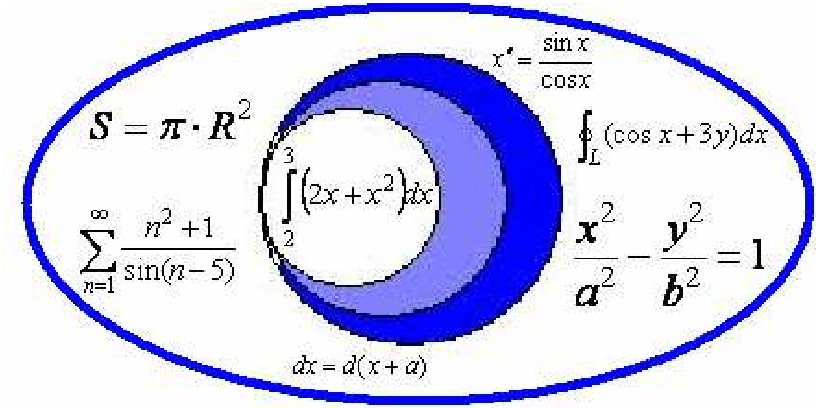
Министерство образования и науки Российской Федерации
Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Методические указания
к
выполнению
индивидуальных заданий при подготовке к промежуточным итоговым аттестациям
для студентов II курса заочной формы обучения



Белгород
2012

УДК 51

ББК 22.1
М 34

Составители:
канд. техн. наук, доц. Г.Л. Окунева
ст. преп. Т.Н. Лавриненко
ст. преп. С.В. Рябцева

Рецензент
д-р. физ.-мат. наук, доц. А.Г. Брусенцев

М 34 Методические указания к выполнению индивидуальных заданий при подготовке к промежуточным итоговым аттестациям для студентов II курса заочной формы обучения / сост.: Г.Л. Окунева, Т.Н. Лавриненко, С.В. Рябцева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. – 75 с.

В индивидуальных заданиях предложены стандартные упражнения и вопросы по теории по программам высшей математики третьего и четвертого семестров для студентов II курса заочной формы обучения.

Издание предназначено для бакалавров всех направлений.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 51
ББК 22.1

Введение

Изучение курсов высшей математики в ВУЗе помогает студенту ознакомится с основами математического аппарата, овладеть основными навыками его использования для решения теоретических и практических инженерных задач, развить логическое мышление и умение самостоятельно получать знания, используя научную литературу по математике и ее приложениям.

Самостоятельная работа с предлагаемыми заданиями позволяет повысить общий уровень математической подготовки, помогает развить умение применять математические знания на практике.

Методические указания для студентов II курса заочной формы обучения предназначены для самостоятельного изучения и подготовки к экзаменам по курсам высшей математики за второй курс. Выполненная индивидуальная работа является зачетной единицей при допуске к экзамену. Задания составлены в форме билета. Студент должен выполнить практическую часть предложенного билета и письменно ответить на вопросы билета.

Контрольная работа № 3

Темы:

1. Неопределенный и определенный интеграл.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Функции нескольких переменных.

Вариант 1

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^4-3}{x^3+x}$; б) $\int \frac{x^2dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int arctg5xdx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x+1}$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=x^2$, $y=5-x$, $x=0$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=3\cos^2 t$, $y=4\sin^2 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, oy; б) $\rho=1-\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'+y=\ln x+1$.

6. Найти решение задачи Коши: $y^3y''=4\left(y^4-1\right)$, $y(0)=\sqrt{2}$, $y'(0)=\sqrt{2}$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=6x+3y, \\ y'=-8x-5y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=xe^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $1{,}04^{2{,}03}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$; б) $z=xy$, $\varphi(x,y)=x+y-1$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование рациональных функций.
2. Однородные дифференциальные уравнения.
3. Непрерывность функции нескольких переменных.

Вариант 2

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x^2+14x+1}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\int 3x^2 arctgx dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y^2 = 9x$, $y = x+2$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x = 2\cos t$, $y = 5\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, oy; б) $\rho = 3(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' + y = \sin x$.

6. Найти решение задачи Коши: $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

9. Вычислить приближенно: $\sin 28° \cdot \cos 61°$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x, y)$; б) условный экстремум данной функции $z = (x, y)$, при условии $\varphi(x, y) = 0$: а) $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$; б) $z = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 1$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменны-ми.
3. Частные производные.

Вариант 3

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+27}{x^3+6x^2+9x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; в) $\int x\ln\left(x^2+3\right)dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=\left(x-2\right)^3$, $y=4x-8$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, oy; б) $\rho=5\left(1-\cos\varphi\right)$, $-\frac{\pi}{3}\le\varphi\le 0$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=8y^3$, $y\left(0\right)=1$, $y'\left(0\right)=2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=3x+y, \\ y'=x+3y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=\sqrt{xy}\cdot e^{\frac{x}{y}}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{1,05^2+3,01^2}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f\left(x,y\right)$; б) условный экстремум данной функции $z=\left(x,y\right)$, при условии $\varphi\left(x,y\right)=0$: а) $z=3xy-x^2-4y^2+4x-6y-1$; б) $z=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$, $\varphi\left(x,y\right)=x^2+y^2-1$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Вариант 4

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{7x^5+40x-93}{2x^4+5x^3-12x^2}dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$; в) $\int(x+2)^2\cos 4x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=x^2$, $y=3-2x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=7\cos^3 t$, $y=7\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, oy; б) $\rho=2\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{12}{5}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'ctgx-y=2\cos^2 x\cdot ctgx$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''+8\sin y\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=y-x, \\ y'=x+2y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}+xyz=0$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{\left(\sin^2 1,55+8e^{0,015}\right)^5}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=3x^2+3y^2+5xy+4x+7y+5$; б) $z=3x^2-8xy+7y^2$, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$.

Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем значении.
2. Уравнение Бернулли.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.

Вариант 5

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x^4-4x^3+x^2-1}{4x^3+5x^2+5x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$; в) $\int arc\cos 3x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y^2 = 2x+1$, $y = x-1$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, ox; б) $\rho = 7(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' - 1 = \frac{2y}{\ln x}$.

6. Найти решение задачи Коши: $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z = \sin^2(x-3y)$. Показать, что $9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

9. Вычислить приближенно: $arctg\frac{1,02}{0,95}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z = (x,y)$, при условии $\varphi(x,y) = 0$: а) $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$; б) $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, $\varphi(x,y) = 4x^2 + y^2 - 25$.

Контрольные вопросы

1. Площади плоских фигур.
2. Уравнения Лагранжа и Клеро.
3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Вариант 6

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{5x^4 - 12}{(2x+3)(x-1)^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; в) $\int (3x^2+1)\sin x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(t - \cos t)$, ox; б) $\rho = 2e^{\frac{5\varphi}{3}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $x(y' - y) = e^x$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z = \frac{xy}{x+y}$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x, y)$; б) условный экстремум данной функции $z = (x, y)$, при условии $\varphi(x, y) = 0$: а) $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$; б) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, $\varphi(x, y) = x - y - \frac{\pi}{4}$.

Контрольные вопросы

1. Объемы тел вращения.
2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
3. Экстремум функции двух переменных.

Вариант 7

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x^4-2x}{(x-1)^2(x^2+2)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$; в) $\int e^{-2x}\sin 3x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le \pi$, ox; б) $\rho=2\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y=x(y'-x\cos x)$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3+4=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений: $\begin{cases} x'=-x-2y, \\ y'=3x+4y. \end{cases}$

8. Дана функция: $z=x^y$. Показать, что $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

9. Вычислить приближенно: $\ln(0,09^3+0,99^3)$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^2+y^2-xy+x+y+2$; б) $z=x-2y$, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$.

