_K \frac{y\cdot dS}{x}$, где K -дуга полукубической параболы $y^2=\frac{4}{9}x^3$ от точки $A\left(3;2\sqrt{3}\right)$ до $B\left(8;\frac{32\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k};\ P: x+y+z=1$.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S -часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x-y+4z)\cdot dS$: $P: 2x+2y+z=4$.

Контрольные вопросы

1. Что называется двойным интегралом?

2. Какое поле называется скалярным?

3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 62

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)\,dx$.

2. вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2+y^2-2y=0$; $x^2+y^2-6y=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x=0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\frac{5\sqrt{x}}{3}$; $y=\frac{5x}{9}$; $z\ge 0$; $z=\frac{5}{9}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(2x-3y+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V:\ \begin{matrix} -1\le x\le 0 \\ 0\le y\le 1 \\ 2\le z\le 3 \end{matrix}$.

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V: x^2+y^2=2x$; $x+z=2$; $y\ge 0$; $x\ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha xy\,dl$, где α - часть окружности $x^2+y^2=9$, лежащая в первой четверти.

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(1-x^2\right)dx + x\left(1+y^2\right)dy$, где $\alpha: x^2+y^2=R^2$.

8. вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль кривой α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$: $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок прямой MN.

9. Вычислить массу дуги α при заданной плотности μ: $\alpha:\rho=e^{\frac{3}{4}\varphi}$; $\varphi\in\left[0;\frac{4\pi}{7}\right]$; $\mu=\rho^{\frac{4}{3}}$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$; $P: 2x+3y+z=1$.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 63

1. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x = 4 - x^2;\ y = x^2 - 2x$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2 - 2y + z\right) dxdydz$, где $V:\ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 3 \end{matrix}$.

3. Найти массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми, если $\mu = \mu(x; y)$ - поверхностная плотность пластинки $D: x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 9;\ x \ge 0;\ y \le 0;\ \mu = \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}$.

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x + y = 4;\ x = \sqrt{2y};\ z \ge 0;\ z = \dfrac{3x}{5}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{x \cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9;\ y \le x;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где α - отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = \left(x^2 + 2y\right) \cdot \vec{i} + \left(y^2 + 2x\right) \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$ от точки $M(0;2)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$ и $v = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6} \cdot z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = (2x - z) \cdot \vec{i} + (y - x) \cdot \vec{j} + (x + 2z) \cdot \vec{k}$, через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P:\ x - y + z = 2$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x - y + z) dS$, где $P: x - y + z = 2$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.

3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 64

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^2;\ x \ge 0$.

2. Найти площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x^2 - 2x + y^2 = 0;\ x^2 - 4x + y^2 = 0;\ y = 0;\ y = \sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $V: x + y = 4;\ y = \sqrt{2x};\ z \ge 0;\ z = 3y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36;\ x \ge 0;\ z \ge 0;\ y = \sqrt{3}\cdot x$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если $\mu = \mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ \ x^2 + y^2 = 4z^2;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ \mu = 10z$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 1 + \sin\varphi$, если $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu = \sin\left(\frac{\pi}{4};\frac{\varphi}{2}\right)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (x+y)\cdot\vec{i} + 2x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2 + y^2 = 4,\ (y \ge 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(-2;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + (2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x + 2y + z = 4$ с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2y-z)\cdot\vec{i} + (y+x)\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x + 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

2. Какое поле называется векторным?

3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 65

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями: $D: y=0;\ y\ge x;\ y=-\sqrt{2-x^2}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\frac{5}{6}\sqrt{x};\ y=\frac{5}{18}x;\ z\ge 0;\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

3. Найти массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $x=2;\ y\ge 0;\ y^2=2x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7x^2}{4}+y$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=8x;\ x=2$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=2\left(x^2+y^2\right);\ z=2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{2y}\,dl$, где α - первая арка циклоиды: $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=x^3\cdot\vec{i}-y^3\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=4\ (x\ge 0; y\ge 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=u(x;y;z)$ и $v=v(x;y;z)$ в точке $M\left(2;\frac{1}{3};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; $u=x^2yz^3;\ v=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}+(3x+z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+y+2z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}:(y-z)\cdot\vec{i}+3xyz\cdot\vec{j}+(z-x)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.
2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 66

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=-x^3;\ y=\sqrt{x}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2+y^2-4y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=16;\ z\ge 0$.

5. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $x=19\sqrt{2y};\ x=4\sqrt{2y};\ z\ge 0;\ z-y=2$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2(1-\cos\varphi)$, где $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$, если плотность $\mu=\cos\frac{\varphi}{2}$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y+2z)\cdot\vec{i}+(x+2z)\cdot\vec{j}+(x-2y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+y+2z=2$ и координатными плоскостями.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+(x+3y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(y-z)\cdot\vec{i}+(x+z)\cdot\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?

2. Что такое дивергенция векторного поля?

3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

Вариант 67

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x^2+y^2=1;\ \ x^2+y^2=4;\ \left(x\ge 0;\ y\ge 0\right)$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dxdydz$, где $V: y=x;$ $y=0;\ x=1;\ z\ge 0;\ z=x^2+15y^2$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: z=9\sqrt{x^2+y^2};\ z=36$.

5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, где α -дуга кривой: $x=\cos t;\ y=\sin t;\ z=\sqrt{3}\cdot t;\ \ 0\le t\le 2\pi$.

6. Найти работу силы $\vec{F}:\vec{F}=\left(x+y\right)\cdot\vec{i}+\left(x-y\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии α : $y=x^2$ от точки $M\left(-1;1\right)$ до точки $N\left(1;1\right)$.

7. Найти производную скалярного поля: $u=x+\ln\left(z^2+y^2\right)$ в точке $M\left(2;1;1\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S -часть плоскости $P: x+2y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S \left(5x+2y+2z\right)dS$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}:\vec{a}=\left(x+z\right)\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}+\left(x+y-z\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(2y-z\right)\cdot\vec{i}+\left(x+y\right)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+2y+2z=4$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.

2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?

3. Вычисление работы силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α с помощью криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 68

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, ели область D задана указанными линиями: $D: x=\sqrt{9-x^2};\ y=x;\ y\ge 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $y=\cos x;\ y\le x+1;\ y\ge 0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y=6;\ y=\sqrt{3x};\ z\ge 0;\ z=4y$.

4. Найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $V: x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=6z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=90y$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=1-y^2-z^2;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\varphi;\ 0\le\varphi\le\dfrac{4}{3}$ при заданной плотности $\mu=\dfrac{3}{4}\rho$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка: $\int\limits_\alpha xdy-x^2ydx$, где α часть кривой $y=x^3$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(2;8)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z^3}{xy^2}$ и $v=9\sqrt{2}\cdot x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3};2;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x+y)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}-2xz\cdot\vec{j}-3(y+z)\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

5. Физические приложения двойного интеграла.
6. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 69

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: y = x^2 + 2;\ x \geq 0;\ x = 2;\ y = x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x = 1$; $y \geq 0;\ y^2 = 4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = 6x + 3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)}$, где $V: \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах $\iiint\limits_V \frac{x dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ y \leq x;\ z \geq 0$.

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z = 3\left(x^2 + y^2\right);\ x^2 + y^2 = 9;\ z \geq 0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 8\cos\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$, при заданной плотности $\mu = \rho^2$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + \left(xy^2 + y\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)\right)dy$, где $\alpha: x^2 + y^2 = 4$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$ в точке $M(1;5;-2)$ по направлению $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S-часть плоскости $P: x + y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (6x - y + 8z)\,dS$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x - y)\cdot\vec{i} + (2y + z)\cdot\vec{j} + (2z - x)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x - 3y + z = 6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 70

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x;y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $y=5\sqrt{x};\ y=\frac{5x}{3};\ z\geq 0;\ z=5+\frac{5\sqrt{x}}{3}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного указанными поверхностями: $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=9z^2;\ x\geq 0; y\geq 0;\ z\geq 0$, если поверхностная плотность $\mu=10z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(y^2-2xy\right)dl$, где α - отрезок прямой от точки $A(-3;4)$ до $B(3;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(2x-y)\cdot\vec{i}+\left(x^2+x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль кривой $\alpha: x^2+y^2=9;\ y\geq 0$ от точки $M(3;0)$ до точки $N(-3;0)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\frac{x^2}{yz^2}$ и $v=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y+z)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}-2z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x-y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y+z)\cdot\vec{i}+2z\cdot\vec{j}+(y-7z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+3y+z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как изменить прядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

Вариант 71

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, где $D: x = 1;\ y = -x^2;\ y = \sqrt{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной указанными кривыми: $x^2 + y^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 16;\ x \ge 0;\ y \le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, заданного указанными кривыми: $V: y = 17\sqrt{2x};\ y = 2\sqrt{2x};\ z \ge 0;\ z + x = \dfrac{1}{2}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2 + y^2 + z^2 = 36;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \le -x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 2\sin\varphi;\ 0 \le \varphi \le \pi$, при заданной плотности $\mu = \rho^3$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (x + y)\cdot\vec{i} + (x - y)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 9x^2 + y^2 = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(0;3)$.

