

"БГТУ им. В.Г. Шухова" - "ДонГТУ".
Открытая межрегиональная олимпиада по математике.
1 курс. 2023-24г.
Решения.

Задача 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Известно, что $bc = -21$ и $A^3 = E$, где E - единичная матрица. Найти a и d .

Решение: Вычислим A^3 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a^2 + bc) + bc(a+d) & ab(a+d) + b(d^2 + bc) \\ c(a^2 + bc) + cd(a+d) & bc(a+d) + d(d^2 + bc) \end{pmatrix};$$

По условию $A^3 = E$, значит можем составить систему:

$$\begin{cases} a(a^2 + bc) + bc(a+d) = 1; \\ ab(a+d) + b(d^2 + bc) = 0; \\ c(a^2 + bc) + cd(a+d) = 0; \\ bc(a+d) + d(d^2 + bc) = 1. \end{cases}$$

Из условия следует $b \neq 0$ и $c \neq 0$, значит

$$\begin{cases} a^3 + bc(2a+d) = 1; \\ a^2 + ad + d^2 + bc = 0; \\ a^2 + bc + ad + d^2 = 0; \\ bc(a+2d) + d^3 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Так как $a^2 + d^2 = (a+d)^2 - 2ad$, то из второго уравнения получаем $(a+d)^2 - ad + bc = 0$ или $(a+d)^2 = ad - bc$. Кроме того, если $A^3 = E$, то $\det(A^3) = \det(A) = 1$, откуда $ad - bc = 1$, а значит $(a+d)^2 = 1$. С другой стороны $ad = 1 + bc$. Имеем две системы

$$\begin{cases} a+d=1; \\ ad=-20; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+d=-1; \\ ad=-20, \end{cases}$$

решая которые получаем пары $(5, -4)$, $(-4, 5)$, $(4, -5)$ и $(-5, 4)$. Подставив в систему (1) полученные решения, получим, что только пары $(4, -5)$ и $(-5, 4)$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a = 4, d = -5$ или $a = -5, d = 4$.

Задача 2. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Решение: Используем метод эквивалентных преобразований. Вычтем из каждой строки первую, имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

теперь каждую k -ую строку, начиная с третьей поделим на $k-1$:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} \sim$$

после чего вычтем из первой все остальные строки:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} & -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} & -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ задан координатами вершин $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(4, -1, 2)$, $A_1(-1, 1, 2)$. Внутри параллелепипеда взята произвольная точка M . Какие значения может принимать сумма объёмов пирамид $MA BCD$ и $MA_1 B_1 C_1 D_1$?

Решение: Заметим, что

$$V_{MA BCD} + V_{MA_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot \rho\{M, (ABCD)\} + \frac{1}{3} S_{A_1 B_1 C_1 D_1} \cdot \rho\{M, (A_1 B_1 C_1 D_1)\},$$

где $\rho\{M, (ABCD)\}$ - расстояние от точки M до плоскости $(ABCD)$. Так как $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - параллелепипед, то $S_{ABCD} = S_{A_1 B_1 C_1 D_1}$, а значит

$$V_{MA BCD} + V_{MA_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{3} S_{ABCD} (\rho\{M, (ABCD)\} + \rho\{M, (A_1 B_1 C_1 D_1)\}).$$

Остаётся заметить, что так как точка M лежит внутри параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, то она лежит и между плоскостями $(ABCD)$ и $(A_1 B_1 C_1 D_1)$, а значит

$$\rho\{M, (ABCD)\} + \rho\{M, (A_1 B_1 C_1 D_1)\} = \rho\{(ABCD), (A_1 B_1 C_1 D_1)\} = h,$$

где h - длина высоты параллелепипеда между гранями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$. Окончательно имеем

$$V_{MA BCD} + V_{MA_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{3} S_{ABCD} h = \frac{1}{3} V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1}.$$

Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ можно посчитать через смешанное произведение:

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = \left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} \right| = \left\| \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\| = 2.$$

Ответ: $V_{MA BCD} + V_{MA_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{2}{3}.$

Задача 4. Для каких x верно неравенство

$$\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{5x+4} + 2\sqrt{4-9x} \leq 9.$$

При каких значениях x достигается равенство?

Решение: Левую часть неравенства можно представить в виде скалярного произведения векторов $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$ $\vec{b} = \{\sqrt{4x+1}; \sqrt{5x+4}; \sqrt{4-9x}\}$. Остаётся заметить, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, а значит $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \cos(\widehat{a, b}) \leq 9$ при всех допустимых значениях x . Равенство возможно только при $\cos(\widehat{a, b}) = 1$, то есть при $\vec{a} = \vec{b}$, откуда $x = 0$.

Ответ: верно при $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{4}{9}\right]$, равенство при $x = 0$.