Контрольные вопросы

1. Длина дуги кривой.
2. Уравнения в полных дифференциалах.
3. Дифференцирование неявных функций нескольких перемен-ных.

Вариант 8

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{5x^4dx}{x^3+2x^2+5x}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int x^2 arctg 3x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ctg^3 x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=2x-x^2$, $y=-x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=6\cos^3 t$, $y=6\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$, oy; б) $\rho=8\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=18\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=3$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=x+4y, \\ y'=2x+3y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=e^{-\cos(x+2y)}$. Показать, что $4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

9. Вычислить приближенно: $\cos 2,36\cdot arctg 0,97$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=3x^2+3y^2+5xy+x-y+5$; б) $z=xy^2$, $\varphi(x,y)=x+2y-1$.

Контрольные вопросы

1. Площадь поверхности вращения.
2. Начальные условия.
3. Интегрирование полных дифференциалов.

Вариант 9

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^2}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; в) $\int e^{-2x}\cos x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tgx}{\sin^2 x}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=2,5(t-\sin t)$, $y=2,5(1-\cos t)$, $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$, ox; б) $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(\sin^2 y+xctgy)y'=1$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=2\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=3x+6y. \end{cases}$

8. Дана функция: $z=e^x(\cos y+x\sin y)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

9. Вычислить приближенно: $(arctg0,98)\cdot 3^{2,05}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^2+2xy-y^2+6x-10y+1$; б) $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$, $\varphi(x,y)=x+y+3$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление статистических моментов относительно оси.
2. Теорема Коши о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений.
3. Экстремум функции трех переменных.

Вариант 10

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{19x^3 + 2xdx}{(x-1)(x^2-2x+17)}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+81}}$; в) $\int x^2 \cos\frac{x}{3} dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y = (x+1)^2$, $y = x+1$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$, oy; б) $\rho = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{4}{3}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

6. Найти решение задачи Коши: $4y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z = arctg\,\frac{y}{x}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Вычислить приближенно: $1{,}002 \cdot 2{,}00^3 \cdot 2{,}96^3$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z = (x,y)$, при условии $\varphi(x,y) = 0$: а) $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$; б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\varphi(x,y) = x + y - 2$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление моментов инерции относительно оси.
2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Условный экстремум функции двух переменных.

Вариант 11

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^3+x-1}{(x-1)x^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$; в) $\int \mathrm{ar}\,ctg 8x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=1$, $x=0$, $y=0$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$, $0\le t\le\pi$, ox; б) $\rho=4\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{3}{4}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(x^2+1)y'+4xy=3$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=50y^3$, $y(3)=1$, $y'(3)=5$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=4x+2y, \\ y'=4x+6y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=\ln\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98}\cdot\sqrt[4]{1,05^3}}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^2+y^2-4xy-21$; б) $z=\frac{x-y-4}{2}$, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление координат центра тяжести плоской фигуры.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Условный экстремум функции трех переменных.

Вариант 12

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x-1)(x+2)^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$; в) $\int (2x-3)e^{4x}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{3}$, oy; б) $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=2y^3$, $y(-1)=1$, $y'(-1)=1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений: $\begin{cases} x'=4x-y, \\ y'=-x+4y. \end{cases}$

8. Дана функция: $u=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}}$. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{1,02^3+1,97^3}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$; б) $z=xy^3$, $\varphi(x,y)=x+3y-12$.

Контрольные вопросы

1. Площадь поверхности вращения.
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Дифференцирование сложных функций нескольких перемен-ных.

Вариант 13

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x-1)(x-2)^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$; в) $\int (3x-2)\cos 5xdx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2xdx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=5-x^2$, $y=4x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=2(2\cos t-\cos 2t)$, $y=2(2\sin t-\sin 2t)$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$, ox; б) $\rho=\cos\varphi$, $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(x+1)y'+y=x^3+x^2$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3+25=0$, $y(2)=-5$, $y'(2)=-1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=4x+3y. \end{cases}$

8. Дана функция: $z=xe^{x+y}+y\cos(x+y)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\sin 29^\circ\cdot\sin 46^\circ$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$; б) $z=\frac{3}{x}+\frac{3}{y}$, $\varphi(x,y)=x+y-1$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
3. Полный дифференциал функций нескольких переменных.

Вариант 14

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^3-6x^2+10x-9}{(x-1)(x-2)^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$; в) $\int (5x-3)\sin 7x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=\sqrt{4-x^2}$, $x=1$, $x=0$, $y=0$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=6\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \frac{\pi}{4}$, ox; б) $\rho=\frac{1}{2}+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'-2y=2x^4$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3+1=0$, $y(1)=-1$, $y'(1)=-1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=8x-3y, \\ y'=2x+y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=y\cdot\cos(x-y)$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$.

9. Вычислить приближенно: $arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{50}{y}$; б) $z=2x+y$, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-36$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков.
3. Частные дифференциалы функции нескольких переменных.

Вариант 15

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{9x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^2}dx$; б) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$; в) $\int (10x-1)e^{-7x}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin x \sin 3x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $x=(y-2)^3$, $x=4y-8$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le t\le\frac{\pi}{6}$, oy; б) $\rho=\cos 3\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'=2x\left(x^2+y\right)$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''+18\sin y\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=2x+8y, \\ y'=x+4y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}-x^2-y^2$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

9. Вычислить приближенно: $2{,}003^2\cdot 3{,}998^3$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; б) $z=xy^3$, $\varphi(x,y)=x+3y-12$.

Контрольные вопросы

1. неопределенный интеграл. Определение и свойства.
2. Градиент и производная по направлению.
3. Линейные дифференциальные уравнения.

Вариант 16

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x-4}{(x-2)(x+1)^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$; в) $\int x\,arctg\frac{x}{2}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=8(\cos t+t\sin t)$, $y=8(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$, ox; б) $\rho=\cos\varphi+\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'+y+xe^{-x^2}=0$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=128y^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=8$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=-2x-3y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=x\cdot\cos\frac{y}{x}-x^2-y^2$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{4{,}05^{-2}+3{,}07^2}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$; б) $z=x^2-2xy+6x-3y$, $\varphi(x,y)=x+y-1$.

Контрольные вопросы

1. Неопределенный интеграл. Определение и свойства.
2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Вариант 17

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-121}}{x^2}dx$; в) $\int x\arccos\frac{x}{3}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x\sin 3x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=9-x^2$, $y=8x$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=16\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$, ox; б) $\rho=12e^{\frac{12\varphi}{5}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $x^2y'=2xy+3$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''=8\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$\begin{cases} x'=5x+8y, \\ y'=3x+3y. \end{cases}$

8. Дана функция: $z=\frac{y}{\sin\left(x^2-y^2\right)}$. Показать, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

9. Вычислить приближенно: $2{,}01^{3{,}03}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=4x-4y-x^2-y^2$; б) $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$, $\varphi(x,y)=x-y+2$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование дифференциальных биномов $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$.

2. Нормальная плоскость и касательная к пространственной кривой.

3. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка, вида $f(x,y',y'')=0$.