8. Найти производную скалярного поля u: $u = y\cdot\ln\left(1 + x^2\right) - arctgz$ в точке $M(0;1;1)$ по направлению $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = (2y - z)\cdot\vec{i} + (x + 2y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x + 3y + 2z = 6$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y)\cdot\vec{i} + (y + z)\cdot\vec{j} + (3y + z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 3x - 2y + 2z = 6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Вариант 72

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x=4-y^2$; $x-y+2=0$

.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $D: x=1;\ y\geq 0;\ y^2=4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=x+3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz$, где $V: z=x^2+3y^2;\ z\geq 0;\ y\geq 0;\ x=1;\ y=x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x=2\sqrt{y^2+z^2};\ y^2+z^2=4;\ x\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела $V: x^2+y^2=z;\ z=3$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2+y^2-4x=0$ в третьей четверти.

7. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\frac{z}{x^3y^2}$ и $v=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$ в точке $M\left(1;2;\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

.

8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_\alpha (x-y)^2\,dx-(x+y)^2\,dy$, где α - часть прямой между точками $M(2;0)$ и $N(4;2)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (2x+5y+10z)\,dS$, $P: 2x+y+3z=6$.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4z\cdot\vec{i}+(x-y-z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x-2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

Вариант 73

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $x \ge 0;\ y \ge x;\ y = \sqrt{9-x^2}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2 - 4x + y^2 = 0;\ x^2 - 8x + y^2 = 0;\ y = 0;\ y = \sqrt{3} \cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного указанными поверхностями: $x = \frac{5}{2}\sqrt{y};\ x = \frac{5}{6}y;\ z \ge 0;\ z = \frac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$, где $V: \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $4y = x^2 + z^2;\ y = 9$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2 + y^2 = 2x$ во второй четверти.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F} = \left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{i} + y^2\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u = \ln\left(3-x^2\right) + xy^2z$ в точке $M(1;3;2)$ по направлению $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a} = (y+z)\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j} + (y-2)\cdot z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = 6x^2\cdot\vec{i} + 3\cos(3x+2z)\cdot\vec{j} + \cos(3y+2z)\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 74

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $D: y^2 = 2x;\ x^2 = 2y;\ x \le 1$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dx\,dy$, где $D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $D: x^2 + y^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 9;\ x \le 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{y - 4x}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2};\ x = 20$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = 2y;\ y = 2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(x^2 - \dfrac{y^3}{3}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{3} - y^2\right)dy$, где $\alpha: x^2 + y^2 = 4$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \dfrac{z^2}{xy^2}$ и $v = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3}; 2; \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = 3x\cdot\vec{i} + (z + y)\cdot\vec{j} + (x - z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x + 3y + z = 3$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + (y - 2z)\cdot\vec{j} + (2x - y + 2z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x + 2y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

Вариант 75

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $xy=1;\ \ y=x^2;\ y=2;\ x=0$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16;\ y=\sqrt{3}x;\ y\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=20\sqrt{2y};\ x=5\sqrt{2y};\ z=0;\ x+y=\frac{1}{2}$.

5. Найти момент инерции однородного тела V: $x^2+z^2=2y;\ y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить массу дуги α, описываемой уравнением: $\rho=4;\ \ 0\le\varphi\le\sqrt{3}$ при заданной плотности $\mu=15\rho^3$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_{\alpha}\frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где α - отрезок прямой от точки $M(1;1)$ до точки $N(2;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};3\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

9. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=3x^2y\cdot\vec{i}-2xy^2\cdot\vec{j}-2xyz\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x+3y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_D (3x+10y-z)\,dS$.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 76

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x=\dfrac{5}{3}\sqrt{y};$ $x=\dfrac{5y}{9};\ z\ge 0;\ z=\dfrac{5}{9}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=35z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=9-x^2-y^2;\ z=0$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α, заданной уравнением: $\rho=5\cdot e^{\frac{5\varphi}{12}};\quad 0\le\varphi\le 1$, при заданной плотности $\mu=\dfrac{12}{13}\cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}:\vec{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{x^2}{yz^2};\quad v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x-2y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4y-x+4z)\,dS$.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y-z)\cdot\vec{i}+(2x+y)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 2x+y+z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 77

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: x = y^2 + 1;\ x + y = 3$
.

2. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x + y = 8;\ y = \sqrt{4x};\ z = 0;\ z = 3y$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 9;\ x^2 + y^2 = 16;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V x^2 dx\, dy\, dz$, где $V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ y \le x$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = y;\ x^2 + z^2 = 10;\ y \ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(xy + y^2\right) dl$, где α - часть прямой от точки $A(-2;3)$ до точки $B(2;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (xy - x)\cdot \vec{i} + \dfrac{x^2}{2}\cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y = 2\sqrt{x}$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(1;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1)$ в точке $M(1;1;2)$ по направлению $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot \vec{i} + 2z\cdot \vec{j} + (y - 7z)\cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + 3y + z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = 3(x - z)\cdot \vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\cdot \vec{j} + 3z\cdot \vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидаольности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 78

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f(x;y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y^2 = -8x+16;\ y^2 = 24x+48$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(27+54y^3\right)dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \geq 0;\ x = 1;\ z \geq 0;\ z = \sqrt{xy}$

.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y^2+z^2 = x;\ y^2+z^2 = 9;\ x \geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2+y^2+z^2 = 9;\ x^2+y^2 = 4;\ y \geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 2z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2y+xy\right)dl$, где α - ломаная ABC, $A(0;0);\ B(3;0);\ C(0;3)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xy^2dx + \frac{3}{2}x^2ydy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;2);\ C(1;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{y^3}{x^2z}$ и $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$ в точке $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}};\frac{1}{2}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S $\iint\limits_S (5x+y-z)dS$, где S - часть плоскости $P: x+2y+2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x-y)\cdot\vec{i} + (2y+z)\cdot\vec{j} + (2z-x)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x-3y+z = 6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 79

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластики D, ограниченной кривыми: $x = 2;\quad y = 0;\ 2y^2 = x;\ y \geq 0$, если поверхностная плотность $\mu = \dfrac{7x^2}{4} + y$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16;\ y \geq 0;\ z \geq 0;\ y \geq x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $3\sqrt{x^2 + z^2} = y;\ x^2 + z^2 = 16;\ y \geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2 + y^2 = 2z;\ z = 2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α: $\begin{cases} x = e^t\left(\cos t + \sin t\right); \\ y = e^t\left(\cos t - \sin t\right); \end{cases}$ $0 \leq t \leq \dfrac{1}{3}$ при заданной плотности $\mu = \dfrac{3}{2}e^{2t}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(-3;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = 5xy^3z^2$ в точке $M_1(2;1;-1)$ по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(4;-3;0)$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2y - z)\cdot\vec{i} + (x + 2y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x + 3y + 2z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + (x + z)\cdot\vec{k}$ является соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 80

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана следующими линиями: $y \geq 0;\ x+2y-12=0;\ y=\lg x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x=2;\quad y\geq 0;\ y^2=\dfrac{x}{2}$ если поверхностная плотность пластинки $\mu = 4x+6y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}\right)^5}$, где $V: \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2+y^2=4y;\ z=4-x^2;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=9;\ x\geq 0$ относительно оси OX .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\left(x^2-xy\right)dl$, где α - ломаная ABC, $A(2;1);\ B(6;1);\ C(4;-1)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_{\alpha}(x+y)^2\,dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где α - верхняя половина окружности $x^2+y^2=9$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=xyz$ и $v=x^2+9y^2+6z^2$ в точке $M\left(1;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S : $\iint\limits_S(6x+y+4z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 3x+3y+z=3$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=(x+2z)\cdot\vec{i}+(y-3z)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 3x+2y+2z=6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 81