Задача 5. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ для $n > 1$, $a_1 = \sqrt{2}$. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - a_{n-1}}{2 - a_n}$.

Решение:

$$2 - a_n = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = \frac{2^2 - \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}\right)^2}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} = \frac{2 - a_{n-1}}{2 + a_n},$$

значит $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - a_{n-1}}{2 - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + a_n)$. Остаётся найти $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Покажем, что $\{a_n\}$ возрастает. В самом деле

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{a_n + a_{n-1}} = \frac{(2 + a_{n-1}) - (2 + a_{n-2})}{a_n + a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n + a_{n-1}} = \dots$$

$$\dots = \frac{a_2 - a_1}{(a_n + a_{n-1})(a_{n-1} + a_{n-2}) \dots (a_3 + a_2)} = \frac{\sqrt{2}}{(a_n + a_{n-1})(a_{n-1} + a_{n-2}) \dots (a_2 + a_1)} > 0,$$

так как $a_n > 0$.

Покажем, что $\{a_n\}$ ограничена сверху. Воспользуемся методом математической индукции. Очевидно $a_1 < 2$. Пусть $a_k < 2$, тогда $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$, значит $a_n < 2$ для любого натурального n .

Последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху, значит она имеет предел. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Тогда, переходя к пределу в формуле $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ получим $A = \sqrt{2 + A}$ откуда $A = 2$.

Ответ: 4.

Задача 6. Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что $a_n = \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-2}}$ для $n \geq 3$, $a_{24} = 13$ и $a_{77} = 19$. Найти a_{48} .

Решение:

$$\begin{aligned} a_{n+5} &= \frac{a_{n+4} + 1}{a_{n+3}} = \frac{\frac{a_{n+3} + 1}{a_{n+2}} + 1}{\frac{a_{n+2} + 1}{a_{n+1}}} = \frac{(a_{n+2} + a_{n+3} + 1)a_{n+1}}{a_{n+2}(a_{n+2} + 1)} = \\ &= \frac{\left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} + \frac{a_{n+2} + 1}{a_{n+1}} + 1\right) a_{n+1}}{\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} + \frac{\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} + 1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} + 1\right) a_{n+1}}{\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} + 1\right)} = \\ &= \frac{\left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} + \frac{a_n + a_{n+1} + 1}{a_n a_{n+1}} + 1\right) a_{n+1}}{\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \left(\frac{a_n + a_{n+1} + 1}{a_n}\right)} = \frac{\left(\frac{a_n + a_{n+1} + 1}{a_n} + \frac{a_n + a_{n+1} + 1}{a_n a_{n+1}}\right) a_{n+1}}{\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \left(\frac{a_n + a_{n+1} + 1}{a_n}\right)} = \frac{\frac{(a_n + a_{n+1} + 1)(a_{n+1} + 1)}{a_n}}{\frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \left(\frac{a_n + a_{n+1} + 1}{a_n}\right)} = a_n \end{aligned}$$

Тогда $a_{24} = a_4 = 13$, $a_{77} = a_2 = 19$, $a_{48} = a_3 = a_2 * a_4 - 1 = 246$.

Ответ: 246.

Задача 7. Построить график функции $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + x^n}$ при $x \geq 0$.

Решение: При $x \in [0; 1)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, значит $y = x$.

При $x \in (1; \infty)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, значит $y = 0$.

При $x = 1$: $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1^n} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = \begin{cases} x, & x \in [0; 1); \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 0, & x \in (1; \infty). \end{cases}$

Задача 8. Найти в каких точках достигаются наибольшее и наименьшее значение функции $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ в области $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|y| \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение: в данной области $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, а значит $z_{\min} = 0$ в точке $x = y = 0$, $z_{\max} = 1$ в точках окружности $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$.

Ответ: $z_{\min} = 0$ в точке $x = y = 0$, $z_{\max} = 1$ в точках окружности $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$.

Задача 9. Вычислить $f'(0)$ для функции

$$f(x) = \frac{(1+x)^{2024}}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-2024x)}.$$

Решение: Логарифмируя получим:

$$\ln f(x) = 2024 \ln(1+x) - \ln(1-x) - \ln(1-2x) - \ln(1-3x) - \dots - \ln(1-2024x),$$

откуда

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{2024}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x} + \dots + \frac{2024}{1-2024x} \right);$$

$$f'(0) = f(0) (2024 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2024) = 2024 + \frac{2024(1+2024)}{2} = 2051324.$$

Ответ: 2051324.

Задача 10. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 5$ и $CB = 12$ проведена высота CH . Биссектриса $\angle CAB$ пересекается с биссектрисой $\angle BCD$ в точке N , а биссектриса $\angle CBA$ пересекается с биссектрисой $\angle ACD$ в точке M . Найти MN .

Решение: Пусть O - точка пересечения биссектрис CAB и CBA . Тогда $CO = r\sqrt{2}$, где r - радиус вписанной в ABC окружности.

Заметим, что $\angle ANC = \angle BMC = 90^\circ$ (из $\triangle CBD$ получаем, что $\angle BCD = 90^\circ - \angle CBA = \angle BAC$, а так как CN - биссектриса $\angle BCD$, то $\angle NCA = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$; в $\triangle ANC$: $\angle ANC = 180^\circ - (\angle NCA + \angle CAN) = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}) = 90^\circ$; аналогично для $\angle BMC$).

Тогда около четырёхугольника $CNOM$ можно описать окружность радиуса $\frac{CO}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Остаётся сказать, что на дугу NM опирается $\angle NCM = 45^\circ$, значит $NM = r$. По формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$ получаем $r = \frac{5+12-13}{2} = 2$.

Ответ: 2.

"БГТУ им. В.Г. Шухова" - "ДонГТУ".
Открытая межрегиональная олимпиада по математике.
2 курс. 2023-24г.
Решения.

Задача 1. Вычислить $f'(0)$ для функции

$$f(x) = \frac{(1+x)^{2024}}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-2024x)}.$$

Решение: Логарифмируя получим:

$$\ln f(x) = 2024 \ln(1+x) - \ln(1-x) - \ln(1-2x) - \ln(1-3x) - \dots - \ln(1-2024x),$$

откуда

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{2024}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x} + \dots + \frac{2024}{1-2024x} \right);$$

$$f'(0) = f(0) (2024 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2024) = 2024 + \frac{2024(1+2024)}{2} = 2051324.$$

Ответ: 2051324.

Задача 2. Вычислить предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right) \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{6}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{3n}{n}} \right)^2.$$

Решение: Первый множитель заменим эквивалентным:

$$1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \sim 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \sim 2 \left(\frac{\pi}{n} \right)^2.$$

Второй множитель умножим и разделим на n - получится интегральная сумма для функции $f(x) = \sqrt{1+3x}$ на интервале $x \in [0; 1]$ с разбиением $x_i = \frac{i}{n}$, а значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{6}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{3n}{n}} \right) = n \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx = n \frac{2}{3} (1+3x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = n \frac{14}{9}.$$

Окончательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right) \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{6}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{3n}{n}} \right)^2 = \pi^2 \frac{392}{9}.$$

Ответ: $\frac{392}{9} \pi^2$.

Задача 3. При каких значениях параметра a верно неравенство

$$\frac{1}{2} \int_0^a x e^{\frac{x^2}{2} - x} dx \geq \int_0^{2a} e^{2x^2 - 2x} dx.$$

Решение: В правом интеграле сделаем замену переменной $t = 2x$. При такой замене $dx = \frac{dt}{2}$, а пределы интегрирования от 0 до a :

$$\int_0^{2a} e^{2x^2-2x} dx = \int_0^a e^{\frac{t^2}{2}-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^a e^{\frac{x^2}{2}-x} dx.$$

Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^a x e^{\frac{x^2}{2}-x} dx \geq \frac{1}{2} \int_0^a e^{\frac{x^2}{2}-x} dx \quad \text{или} \quad \int_0^a x e^{\frac{x^2}{2}-x} dx - \int_0^a e^{\frac{x^2}{2}-x} dx \geq 0.$$

Так как область интегрирования совпадает, можем объединить интегралы:

$$\int_0^a (x-1) e^{\frac{x^2}{2}-x} dx \geq 0 \quad \text{или} \quad e^{\frac{x^2}{2}-x} \Big|_0^a \geq 0, \quad \text{откуда} \quad e^{\frac{a^2}{2}-a} \geq 1,$$

что верно при $a \left(\frac{a}{2} - 1 \right) > 0$, т.е. $a \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$.

Задача 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 1}.$$

Решение: Выполним замену $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, тогда $t^2 - 2\sqrt{xt} + x = x + 1$, откуда $x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right)^2$. При такой замене $dx = 2 \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right) \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} dt = \frac{t^4 - 1}{2t^3} dt$. После подстановки:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^4 - 1}{2t^3(t-1)} dt &= \int \frac{t^3 + t^2 + t + 1}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \ln |t| - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} \right) + c = \frac{1}{2} \ln |t| + \frac{2t^3 - 2t - 1}{4t^2} + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) - 1}{4(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2} + c. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2} \ln |t| + \frac{2t^3 - 2t - 1}{4t^2} + c$, где $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$.

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)^2 = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36}$$

Решение: Воспользуемся двойным интегралом $S = \iint_{(D)} dx dy$. Выполним за-

мену переменных: $\begin{cases} x = 2r \cos \varphi; \\ y = 3r \sin \varphi \end{cases}$, якобиан которой $\begin{vmatrix} 2 \cos \varphi & -2r \sin \varphi \\ 3 \sin \varphi & 3r \cos \varphi \end{vmatrix} = 6r$.

При такой замене кривая примет вид $r^4 = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{4} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{4}$ или $4r^2 = \cos 2\varphi$. Остаётся заметить, что $\cos 2\varphi \geq 0$ при $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ а значит площадь можно посчитать как 4 интеграла при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$:

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{2}} 6r \, dr d\varphi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задача 6. Вычислить сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f^{(2k-1)}(0)}$, если $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение: Так как при $|x| < 1$ имеет место разложение

$$\frac{x}{1+x^2} = x(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) = x - x^3 + x^5 - x^6 + \dots$$

С другой стороны, в силу разложения функции в ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots,$$

получаем $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k+1}(2k-1)!$. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f^{(2k-1)}(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^{k+1}(2k-1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

Остаётся заметить, что это разложение $\sin(x)$ в точке $x = 1$.

Ответ: $S = \sin(1)$.

Задача 7. Найти решение задачи Коши:

$$y' = \frac{4x^3}{x^4 + y + 1}, \quad y(0) = -1.$$

Решение: Воспользуемся заменой $z(x) = x^4 + y + 1$. При такой замене $y' = z' - 4x^3$. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$z' - 4x^3 = \frac{4x^3}{z} \quad \text{или} \quad z' = 4x^3 \left(\frac{1}{z} + 1 \right).$$

Разделив переменные получим

$$\frac{zdz}{z+1} = 4x^3 dx \quad \text{или} \quad z - \ln|z+1| = x^4 + c \quad \text{откуда} \quad y = \ln|x^4 + y + 2| + c.$$

Подставляя начальное условие, найдём $c = -1$.

Ответ: $y = \ln|x^4 + y + 2| - 1$.

Задача 8. Найти в каких точках достигаются наибольшее и наименьшее значение функции $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ в области $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|y| \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение: в данной области $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, а значит $z_{min} = 0$ в точке $x = y = 0$, $z_{max} = 1$ в точках окружности $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$.

Ответ: $z_{min} = 0$ в точке $x = y = 0$, $z_{max} = 1$ в точках окружности $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$.

Задача 9. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов сторон треугольника, вписанного в окружность единичного радиуса?

Решение: По теореме синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$, откуда $b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, $c = a \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha} \right)$. Найдём экстремумы функции $f(\alpha, \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$. Приравняв частные производные к нулю получим систему:

$$\begin{cases} f'_\alpha = \sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \beta) = 0; \\ f'_\beta = \sin 2\beta + \sin 2(\alpha + \beta) = 0; \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 0 \quad \text{или} \quad \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = 0,$$

откуда $\alpha = \beta + \pi n$ или $\alpha = -\beta \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Так как все углы треугольника в сумме дают π , то достаточно рассмотреть $\alpha = \beta$ и $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Пусть $\alpha = \beta$, тогда из первого уравнения системы $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 0$ или $\sin 2\alpha(1 + 2 \cos 2\alpha) = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi n}{2}$ или $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. Отбрасывая не имеющие в контексте задачи смысла корни имеем $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$.

Пусть теперь $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, тогда из первого уравнения системы $\sin 2\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\pi n}{2}$, но эти случаи не удовлетворяют условию задачи.

Убедимся, что $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ - точка максимума. Вычислим вторые частные производные:

$$\begin{cases} f''_{\alpha\alpha} = 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 2(\alpha + \beta), & f''_{\alpha\alpha} \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = -2; \\ f''_{\alpha\beta} = 2 \cos 2(\alpha + \beta), & f''_{\alpha\beta} \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = -1; \\ f''_{\beta\beta} = 2 \cos 2\beta + 2 \cos 2(\alpha + \beta), & f''_{\beta\beta} \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = -2. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ и $f''_{\alpha\alpha} < 0$, то $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ - максимум.

Остаётся вспомнить, что сторона правильного треугольника, вписанного в единичную окружность равна $\sqrt{3}$.

Ответ: 9.

Задача 10. При каких значениях действительного параметра a система имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} |z - ai| = a + 5; \\ |z - 3| = 2. \end{cases}$$

Решение: Оба уравнения системы - окружности, а значит они пересекаются при $|r_1 - r_2| \leq |O_1O_2| \leq r_1 + r_2$, где $|O_1O_2|$ - расстояние между центрами окружностей. Имеем: $|a + 3| \leq \sqrt{9 + a^2} \leq a + 7$, или после возведения в квадрат $6a \leq 0 \leq 14a + 40$, откуда $-\frac{20}{7} \leq a \leq 0$.

Ответ: $-\frac{20}{7} \leq a \leq 0$.