Вариант 18

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{7x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$; в) $\int x \arcsin 3x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y = x + 6$, $y = x^2 - 4$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$, ox; б) $\rho = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

6. Найти решение задачи Коши: $y'' y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $u = x\cos(x+y) + ye^{x+y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{1,02^3 + 1,99^2}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z = (x,y)$, при условии $\varphi(x,y) = 0$: а) $z = 3x^3 + 8y^3 - 6xy + 10$; б) $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование квадратных трехчленов.
2. Поверхности второго порядка.
3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Вариант 19

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+4x^2+4x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$; в) $\int x^2 \ln(x+2)dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=\sqrt{9-x^2}$, $x=2\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=2(\cos t + t\sin t)$, $y=2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$, ox; б) $\rho = 2(1-\cos\varphi)$, $-\pi \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' + x = 4y^3 + 3y^2$.

6. Найти решение задачи Коши: $y'' = 32y^3$, $y(4)=1$, $y'(4)=4$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $u = 3^{xy} + \ln\left(\frac{x}{y} - 2\right)$. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

9. Вычислить приближенно: $\ln\left(\sqrt{0,01} + 0,99\right)$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y$; б) $z = x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x$, $\varphi(x,y) = x + y - 3$.

Контрольные вопросы

1. Интегрирование иррациональных функций.
2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
3. Интегрирующий множитель.

Вариант 20

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{11x^3+6x^2+10x+11}{x^3+2x^2+x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx$; в) $\int arctg\sqrt{4x-1}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=x^2$, $y=3x-2$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le t\le\frac{2\pi}{3}$, oy; б) $\rho=6(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''+2\sin y\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=3x+y, \\ y'=8x+y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=xarctg(x+y-2)+y2^{x+y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $arctg\left(\frac{1,08}{0,99}\right)$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=(x-2)^2+2y^2-10$; б) $z=x^2+xy-7$, $\varphi(x,y)=y-4x^2+4$.

Контрольные вопросы

1. Метод Симпсона вычисления определенных интегралов.
2. Линии и поверхности уровня.
3. Поле направлений. Изокмены.

Вариант 21

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{2x^3-5x^2+7x}{x^3+6x^2+10x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$; в) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=-x^2$, $y=2x-3$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=3(2\cos t-\cos 2t)$, $y=3(2\sin t-\sin 2t)$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$, ox; б) $\rho=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\left(2e^y-x\right)y'=1$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3+16$, $y(1)=2$, $y'(1)=2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=-3x+2y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=x\arccos(x+y-7)+y(x+y)^{15}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\sin 62°\cdot\cos 29°$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=(x-5)^2+y^2+15$; б) $z=x^2+xy-7$, $\varphi(x,y)=y-4x^2+4$.

Контрольные вопросы

1. Метод прямоугольников вычисления определенных интегралов.
2. Полный дифференциал функций нескольких переменных.
3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Вариант 22

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{8x^3+9x+16}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-2\right)}dx$; б) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$; в) $\int arctg\frac{x}{4}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2 4x-1\right)dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $x=y^2$, $x=3y-2$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$, ox; б) $\rho=5\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'+ytgx=\sin x$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''-32\sin 3x\cos x=0$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=4$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$\begin{cases} x'=2x+y, \\ y'=3x+4y. \end{cases}$

8. Дана функция: $z=\sin xy+\log_2\left(\frac{x}{y}-8\right)$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt[5]{1{,}99^5+\left(0{,}01\right)^3}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=xy-x^2-y^2+19$; б) $z=x^3+y^3-3xy$, $\varphi(x,y)=y-x+1$.

Контрольные вопросы

1. Формула трапеций для определенного интеграла.
2. Дифференцирование неявно заданных функций нескольких переменных.
3. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Вариант 23

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{13x^3-8x^2+1}{(x^2-x+1)(x-3)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$; в) $\int x\ln(3-x)dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $x=9-y^2$, $x=8y$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=2\cos t$, $y=6\sin t$, $0\le t\le \frac{\pi}{6}$, oy; б) $\rho=\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'=\frac{y}{3x-y^2}$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''-32\sin 3x\cos^3 x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=x-5y, \\ y'=-x-3y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+\frac{y-z}{z-x}$. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt[3]{(1,03)^2+(0,001)^3}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=2xy-3x^2-2y^2+1$; б) $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$, $\varphi(x,y)=y-x$.

Контрольные вопросы

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
2. Дифференцирование параметрически заданных функций нескольких переменных.
3. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Вариант 24

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{4x^3-4x^2+x}{(x^2+2x+2)(x-3)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}dx$; в) $\int \ln(x^2+3)dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $x=(y-1)^2$, $x=y-1$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=4\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$, ox; б) $\rho = 2\sin 4\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(1-2xy)y' = y(y-1)$.

6. Найти решение задачи Коши: $y'' = 98y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=7$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z = x\arcsin(x+y) + y\frac{(x+y)^8}{10}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Вычислить приближенно: $arctg\left(\frac{0,998}{1,002}\right)$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z = x^3+y^3-3xy+7$; б) $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x - 4y$, $\varphi(x,y) = y + x - 2$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление площади плоской области ограниченной линиями заданными параметрами.
2. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
3. Задачи на составление дифференциальных уравнений.

Вариант 25

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x^3-6x^2+x}{(x^2+6x+10)(x+3)}dx$; б) $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$; в) $\int arcctg\sqrt{7x-1}dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$.

3. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=x^2-16$, $y=x-4$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $x=3\cos t$, $y=8\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$, oy; б) $\rho=8(1-\cos\varphi)$, $-\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le 0$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3+49=0$, $y(3)=-7$, $y'(3)=-1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=2x+y, \\ y'=-6x-3y. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=2arctg\frac{y}{x}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Вычислить приближенно: $\ln(1,02\cdot 0,99)$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^3+y^3-6xy-39x+18y+2$; б) $z=x^2+2xy-y^2-4x$, $\varphi(x,y)=y-x-1$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление площади плоской области в полярных координатах.
2. Производные высших порядков функции нескольких переменных.
3. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами.

Вариант 26

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[5]{x^2-1}}$; в) $\int \sin(\ln x)dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$.

3. Вычислить площадь $r=2\sin 3\varphi$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, ox; б) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, от $y=1$ до $y=e$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$.

6. Найти решение задачи Коши: $xy''=y'$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

8. Дана функция: $z=e^x\cos y$. Найти d^3z.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt[3]{0,98}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; б) $z=6-4x-3y$, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$.

Контрольные вопросы

1. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами.
2. Дифференциалы высших порядков от функций нескольких переменных.
3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с правой частью специального вида.

Вариант 27

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$; в) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx$.

3. Вычислить площадь $y=2x-x^2$ ось абсцисс $y=0$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину дуги кривой:

а) $y^2=x^3$, $x=1$, ox вокруг oy; б) $\varphi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$, от $\rho=1$ до $\rho=3$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

6. Найти решение задачи Коши: $y'y^2+yy'-\left(y'\right)^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x'=x+y, \\ y'=-x-3y. \end{cases}$$

8. Найти d^3z, если $z=x\cos y+y\sin x$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{1,03}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$; б) $z=xy^2$, $\varphi(x,y)=x+y-12$, $x>0$, $y>0$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление площади поверхности вращения.
2. Стационарные точки функции нескольких переменных.
3. Фундаментальная система решений дифференциальных уравнений.

Вариант 28

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^4 dx}{x^4-1}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5}}$; в) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$.

3. Вычислить площадь $y=x(x+1)(x-2)$, ox.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину замкнутой части кривой:

а) $y^2=x^3$, $x=1$, $x=1$ вокруг ox; б) $9y^2=x(x-3)^2$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y(1+xy)dx-xdy=0$.

6. Найти решение задачи Коши: $xy''=y'$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=x+z, \\ z'=x+y. \end{cases}$$

8. Найти d^2z, если $z=u^v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=xy$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt[5]{(4,01)^2+(3,91)^2}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$; б) $z=x^2+2y^2$, $\varphi(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление статистических моментов плоских тел фигур.
2. Экстремум функции нескольких переменных.
3. Дифференциальное уравнение. Основные понятия.

Вариант 29

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^5dx}{(x^3+1)(x^2-4)}$; б) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$; в) $\int 3^x \cos x dx$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

3. Вычислить площадь $y^3 = x$, $y=1$, $x=8$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) длину замкнутой части кривой:

а) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$, ox, $0 \le t \le 2\pi$; б) $\rho\varphi = 1$ от точки $A\left(2;\frac{1}{2}\right)$ до точки $B\left(\frac{1}{2};2\right)$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$.

6. Найти решение задачи Коши: $1+(y')^2 = 2yy''$, $y(1)=1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = x+y, \\ y' = 2x+y. \end{cases}$$

8. Найти d^2z, если $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

9. Вычислить приближенно: $\sqrt{2{,}99^2+4{,}02^2}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z = f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z = 1-(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$; б) $z = x+2y$, $\varphi(x,y) = x^2+y^2-5$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление координат центра тяжести плоских фигур.
2. Условный экстремум функции нескольких переменных.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Вариант 30

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x^3+x+2}{x\left(x^2+1\right)}dx$; б) $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

2. Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

3. Вычислить площадь $y=\ln x$, $ox,\ x=2e$.

4. Вычислить: а) объем тела, полученного вращением фигуры F вокруг указанной оси; б) всю длину кардиоиды:

а) $y=\sin^2 x$, $0\le x\le \pi$ ox; б) $\rho = 4(1+\cos\varphi)$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+6\left(x^2y+4y^3\right)dy=0$.

6. Найти решение задачи Коши: $y''y^3=1$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=1;\ y'\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

7. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:
$\begin{cases} x'=-3x-y, \\ y'=x-y. \end{cases}$

8. Найти d^2u, если $u=x^{yz}$.

9. Вычислить приближенно: $(0,96)^{2,02}$.

10. Найти: а) экстремум функции $z=f(x,y)$; б) условный экстремум данной функции $z=(x,y)$, при условии $\varphi(x,y)=0$: а) $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$, $x>0,\ y>0$; б) $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, $\varphi(x,y)=y-x-\frac{\pi}{4}$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление момента инерции.
2. Наибольшее и наименьшее значения функций нескольких переменных.
3. Однородные дифференциальные уравнения.

Контрольная работа № 4

Темы:

1. Двойные интегралы.
2. Приложения двойных интегралов.
3. Тройные интегралы.
4. Приложения тройных интегралов.
5. Криволинейные интегралы. Первого, второго родов.
6. Поверхностные интегралы. Первого, второго родов.
7. Векторный анализ.

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right) dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt[3]{x};\ (x \geq 0)$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными линиями: $2x+3y-12=0;\ \ 2z=y^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^5}$, где $V: \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ - поверхностная плотность тела: $V: 25\left(x^2+y^2\right)=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0;\ \mu=2\left(x^2+y^2\right)$.

6. Найти координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями: $V: 4y=\sqrt{x^2+z^2}$; $x^2+z^2=16;\ \ y\geq 0$.

7. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α от точки M к точке N: $\vec{F}=\left(x^2-2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2-2x\right)\cdot\vec{j}$, где α - отрезок от точки $M(-4;0)$ до $N(0;2)$.

8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_K \dfrac{y\cdot dS}{x}$, где K -дуга полукубической параболы $y^2=\dfrac{4}{9}x^3$ от точки $A\left(3;2\sqrt{3}\right)$ до $B\left(8;\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $P: x + y + z = 1$.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S-часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x - y + 4z) \cdot dS$: $P: 2x + 2y + z = 4$.

Контрольные вопросы

1. Что называется двойным интегралом?
2. Какое поле называется скалярным?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)\,dx$.

2. вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2 + y^2 - 2y = 0$; $x^2 + y^2 - 6y = 0$; $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $x = 0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y = \dfrac{5\sqrt{x}}{3}$; $y = \dfrac{5x}{9}$; $z \ge 0$; $z = \dfrac{5}{9}\left(3 + \sqrt{x}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(2x - 3y + z^2\right) dx\,dy\,dz$, где

$$V: \begin{array}{l} -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ 2 \le z \le 3 \end{array}.$$

5. Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{y \cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $V: x^2 + y^2 = 2x$; $x + z = 2$; $y \ge 0$; $x \ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha} xydl$, где α - часть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в первой четверти.

7. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина: $\oint\limits_{\alpha} (1 - x^2)dx + x(1 + y^2)dy$, где $\alpha : x^2 + y^2 = R^2$.

8. вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль кривой α от точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$: $\vec{F} = \left(x^2 + 2y\right) \cdot \vec{i} + \left(y^2 + 2x\right) \cdot \vec{j}$, где α - отрезок прямой MN.

9. Вычислить массу дуги α при заданной плотности μ: $\alpha : \rho = e^{\frac{3}{4}\varphi}$; $\varphi \in \left[0; \frac{4\pi}{7}\right]$; $\mu = \rho^{\frac{4}{3}}$.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью OZ): $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $P : 2x + 3y + z = 1$.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Приведите определение производной скалярного поля по направлению.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 3

1. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D : x = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_{V} \left(3x^2 - 2y + z\right) dxdydz$, где

$$V : \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 3 \end{array}.$$

3. Найти массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми, если $\mu=\mu(x;y)$ - поверхностная плотность пластинки $D: x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=9;\ x\geq 0;\ y\leq 0;\ \mu=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$.

4. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y=4;\ x=\sqrt{2y};\ z\geq 0;\ z=\dfrac{3x}{5}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{x\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 9;\ y\leq x;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где α - отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y=2-\dfrac{x^2}{8}$ от точки $M(0;2)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{yz^2}{x^2}$ и $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\cdot z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=(2x-z)\cdot\vec{i}+(y-x)\cdot\vec{j}+(x+2z)\cdot\vec{k}$, через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P:\ x-y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (4x-y+z)\,dS$, где $P: x-y+z=2$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
2. Дайте определение градиента и сформулируйте его свойства.
3. Вычисление двойного интеграла первого рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 4

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2;\ x\geq 0$.

2. Найти площадь области D, ограниченной заданными линиями: $D: x^2-2x+y^2=0;\ x^2-4x+y^2=0;\ y=0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $V: x+y=4;\ y=\sqrt{2x};\ z\geq 0;\ z=3y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{y^2dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 36;\ x\geq 0;\ z\geq 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

5. Найти массу тела, ограниченного заданными ее поверхностями, если $\mu=\mu(x;y;z)$ -поверхностная плотность $V: x^2+y^2+z^2=4;$ $x^2+y^2=4z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ \mu=10z$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=1+\sin\varphi$, если $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=\sin\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

7. Найти работу силы $\overrightarrow{F}: \overrightarrow{F}=(x+y)\cdot\vec{i}+2x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=4, (y\geq 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(-2;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+(2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+2y+z=4$ с координатными плоскостями (при положительном направлении обхода контура).

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(y+x)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованной плоскостью $P: x+2y+2z=4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
2. Какое поле называется векторным?
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 5

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями: $D: y=0;\ y\ge x;\ y=-\sqrt{2-x^2}$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y=\frac{5}{6}\sqrt{x};\ y=\frac{5}{18}x;\ z\ge 0;\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{x}\right)$.

3. Найти массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $x=2;\ y\ge 0;\ y^2=2x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7x^2}{4}+y$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=8x;\ x=2$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=2\left(x^2+y^2\right);\ z=2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha} \sqrt{2y}dl$, где α - первая арка циклоиды: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

7. Найти работу силы $\vec{F} : \vec{F} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha : x^2 + y^2 = 4 \ (x \geq 0; y \geq 0)$ от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = u(x;y;z)$ и $v = v(x;y;z)$ в точке $M\left(2;\frac{1}{3};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; $u = x^2yz^3$; $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a} : \vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x - y) \cdot \vec{j} + (3x + z) \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P : x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} : (y - z) \cdot \vec{i} + 3xyz \cdot \vec{j} + (z - x) \cdot \vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что называется областью интегрирования? Простая и сложная области.
2. Приведите формулу Остроградского-Гаусса.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода, кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_{D} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy$, где $D : x = 1;\ y = -x^3;\ y = \sqrt{x}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченной заданными линиями: $x^2+y^2-4y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=16;\ z\ge 0$.

5. Вычислить объем тела V, ограниченного заданными поверхностями: $x=19\sqrt{2y};\ x=4\sqrt{2y};\ z\ge 0;\ z-y=2$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\left(1-\cos\varphi\right)$, где $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$, если плотность $\mu=\cos\frac{\varphi}{2}$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x+y\right)\cdot\vec{i}+x^2y\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой α от точки $M\left(-1;2\right)$ до точки $N\left(0;1\right)$.

8. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(y+2z\right)\cdot\vec{i}+\left(x+2z\right)\cdot\vec{j}+\left(x-2y\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x+y+2z=2$ и координатными плоскостями.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(x+z\right)\cdot\vec{i}+\left(x+3y\right)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(y-z\right)\cdot\vec{i}+\left(x+z\right)\cdot\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Что такое якобиан и его геометрический смысл?
2. Что такое дивергенция векторного поля?
3. Вычисление площади области, ограниченной заданной кривой, через криволинейный интеграл второго рода.

Вариант 7

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy$, где $D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x^2+y^2=1;$ $x^2+y^2=4;\ \left(x\ge 0;\ y\ge 0\right)$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right)dxdydz$, где $V: y=x;$ $y=0;\ x=1;\ z\ge 0;\ z=x^2+15y^2$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: z=9\sqrt{x^2+y^2};\ z=36$.

5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, где α-дуга кривой: $x=\cos t;\ y=\sin t;\ z=\sqrt{3}\cdot t;$ $0\le t\le 2\pi$.

6. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=\left(x+y\right)\cdot\vec{i}+\left(x-y\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии α: $y=x^2$ от точки $M\left(-1;1\right)$ до точки $N\left(1;1\right)$.

7. Найти производную скалярного поля: $u=x+\ln\left(z^2+y^2\right)$ в точке $M\left(2;1;1\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

8. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S-часть плоскости $P: x+2y+z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S \left(5x+2y+2z\right)dS$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}: \vec{a}=\left(x+z\right)\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}+\left(x+y-z\right)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+y)\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x+2y+2z=4$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
2. Что такое ротор векторного поля и как его вычислить?
3. Вычисление работы силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль линии α с помощью криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 8

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ в виде поверхностных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, ели область D задана указанными линиями: $D: x=\sqrt{9-x^2};\ y=x;\ y\geq 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $y=\cos x;\ y\leq x+1;\ y\geq 0$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y=6;\ y=\sqrt{3x};\ z\geq 0;\ z=4y$.

4. Найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $V: x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=6z;\ x\geq 0;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=90y$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=1-y^2-z^2;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho=2\varphi;\ 0\leq\varphi\leq\dfrac{4}{3}$ при заданной плотности $\mu=\dfrac{3}{4}\rho$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго порядка: $\int\limits_{\alpha} xdy - x^2 ydx$, где α часть кривой $y = x^3$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(2;8)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \dfrac{z^3}{xy^2}$ и $v = 9\sqrt{2} \cdot x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3}; 2; \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2z - x) \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ по контуру треугольника, полученного пересечением плоскости $P: x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли данное векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} - 2xz \cdot \vec{j} - 3(y + z) \cdot \vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Физические приложения двойного интеграла.
2. Что такое поток векторного поля через поверхность?
3. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 9

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: y = x^2 + 2;\ x \ge 0;\ x = 2;\ y = x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x = 1$; $y \ge 0;\ y^2 = 4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = 6x + 3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{5}\right)}$, где $V: \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{5} = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ y \le x;\ z \ge 0$.

5. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z = 3\left(x^2+y^2\right);\ x^2+y^2=9;\ z \ge 0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$, при заданной плотности $\mu = \rho^2$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,dx + \left(xy^2 + y\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\right)dy$, где $\alpha: x^2+y^2=4$.

8. Найти производную скалярного поля $u: u = x^2y - \sqrt{xy+z^2}$ в точке $M(1;5;-2)$ по направлению $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S-часть плоскости $P: x+y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_S (6x-y+8z)\,dS$.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x-y)\cdot\vec{i} + (2y+z)\cdot\vec{j} + (2z-x)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x-3y+z=6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. физический смысл потока векторного поля.
3. Приведите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x;y)\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)\,dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $y=5\sqrt{x};\ y=\dfrac{5x}{3};\ z\geq 0;\ z=5+\dfrac{5\sqrt{x}}{3}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного указанными поверхностями: $V: x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=9z^2;\ x\geq 0; y\geq 0;\ z\geq 0$, если поверхностная плотность $\mu=10z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(y^2-2xy\right)dl$, где α - отрезок прямой от точки $A(-3;4)$ до $B(3;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}:\vec{F}=(2x-y)\cdot\vec{i}+\left(x^2+x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль кривой $\alpha: x^2+y^2=9;\ y\geq 0$ от точки $M(3;0)$ до точки $N(-3;0)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=\dfrac{x^2}{yz^2}$ и $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(2y+z)\cdot\vec{i}+(x-y)\cdot\vec{j}-2z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x-y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y+z)\cdot\vec{i}+2z\cdot\vec{j}+(y-7z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x+3y+z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как изменить прядок интегрирования в двойном интеграле?
2. Соленоидальное поле и его основные свойства.
3. Формула Грина.

Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right) dxdy$, где $D: x=1;\ y=-x^2;\ y=\sqrt{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=16;\ x\ge 0;\ y\le 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{3x-y}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, заданного указанными кривыми: $V: y=17\sqrt{2x};\ y=2\sqrt{2x};\ z\ge 0;\ z+x=\dfrac{1}{2}$.

5. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=36;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ y\le -x$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \rho = 2\sin\varphi;\ 0\le\varphi\le\pi$, при заданной плотности $\mu=\rho^3$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F} = (x+y)\cdot\vec{i} + (x-y)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: 9x^2+y^2=1;\ x\ge 0;\ y\ge 0$ от точки $M(1;0)$ до точки $N(0;3)$.