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\;\; y=\sqrt[3]{x};\; y=-x^2;\; x\geq 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-4y=0;\; x^2+y^2-8y=0;\; y=\sqrt{3}x;\; x=0$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=4;\; x^2+y^2=9;\; x\leq 0;\; y\geq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{y-2x}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $z=x^2+y^2+1;\; x^2+y^2=4x;\; z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=x^2;\; y^2+z^2=9;\; x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \begin{cases} x=4\left(\cos t+t\cdot\sin t\right); \\ y=4\left(\sin t-t\cdot\cos t\right); \end{cases}$ $0\leq t\leq 2$, при заданной плотности $\mu=t^2+1$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=y\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 2x^2+y^2=1;\; y\geq 0$ от точки $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ до точки $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$ в точке $M(1;1;0)$ по направлению $\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4x\cdot\vec{i}+\left(x-y-z\right)\cdot\vec{j}+\left(3y+2z\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+y+z=4$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+\left(x+z\right)\cdot\vec{j}+\left(y+z\right)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x+3y+z=3$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.

2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?

3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 82

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x;y)dx + \int_{1}^{0} dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x;y)dx$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint_V 63\left(1+2\sqrt{y}\right)dx\,dy\,dz$, где $V: y=x;\ y\geq 0;\ x=1;\ z\geq 0;\ z=\sqrt{xy}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченного кривыми: $y^2=2x+1;\ x-y=1$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $\sqrt{x^2+y^2}=3z;\ x^2+y^2=4;\ \ z\geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=16;\ x^2+y^2=9z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=5z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int_{\alpha}\sqrt{2y}dl$, где α - первая арка циклоиды

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции $u(x;y)$. Найти эту функцию: $\left(20x^3-21x^2y+2y\right)dx+\left(3+2x-7x^3\right)dy$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{x^2}{y^2z^3}$ и $v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot z}$ в точке $M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint_S(3x-2y+6z)dS$, где S - часть плоскости $P: 2x+y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным, соленоидальным или гармоническим: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+(y+z)\cdot\vec{j}+2(x-z)\cdot\vec{k}$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.

2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.

3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 83

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=\sqrt{x};\ y=2\sqrt{x};\ x=4$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=9;\ x\geq 0;\ y\leq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{5x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить объем тела V, заданного указанными поверхностями: $y=6\sqrt{3x};\ y=\sqrt{3x};\ z\geq 0;\ z+x=3$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9;\ y\geq 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=4;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=\ln x;\ \sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{15}$, если заданная плотность $\mu=2x^2$.

7. Найти работу силы $\vec{F}=(xy-x)\cdot\vec{i}+xy\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y=2\sqrt{x}$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(4;4)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z-3z$ в точке $M_1(1;-2;-1)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(13;-5;0)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x+2y+z=6$ с координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2z-x)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+3z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+4y+2z=8$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?

2. Способы вычисления потока векторного поля.

3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 84

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy$, где D: $x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(1+2x^3\right)dx\,dy\,dz$, где V: $y=9x;\ y\geq 0;\ x=1;\ z\geq 0;\ z=\sqrt{xy}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=9;\ x^2+y^2=16;\ x\geq 0;\ y\geq 0$ если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

4. Найти объем тела V, заданного указанными поверхностями: $z=4-y^2;\ x^2+y^2=4x;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2+z^2=y;\ y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где α - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;0);\ C(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{1}{x^2yz}$ и $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot z}$ в точке $M\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхность интеграл первого рода по поверхности $S:\iint\limits_S (2x-3y+z)dS$, где S - часть плоскости $P: x+2y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+2y+z=4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.

3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 85

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x;y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x;y)dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2-6y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, заданного следующими поверхностями: $x=16\sqrt{2y};\ x=\sqrt{2y};\ z\ge 0;\ z+y=2$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=z^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=6z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $V:\ x=y^2+z^2;\ y^2+z^2=1;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=-3(\cos t - t\sin t) \\ y=-3(\sin t - t\cos t)\end{cases}$ $0\le t\le \frac{1}{3}$ при плотности $\mu=t$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$ в точке $M(1;-3;4)$ по направлению $\vec{l}=\vec{j}-\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(3x+y)\cdot\vec{i}+(x+z)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=(2x-yz)\cdot\vec{i}+(xz-2y)\cdot\vec{j}+2xyz\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2.Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 86

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=(x-4)^2$; $y=16-x^2$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной следующими кривыми: $x=2;\ y\ge 0;\ 2y^2=x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7}{2}x^2+6y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=1;\ y\ge x;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного ограничивающими поверхностями: $z=2\sqrt{x^2+y^2};\ \ x^2+y^2=9;\ z=0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=10\cos^3 t; \\ y=10\sin^3 t; \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=2\cos^2 t$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha (x+y)\,dx+(y-x)\,dy$, где $\alpha:\begin{cases} y=x^2; \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\frac{x}{yz^2}$ и $v=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3z}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности $S:\iint\limits_S (2x+3y-z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 2x+y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+3y\cdot\vec{j}+(y-z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x-y-2z=-2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.