8. Найти производную скалярного поля u: $u = y\cdot\ln\left(1+x^2\right) - arctgz$ в точке $M(0;1;1)$ по направлению $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}:\vec{a}=(2y-z)\cdot\vec{i}+(x+2y)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+3y+2z=6$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+(y+z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: 3x-2y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Теорема о среднем для двойного интеграла.
2. Потенциальное поле и его основные свойства.
3. условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Вариант 12

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x=4-y^2$; $x-y+2=0$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной заданными линиями: $D: x=1;\ y\geq 0;\ y^2=4x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=x+3y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V (15x+30z)\,dx\,dy\,dz$, где $V: z=x^2+3y^2;\ z\geq 0;\ y\geq 0;\ x=1;\ y=x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x=2\sqrt{y^2+z^2};\ y^2+z^2=4;\ x\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела $V: x^2+y^2=z;\ z=3$ относительно оси OZ.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2+y^2-4x=0$ в третьей четверти.

7. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u=\dfrac{z}{x^3y^2}$ и $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$ в точке $M\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_{\alpha}(x-y)^2\,dx-(x+y)^2\,dy$, где α - часть прямой между точками $M(2;0)$ и $N(4;2)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_{S}(2x+5y+10z)\,dS$, $P: 2x+y+3z=6$.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4z\cdot\vec{i}+(x-y-z)\cdot\vec{j}+(3y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x-2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Гармоническое поле и его основные свойства.
3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.

Вариант 13

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $x\geq 0;\ y\geq x;\ y=\sqrt{9-x^2}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $x^2-4x+y^2=0;\ x^2-8x+y^2=0;\ y=0;\ y=\sqrt{3}\cdot x$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного указанными поверхностями: $x=\dfrac{5}{2}\sqrt{y};\ x=\dfrac{5}{6}y;\ z\geq 0;\ z=\dfrac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$, где $V:\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $4y=x^2+z^2;\ y=9$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где α - дуга окружности $x^2+y^2=2x$ во второй четверти.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}:\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{i}+y^2\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(2;0)$ до точки $N(0;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=\ln\left(3-x^2\right)+xy^2z$ в точке $M(1;3;2)$ по направлению $\vec{l}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}:\vec{a}=(y+z)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+(y-2)\cdot z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P:2x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=6x^2\cdot\vec{i}+3\cos(3x+2z)\cdot\vec{j}+\cos(3y+2z)\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью двойного интеграла?
2. Физический смысл дивергенции и ее свойства.
3. Физические приложения криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 14

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область D задана указанными линиями: $D: y^2 = 2x;\ x^2 = 2y;\ x \le 1$.

2. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right) dx\,dy$, где $D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $D: x^2 + y^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 9;\ x \le 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{y - 4x}{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2};\ x = 20$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = 2y;\ y = 2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha \left(x^2 - \dfrac{y^3}{3}\right) dx + \left(\dfrac{x^3}{3} - y^2\right) dy$, где $\alpha: x^2 + y^2 = 4$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \dfrac{z^2}{xy^2}$ и $v = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ в точке $M\left(\dfrac{1}{3}; 2; \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = 3x \cdot \vec{i} + (z + y) \cdot \vec{j} + (x - z) \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды,

образованной плоскостью $P: x+3y+z=3$ и координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+(y-2z)\cdot\vec{j}+(2x-y+2z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x+2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярных координатах?
2. Ротор векторного поля и его свойства.
3. Поверхностный интеграл первого рода.

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $xy=1$; $y=x^2$; $y=2$; $x=0$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\cdot dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16$; $y=\sqrt{3}x$; $y\ge 0$; $z\ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $V: x=20\sqrt{2y}$; $x=5\sqrt{2y}$; $z=0$; $x+y=\frac{1}{2}$.

5. Найти момент инерции однородного тела V: $x^2+z^2=2y$; $y=2$ относительно оси OY.

6. Вычислить массу дуги α, описываемой уравнением: $\rho=4$; $0\le\varphi\le\sqrt{3}$ при заданной плотности $\mu=15\rho^3$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: $\int\limits_\alpha \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где α - отрезок прямой от точки $M(1;1)$ до точки $N(2;2)$.

8. Найти производную скалярного поля: $u=\sin\left(x+2y\right)+\sqrt{xyz}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};3\right)$ по направлению вектора $\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

9. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=3x^2y\cdot\vec{i}-2xy^2\cdot\vec{j}-2xyz\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x+3y+2z=6$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint\limits_D\left(3x+10y-z\right)dS$.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить массу плоской пластинки с помощью двойного интеграла?
2. Циркуляция векторного поля и ее гидродинамический смысл.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Вариант 16

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D\left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$, где $D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt{x}$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-10y=0;\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x=\frac{5}{3}\sqrt{y};\ \ x=\frac{5y}{9};\ z\ge 0;\ z=\frac{5}{9}\left(3+\sqrt{y}\right)$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=35z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $z=9-x^2-y^2;\ z=0$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α, заданной уравнением: $\rho = 5 \cdot e^{\frac{5\varphi}{12}}$; $0 \le \varphi \le 1$, при заданной плотности $\mu = \frac{12}{13} \cdot e^{\frac{7\varphi}{12}}$.

7. Найти работу силы $\vec{F} : \vec{F} = (x+y) \cdot \vec{i} + x^2 y \cdot \vec{j}$ при перемещении вдоль прямой линии α от точки $M(-1;2)$ до точки $N(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \frac{x^2}{yz^2}$; $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ в точке $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S - часть плоскости $P: x - 2y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями: $\iint_S (4y - x + 4z)\, dS$.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (y - z) \cdot \vec{i} + (2x + y) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 2x + y + z = 2$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как найти момент инерции плоской фигуры?
2. Потенциальное поле и условия потенциальности.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 17

1. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $D: x = y^2 + 1;\ x + y = 3$.

2. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $x + y = 8;\ y = \sqrt{4x};\ z = 0;\ z = 3y$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной линиями: $x^2+y^2=9;\ x^2+y^2=16;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V x^2dx\,dy\,dz$, где $V:1\le x^2+y^2+z^2\le 16;\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ y\le x$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+z^2=y;\ x^2+z^2=10;\ y\ge 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(xy+y^2\right)dl$, где α - часть прямой от точки $A(-2;3)$ до точки $B(2;1)$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}:\vec{F}=(xy-x)\cdot\vec{i}+\dfrac{x^2}{2}\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha: y=2\sqrt{x}$ от точки $M(0;0)$ до точки $N(1;2)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$ в точке $M(1;1;2)$ по направлению $\vec{l}=5\vec{i}-6\vec{j}+2\sqrt{5}\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=(x+y-z)\cdot\vec{i}+2z\cdot\vec{j}+(y-7z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P:2x+3y+z=6$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=3(x-z)\cdot\vec{i}+\left(x^2-y^2\right)\cdot\vec{j}+3z\cdot\vec{k}$ соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Как найти координаты центра тяжести плоской фигуры с помощью двойного интеграла?
2. Соленоидальное поле и условия соленоидаольности.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 18

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y^2 = -8x + 16;\ y^2 = 24x + 48$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(27 + 54y^3\right) dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = \sqrt{xy}$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y^2 + z^2 = x;\ y^2 + z^2 = 9;\ x \ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ x^2 + y^2 = 4;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 2z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(x^2 y + xy\right) dl$, где α - ломаная ABC, $A(0;0);\ B(3;0);\ C(0;3)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha xy^2 dx + \frac{3}{2} x^2 y dy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;2);\ C(1;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{y^3}{x^2 z}$ и $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$ в точке $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}};\frac{1}{2}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S $\iint\limits_S (5x + y - z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: x + 2y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (3x - y)\cdot\vec{i} + (2y + z)\cdot\vec{j} + (2z - x)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника,

полученного в результате пересечения плоскости $P: 2x-3y+z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Что называется тройным интегралом?
2. Формула Стокса.
3. Физические приложения поверхностного интеграла второго рода.

Вариант 19

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=x^2-2x;\ x=-1;\ x=1;\ y=0$.

2. Вычислить массу пластики D, ограниченной кривыми: $x=2;$ $y=0;\ 2y^2=x;\ y\geq 0$, если поверхностная плотность $\mu=\dfrac{7x^2}{4}+y$.

3. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где $V: x^2+y^2+z^2=16;\ y\geq 0;\ z\geq 0;\ y\geq x$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, ограниченного поверхностями: $3\sqrt{x^2+z^2}=y;\ x^2+z^2=16;\ y\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2+y^2=2z;\ z=2$ относительно оси OZ.

6. Вычислить массу дуги α: $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t); \\ y=e^t(\cos t-\sin t); \end{cases}$ $0\leq t\leq \dfrac{1}{3}$ при заданной плотности $\mu=\dfrac{3}{2}e^{2t}$.

7. Найти работу силы $\vec{F}: \vec{F}=(x^2+y^2)(\vec{i}+2\vec{j})$ при перемещении вдоль линии $\alpha: x^2+y^2=9,\ y\geq 0$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(-3;0)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=5xy^3z^2$ в точке $M_1(2;1;-1)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(4;-3;0)$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2y - z)\cdot\vec{i} + (x + 2y)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x + 3y + 2z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Проверить, что векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + y - z)\cdot\vec{i} - 2y\cdot\vec{j} + (x + z)\cdot\vec{k}$ является соленоидальным, потенциальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Физический и геометрический смысл двойного интеграла.
2. Понятие скалярного поля, примеры скалярных полей.
3. Приведите условия равенства нулю криволинейного интеграла второго рода.

Вариант 20

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных с внешним интегрированием по x и по y, если область интегрирования D задана следующими линиями: $y \ge 0;\ x + 2y - 12 = 0;\ y = \lg x$.

2. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x = 2;$ $y \ge 0;\ y^2 = \dfrac{x}{2}$ если поверхностная плотность пластинки $\mu = 4x + 6y^2$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(1 + \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16}\right)^5}$, где $V: \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16} = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $x^2 + y^2 = 4y;\ z = 4 - x^2;\ z \ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного поверхностями: $x^2 = y^2 + z^2;\ y^2 + z^2 = 9;\ x \ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\left(x^2-xy\right)dl$, где α - ломаная ABC, $A(2;1)$; $B(6;1)$; $C(4;-1)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_{\alpha}(x+y)^2\,dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где α - верхняя половина окружности $x^2+y^2=9$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u=xyz$ и $v=x^2+9y^2+6z^2$ в точке $M\left(1;\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_{S}(6x+y+4z)\,dS$, где S - часть плоскости $P:3x+3y+z=3$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=(x+2z)\cdot\vec{i}+(y-3z)\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P:3x+2y+2z=6$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
2. Приведите определение и примеры линий уровня скалярного поля.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана явно.

Вариант 21

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_{D}\left(xy-9x^5y^5\right)dx\,dy$, где $D: x=1$; $y=\sqrt[3]{x}$; $y=-x^2$; $x\geq 0$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями: $x^2+y^2-4y=0$; $x^2+y^2-8y=0$; $y=\sqrt{3}x$; $x=0$.

3. Вычислить массу пластинки D, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=4;\ x^2+y^2=9;\ x\le 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{y-2x}{x^2+y^2}$.

4. Вычислить объем тела V, ограниченного следующими поверхностями: $z=x^2+y^2+1;\ x^2+y^2=4x;\ z\ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, ограниченного поверхностями: $y^2+z^2=x^2;\ y^2+z^2=9;\ x\ge 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=4\left(\cos t+t\cdot\sin t\right); \\ y=4\left(\sin t-t\cdot\cos t\right); \end{cases}$ $0\le t\le 2$, при заданной плотности $\mu=t^2+1$.

7. Найти работу силы $\vec{F}:\vec{F}=y\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha:2x^2+y^2=1;\ y\ge 0$ от точки $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ до точки $N\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$ в точке $M(1;1;0)$ по направлению $\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=4x\cdot\vec{i}+(x-y-z)\cdot\vec{j}+(3y+2z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P:2x+y+z=4$ и координатными плоскостями.

10. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+(x+z)\cdot\vec{j}+(y+z)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P:3x+3y+z=3$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
2. Как найти угол между градиентами скалярных полей?

3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода, если кривая интегрирования задана параметрически.

Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x;y)\,dx + \int\limits_1^0 dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x;y)\,dx$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V 63\left(1+2\sqrt{y}\right) dx\,dy\,dz$, где $V: y = x;\ y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = \sqrt{xy}$.

3. Вычислить площадь области D, ограниченного кривыми: $y^2 = 2x+1;\ x - y = 1$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $\sqrt{x^2+y^2} = 3z;\ x^2+y^2 = 4;\ z \ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2 = 16;\ x^2+y^2 = 9z^2;\ x \ge 0;\ y \ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu = 5z$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \sqrt{2y}\,dl$, где α - первая арка циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 2(1-\cos t). \end{cases}$

7. Показать, что данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом функции $u(x;y)$. Найти эту функцию: $\left(20x^3 - 21x^2y + 2y\right)dx + \left(3 + 2x - 7x^3\right)dy$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \dfrac{x^2}{y^2z^3}$ и $v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot z}$ в точке $M\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. Найти поверхностный интеграл первого рода по поверхности S: $\iint\limits_S (3x-2y+6z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 2x+y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Проверить, что данное векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным, соленоидальным или гармоническим: $\vec{a}=(x+y)\cdot\vec{i}+(y+z)\cdot\vec{j}+2(x-z)\cdot\vec{k}$.

Контрольные вопросы

1. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
2. Векторные линии, дифференциальные уравнения векторных линий.
3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, если кривая интегрирования задана в полярных координатах.

Вариант 23

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=\sqrt{x};\ y=2\sqrt{x};\ x=4$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=9;\ x\geq 0;\ y\leq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\dfrac{5x+2y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить объем тела V, заданного указанными поверхностями: $y=6\sqrt{3x};\ y=\sqrt{3x};\ z\geq 0;\ z+x=3$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9;\ y\geq 0;\ y=\sqrt{3}\cdot x;\ z\geq 0$.

5. Вычислить момент инерции тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2=y^2+z^2;\ y^2+z^2=4;\ x\geq 0$ относительно оси OX.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: y=\ln x;\ \sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{15}$, если заданная плотность $\mu=2x^2$.

7. Найти работу силы $\vec{F} = (xy - x)\cdot\vec{i} + xy\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $\alpha : y = 2\sqrt{x}$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(4;4)$.

8. Найти производную скалярного поля $u = x^2y + y^2z - 3z$ в точке $M_1(1;-2;-1)$ по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2(13;-5;0)$.

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x+z)\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + (2x-y)\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: 3x + 2y + z = 6$ с координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (2z - x)\cdot\vec{i} + (x+2y)\cdot\vec{j} + 3z\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x + 4y + 2z = 8$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются полярными и как они связаны с декартовыми координатами на плоскости?
2. Способы вычисления потока векторного поля.
3. Как найти функцию по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода?

Вариант 24

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, где D: $x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}$.

2. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(1 + 2x^3\right)dx\,dy\,dz$, где V: $y = 9x;\ y \ge 0;\ x = 1;\ z \ge 0;\ z = \sqrt{xy}$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2 + y^2 = 9;\ x^2 + y^2 = 16;\ x \ge 0;\ y \ge 0$ если поверхностная плотность пластинки $\mu = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$.

4. Найти объем тела V, заданного указанными поверхностями: $z = 4 - y^2;\ x^2 + y^2 = 4x;\ z \ge 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $x^2 + z^2 = y;\ y = 2$ относительно оси OY.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где α - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_{\alpha} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, где α - контур треугольника ABC, $A(0;0);\ B(1;0);\ C(0;1)$.

8. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{1}{x^2 yz}$ и $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot z}$ в точке $M\left(2; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

9. Вычислить поверхность интеграл первого рода по поверхности $S: \iint\limits_{S} (2x - 3y + z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: x + 2y + z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a} = (x + z)\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + (2x - y)\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x + 2y + z = 4$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются цилиндрическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?
2. Способы вычисления циркуляции векторного поля.
3. Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f\left(x;y\right)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f\left(x;y\right)dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными кривыми: $x^2+y^2-6y=0;\ x^2+y^2-8y=0;\ y=x;\ x=0$.

3. Вычислить объем тела V, заданного следующими поверхностями: $x=16\sqrt{2y};\ x=\sqrt{2y};\ z\geq 0;\ z+y=2$.

4. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4;\ x^2+y^2=z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=6z$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V, заданного следующими поверхностями: $V:\quad x=y^2+z^2;\ y^2+z^2=1;\ x\geq 0$ относительно оси OX .

6. Вычислить массу дуги $\alpha:\begin{cases} x=-3(\cos t-t\sin t) \\ y=-3(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $0\leq t\leq\frac{1}{3}$ при плотности $\mu=t$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение: $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u\left(x;y\right)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$ в точке $M\left(1;-3;4\right)$ по направлению $\vec{l}=\vec{j}-\vec{k}$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(3x+y\right)\cdot\vec{i}+\left(x+z\right)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+z=2$ и координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(2x-yz\right)\cdot\vec{i}+\left(xz-2y\right)\cdot\vec{j}+2xyz\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Какие координаты называются сферическими и как они связаны с декартовыми координатами в пространстве?

2.Формула Грина.

3. Как найти массу дуги кривой с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 26

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\,dy$.

2. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y=(x-4)^2$; $y=16-x^2$.

3. Вычислить массу пластинки D, заданной следующими кривыми: $x=2;\ y\geq 0;\ 2y^2=x$, если поверхностная плотность пластинки $\mu=\frac{7}{2}x^2+6y$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: x^2+y^2+z^2=1;\ y\geq x;\ x\geq 0;\ z\geq 0$.

5. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного ограничивающими поверхностями: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$; $x^2+y^2=9;\ z=0$.

6. Вычислить массу дуги $\alpha: \begin{cases} x=10\cos^3 t; \\ y=10\sin^3 t; \end{cases}$ $0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$ при заданной плотности $\mu=2\cos^2 t$.

7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по формуле Грина: $\oint\limits_\alpha (x+y)\,dx+(y-x)\,dy$, где $\alpha: \begin{cases} y=x^2; \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

8. Найти угол между градиентами скалярных полей: $u = \frac{x}{yz^2}$ и $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$ в точке $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности $S: \iint\limits_S (2x + 3y - z)\,dS$, где S - часть плоскости $P: 2x + y + z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

10. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x + y) \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j} + (y - z) \cdot \vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: 2x - y - 2z = -2$ и координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства тройного интеграла.
2. Как в некоторых случаях упростить вычисление циркуляции с помощью формулы Грина?
3. Как найти координаты центра тяжести дуги с помощью криволинейного интеграла первого рода?

Вариант 27

1. Вычислить площадь области D, заданной указанными линиями: $y = x^2 - 2x;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0$.

2. Вычислить массу пластинки D, заданной ограничивающими ее кривыми: $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 25;\ x \geq 0;\ y \leq 0$, если поверхностная плотность пластинки $\mu = \frac{x - 5y}{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V \left(3x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz$, где V: $z = 10y;\ x + y = 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0$.

4. Вычислить координаты центра масс однородного тела V, заданного указанными поверхностями: $y = 3\sqrt{x^2 + z^2};\ x^2 + z^2 = 36;\ y \geq 0$.

5. Вычислить момент инерции однородного тела V : $y^2+z^2=x^2$; $y^2+z^2=1$; $x\ge 0$ относительно оси OX .

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_{\alpha}\frac{dl}{x+2y+5}$, где α - отрезок прямой от точки $A(0;-2)$ до точки $B(1;0)$.

7. Показать, что данное дифференциальное выражение $\left(2x-3y^2+1\right)dx+\left(2-6xy\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u\left(x;y\right)$. Найти эту функцию.

8. Найти производную скалярного поля $u=xy-\frac{x}{z}$ в точке $M\left(-4;3;-1\right)$ по направлению $\vec{l}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(3x+y\right)\cdot\vec{i}+\left(x+z\right)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, образованного пересечением плоскости $P: x+2y+z=2$ с координатными плоскостями.

10. Выяснить является ли векторное поле $\vec{a}$: $\vec{a}=xy\left(3x-4y\right)\cdot\vec{i}+x^2\left(x-4y\right)\cdot\vec{j}+3z^2\cdot\vec{k}$ потенциальным, соленоидальным или гармоническим.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о среднем для тройного интеграла.
2. Вычисление циркуляции с помощью формулы Стокса.
3. Как связаны криволинейный интеграл второго рода по замкнутой поверхности и тройной интеграл?

Вариант 28

1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}dy\int\limits_{0}^{\sin y}f\left(x;y\right)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dy\int\limits_{0}^{\cos y}f\left(x;y\right)dx$.

2. Вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями: $y=\frac{1}{x};\ y=x;\ x=2$.

3. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями: $z=\sqrt{y};\quad y=2x;\ y=3;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

4. Вычислить тройной интеграл в сферических координатах: $\iiint\limits_V \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 9;\ y=x;\ z\ge 0;\ x\ge 0$.

5. Вычислить массу тела V, ограниченного поверхностями: $49\left(x^2+y^2\right)=4z^2;\ 7\left(x^2+y^2\right)=2z;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если поверхностная плотность тела $\mu=20xz$.

6. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: $\int\limits_\alpha \left(2z-\sqrt{y^2+x^2}\right)dl$, где α - первый виток канонической винтовой линии $x=t\cos t;\ y=t\sin t;\ z=t$.

7. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\cdot\vec{i}+\left(y^2+2x\right)\cdot\vec{j}$ при перемещении вдоль линии α от точки $M\left(-4;0\right)$ до точки $N\left(0;2\right)$.

8. Найти производную скалярного поля $u=x^2y+y^2z+z^2x$ в точке $M_1\left(1;-1;2\right)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_2\left(3;4;-1\right)$.

9. Найти поток векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(y+z\right)\cdot\vec{i}+\left(x+6y\right)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образованную плоскостью $P: x+2y+2z=2$ с координатными плоскостями.

10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$: $\vec{a}=\left(2y-z\right)\cdot\vec{i}+\left(x+2y\right)\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x+3y+2z=6$ с координатными плоскостями.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить объем тела с помощью тройного интеграла?
2. Оператор Гамильтона.
3. Способы вычисления поверхностного интеграла первого рода.