2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?

3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 87

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 25;\ x \geq 0;\ y \leq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{x - 5y}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$, где V: $z = 10y;\ x + y = 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y = 3\sqrt{x^2 + z^2};\ x^2 + z^2 = 36;\ \ y \geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V: $y^2 + z^2 = x^2;\ \ y^2 + z^2 = 1;\ x \geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha} \dfrac{dl}{x + 2y + 5}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;-2)$ до точки $B(1;0)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение $\left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + \left(2 - 6xy\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u = xy - \dfrac{x}{z}$ в точке $M(-4;3;-1)$ по направлению $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x + y)\cdot\vec{i} + (x + z)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: x + 2y + z = 2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = xy(3x - 4y)\cdot\vec{i} + x^2(x - 4y)\cdot\vec{j} + 3z^2\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.

2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.

3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

Вариант 88

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x;y)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x;y)\,dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y=\frac{1}{x};\ y=x;\ x=2$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $z=\sqrt{y};\ \ y=2x;\ y=3;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y=x;\ z\ge 0;\ x\ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $49\left(x^2+y^2\right)=4z^2;\ 7\left(x^2+y^2\right)=2z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=20xz$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(2z-\sqrt{y^2+x^2}\right)dl$, где α - первый виток канонической винтовой линии $x=t\cos t;\ y=t\sin t;\ z=t$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z+z^2x$ в точке $M_1(1;-1;2)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(3;4;-1)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(y+z)\cdot\vec{i}+(x+6y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x+3y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?

2. Оператор Гамильтона.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 89

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана указанными линиями: $x=1;\ y=-\sqrt[3]{x};\ y=x^3$.

2. Найти массу пластинки D, заданной указанными линиями: $D: x=2;\ y^2=2x;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{7x^2}{4}+\dfrac{y}{2}$.

3. Найти площадь области D, заданной ограничивающими ее линиями: $x^2-4x+y^2=0;\ x^2-6x+y^2=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}x$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2\le 9;\ y\ge 0;\ y\le\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ z\ge 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y=3\sqrt{x^2+z^2};\ y=9$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=2+2\arcsin\sqrt{x};\ \dfrac{1}{4}\le x\le 1$ при заданной плотности $\mu=x^2+x$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xdy-ydx$, где α - контур треугольника ABC, $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=z^2+2arctg(x-y)$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S(7x+y+2z)dS$, где S - часть плоскости $P: 3x-2y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=\dfrac{x}{y}\cdot\vec{i}+\dfrac{y}{z}\cdot\vec{j}+\dfrac{z}{x}\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу тела с переменной плотностью?

2. Оператор Лапласа и его некоторые применения.

3. Способы вычисления поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 90

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x;y)\,dx\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y = x^2 + 2x;\ y = x + 2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V (3x + 4y)\,dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;$ $y \geq 0;\ x = 1;\ z \geq 0;\ z = 5\left(x^2 + y^2\right)$.

4. Вычислить центр масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x = 6\sqrt{y^2 + z^2};\ y^2 + z^2 = 9;\ x \geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 3z;\ x \geq 0;\ y \geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 15x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, где $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$ при заданной плотности $\mu = \frac{27}{\sqrt{2}}(1 + x)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx + \left(2xy - x^2 - 3y^2\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$. Найти эту функцию.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: x + 3y + z = 3$, отсеченная координатными плоскостями.

9. Найти угол между градиентами скалярных полей, $u = xy^2z$ и $v = \sqrt{2}\cdot x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}\cdot z^2$ в точке $M\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + (x + 2z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции и координаты центра тяжести некоторого тела?

2. Некоторые применения оператора Гамильтона.

3. Как найти момент инерции поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода.