

Решения задач.

1 курс

Задача 1. При каких значениях a существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$? Чему он равен?

Замечание: предел матрицы есть матрица из пределов её элементов.

Решение:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 1 + a + \dots + a^{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ при } |a| < 1.$$

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, при $|a| < 1$; расходится при $|a| \geq 1$.

Задача 2. При каких значениях α и β определитель $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \frac{1}{2} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & -\sqrt{3} \\ \sqrt{19} \sin \beta & \sqrt{19} \cos \beta & -1 \end{vmatrix}$

принимает наибольшее значение?

Решение: Определитель можно рассматривать как смешанное произведение векторов, значит для максимизации необходимо сделать вектора перпендикулярными:

$$\vec{a} = \left\{ \sin \alpha; \cos \alpha; \frac{1}{2} \right\}; \quad \vec{b} = \{ \cos \alpha; \sin \alpha; -\sqrt{3} \}; \quad \vec{c} = \{ \sqrt{19} \sin \beta; \sqrt{19} \cos \beta; -1 \};$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \vec{b} = 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$:

$$\vec{a} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}; \quad \vec{b} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3} \right\};$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \sin \beta + \sqrt{19} \cos \beta - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{19}};$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \Rightarrow \sqrt{19} \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \cos \beta + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \cos \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{19}};$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cdot \sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{19}}; \\ \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \cos \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \\ \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \cos \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \sin \beta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \\ \cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{19}} - \frac{\sin \beta}{\sqrt{3}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}; \\ \cos \beta = \frac{-7}{2\sqrt{19}}; \end{cases}$$

Осталось убедиться, что такой угол действительно существует, для этого проверим выполнение основного тригонометрического тождества:

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\right)^2 + \left(\frac{-7}{2\sqrt{19}}\right)^2 = \frac{27 + 49}{4 \cdot 19} = \frac{76}{76} = 1.$$

Заметим, что β во второй четверти, значит $\beta = \left[\pi - \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\right)\right] + 2\pi k$.

Тогда $\vec{c} = \left\{\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{7}{2}; -1\right\}$. Вычислим значение определителя:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -7 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(-6 - 18 - 7 - 9 - 42 + 2) = -10;$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$:

$$\vec{a} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right\}; \quad \vec{b} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\sqrt{3}\right\};$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \sqrt{19} \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \cos \beta - 1 = 0 \Rightarrow \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{19}};$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \sin \beta + \sqrt{19} \cos \beta + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \sin \beta + \cos \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{19}};$$

или

$$\begin{cases} \sin \beta + \sqrt{3} \cdot \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{19}}; \\ \sqrt{3} \cdot \sin \beta + \cos \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \sin \beta + 3 \cdot \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \\ \sqrt{3} \cdot \sin \beta + \cos \beta = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cos \beta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}; \\ \sin \beta = \frac{-2}{\sqrt{19}} - \frac{\cos \beta}{\sqrt{3}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}; \\ \sin \beta = \frac{-7}{2\sqrt{19}}; \end{cases}$$

Заметим, что β в четвёртой четверти, значит $\beta = -\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\right) + 2\pi k$.

Тогда $\vec{c} = \left\{-\frac{7}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; -1\right\}$. Вычислим значение определителя:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{vmatrix} = 10;$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \beta = -\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}\right) + 2\pi k$ (или $\beta = \arcsin\left(-\frac{7}{2\sqrt{19}}\right) + 2\pi k$); $\det = 10$.

Задача 3. Найти минимальное расстояние между графиками функций $x^2 + y^2 = 2y$ и $y = 3 - x^2$.

Решение: Минимальное расстояние должно достигаться на прямой, проходящей через центр окружности, являющейся нормалью к параболе (в точке пересечения).

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Тогда уравнение прямой, проходящей через центр окружности имеет вид $y = kx + 1$.

Найдём уравнение нормали к графику $f(x) = 3 - x^2$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y = (3 - x_0^2) - \frac{1}{(-2x_0)}(x - x_0) \Rightarrow \frac{1}{2x_0}x + \left(3 - x_0^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Так как мы хотим, что бы нормаль проходила через центр окружности, то:

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2x_0}; \\ 1 = \frac{5}{2} - x_0^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2x_0}; \\ x_0^2 = \frac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}; \\ x_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

Очевидно, что картинка симметрична, относительно оси

Oy , поэтому достаточно рассмотреть одну прямую,

например $y = \frac{1}{\sqrt{6}}x + 1$.

Найдём точки пересечения этой прямой с окружностью:

$$x^2 + \frac{x^2}{6} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{7} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

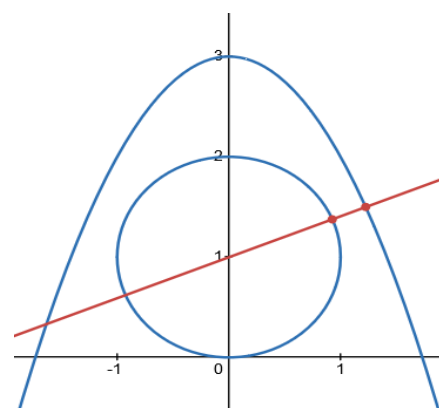
Имеем две точки: $A_1\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}} + 1\right)$ и $A_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}; 1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Найдём точки пересечения этой прямой с параболой:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x + 1 = 3 - x^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{6}} \pm \sqrt{\frac{1}{6} + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2\sqrt{6}}.$$

Имеем две точки: $B_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ и $B_2\left(-\frac{4}{\sqrt{6}}; \frac{1}{3}\right)$.

Так как прямая – нормаль в точке B_1 , то требуемое расстояние – длина отрезка A_1B_1 :



$$A_1 B_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \sqrt{6\left(\frac{\sqrt{7}-2}{2\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}-2}{2\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{2};$$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}-2}{2}$.

Задача 4. Заданна последовательность функций $f_1(x) = x^x$, $f_2(x) = x^{x^x}$, $f_3(x) = x^{x^{x^x}}$, Вычислить $f''_{2025}(1)$.

Решение: Заметим, что $f_n(x) = x^{f_{n-1}(x)}$, тогда:

$$f'_n(x) = x^{f_{n-1}(x)} \cdot \left(f'_{n-1}(x) \ln x + \frac{1}{x} f_{n-1}(x)\right) = f_n(x) \left(f'_{n-1}(x) \ln x + \frac{1}{x} f_{n-1}(x)\right);$$

$$f'_n(1) = f_n(1) \cdot f'_{n-1}(1);$$

$$f''_n(x) = f'_n(x) \cdot \left(f'_{n-1}(x) \ln x + \frac{1}{x} f_{n-1}(x)\right) + f_n(x) \left(f''_{n-1}(x) \ln x + \frac{2}{x} f'_{n-1}(x) - \frac{1}{x^2} f_{n-1}(x)\right);$$

$$f''_n(1) = f'_n(1) \cdot f'_{n-1}(1) + f_n(1) (2f'_{n-1}(1) - f_{n-1}(1));$$

Вычислим значения функций при $x = 1$:

$$f_1(1) = (x^x)|_{x=1} = 1^1 = 1;$$

$$f_2(1) = 1^{f_1(1)} = 1;$$

...

$$f_{2025}(1) = 1^{f_{2024}(1)} = 1.$$

Вычислим значения производных при $x = 1$:

$$f'_1(1) = (x^x \cdot (\ln x + 1))|_{x=1} = 1;$$

$$f'_2(1) = f_2(1) \cdot f'_1(1) = 1;$$

...

$$f'_{2025}(1) = f_{2025}(1) \cdot f'_{2024}(1) = 1;$$

Итого:

$$f''_{2025}(1) = f'_{2025}(1) \cdot f'_{2024}(1) + f_{2025}(1) (2f'_{2024}(1) - f_{2024}(1)) = 1 \cdot 1 + 1(2 - 1) = 2;$$

Ответ: $f''_{2025}(1) = 2$.

Задача 5. Вычислить бесконечное произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdot \sqrt[16]{16} \cdot \dots$

Решение: рассмотрим более общую задачу. Вычислим $\langle a^{\frac{1}{a}} \cdot a^{2\frac{1}{a^2}} \cdot a^{3\frac{1}{a^3}} \cdot \dots \rangle$ ($a > 1$). Имеем:

$$a^{\frac{1}{a}} \cdot a^{2\frac{1}{a^2}} \cdot a^{3\frac{1}{a^3}} \cdot \dots = a^{\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \dots + \frac{n}{a^n} + \dots};$$

Рассмотрим ряд $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \dots + \frac{n}{a^n} + \dots$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \dots + \frac{n}{a^n} + \dots &= \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3}\right) + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots\right) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \dots\right) + \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \dots\right) + \dots = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} + \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} + \dots = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{a}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к произведению:

$$a^{\frac{1}{a}} \cdot a^{2\frac{1}{a^2}} \cdot a^{3\frac{1}{a^3}} \cdot \dots = a^{\frac{a}{(a-1)^2}}.$$

При $a = 2$ имеем: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdot \sqrt[16]{16} \cdot \dots = 2^{\frac{2}{(2-1)^2}} = 4$.

Ответ: 4.

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 - 4x^3 - x^2 + 3x + a = 0$ имеет ровно три корня? Найти эти корни.

Решение: рассмотрим $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - x^2 + 3x$.

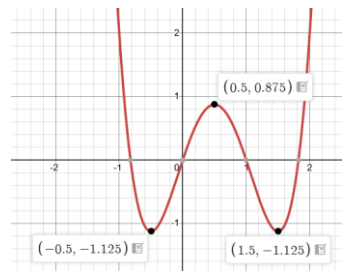
$$f'(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = (4x^2 - 1)(2x - 3).$$

Экстремумы в точках $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{8};$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{9}{8};$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{8} - \frac{27}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{81 - 108 - 18 + 36}{8} = -\frac{9}{8};$$



Значит, если пересекать график $f(x)$ прямой $y = -a$, три пересечения возможны лишь при $a = -\frac{7}{8}$. Имеем:

$$2x^4 - 4x^3 - x^2 + 3x - \frac{7}{8} = 0.$$

Один из корней должен быть $x_1 = \frac{1}{2}$ (по построению), поэтому можно выделить множитель $(2x - 1)$:

$$16x^4 - 32x^3 - 8x^2 + 24x - 7 = 0;$$

$$(2x - 1)(8x^3 - 12x^2 - 10x + 7) = 0;$$

$$(2x - 1)(8x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 4x - 14x + 7) = 0;$$

$$(2x - 1)^2(4x^2 - 4x - 7) = 0.$$

Решая квадратное уравнение $4x^2 - 4x - 7 = 0$, получим $x_{2,3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{7}{8}, x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}$.

Решения задач.

2 курс

Задача 1. Найти минимальное расстояние между графиками функций $x^2 + y^2 = 2x$ и $y = \sqrt{3-x}$.

Решение: Задача эквивалентна задаче 3 первого курса с точностью до переименования переменных.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}-2}{2}$.

Задача 2. Найти функцию $y(x)$ удовлетворяющую уравнению

$$\frac{(\int y dx)^2}{\sin x} + y \cdot y' = \frac{y'}{\sin x} \int y dx + y \cdot \int y dx.$$

Замечание: под « $\int y dx$ » понимать одну из первообразных.

Решение: Преобразуем уравнение:

$$\frac{(\int y dx)^2}{\sin x} - y \cdot \int y dx = \frac{y'}{\sin x} \int y dx - y \cdot y';$$

$$\int y dx \cdot \left(\frac{\int y dx}{\sin x} - y \right) = y' \cdot \left(\frac{\int y dx}{\sin x} - y \right);$$

$$(\int y dx - y') \left(\frac{\int y dx}{\sin x} - y \right) = 0;$$

Рассмотрим первую скобку. Получим $\int y dx = y'$, откуда $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

Из второй скобки, заменив $z = \int y dx$, получим:

$$z' = \frac{z}{\sin x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln |z| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c \Rightarrow z = c \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Окончательно $y = z' = \frac{c}{\cos^2 \frac{x}{2}}$;

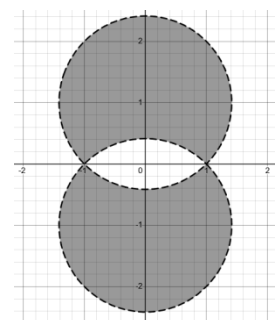
Ответ: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $y = \frac{c}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

Задача 3. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z^2 + 1| < 2|z|$.

Решение: Перейдя к x, y получим $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 4x^2 y^2 < 4(x^2 + y^2)$, что можно разбить на множители

$$(x^2 + y^2 + 2y - 1)(x^2 + y^2 - 2y - 1) < 0$$

Откуда $(|z + i|^2 - 2)(|z - i|^2 - 2) < 0$.



Таким образом требуемая область представляет собой множество точек комплексной плоскости, лежащих только в одной из окружностей $|z + i| = \sqrt{2}$ или $|z - i| = \sqrt{2}$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\int \sin^{2024} x \cos(2026x) dx$.

Решение: Рассмотрим более общий интеграл

$$\int \sin^{n-1} x \cos((n+1)x) dx = \int \sin^{n-1} x \cos(nx) \cos x dx - \int \sin^n x \sin(nx) dx;$$

Проинтегрируем первый по частям:

$$\begin{aligned} \int \sin^{n-1} x \cos(nx) \cos x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \cos(nx); & du = -n \sin(nx) dx; \\ dv = \sin^{n-1} x \cos x dx; & v = \frac{1}{n} \sin^n x. \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sin^n x \cos(nx) + \int \sin^n x \sin(nx) dx; \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходному:

$$\int \sin^{n-1} x \cos((n+1)x) dx = \frac{1}{n} \sin^n x \cos(nx) + c.$$

При $n = 2025$ получим:

$$\int \sin^{2024} x \cos(2026x) dx = \frac{1}{2025} \sin^{2025} x \cos(2025x) + c.$$

Ответ: $\int \sin^{2024} x \cos(2026x) dx = \frac{1}{2025} \sin^{2025} x \cos(2025x) + c$.

Задача 5. Вычислить бесконечное произведение $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \sqrt[81]{81} \cdot \dots$

Решение: Решение задачи эквивалентно решению задачи 5 первого курса с той лишь разницей, что в итоговую формулу $a^{\frac{1}{a}} \cdot a^{2\frac{1}{a^2}} \cdot a^{3\frac{1}{a^3}} \cdot \dots = a^{\frac{a}{(a-1)^2}}$ необходимо подставить $a = 3$

Ответ: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \sqrt[81]{81} \cdot \dots = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}$.

Задача 6. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y; \\ \dot{y} = \frac{y}{t} - x y^2. \end{cases}$$

Решение: Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = xy; \\ \frac{\dot{y}}{y} = \frac{1}{t} - xy; \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{t} \Rightarrow xy = c_1 t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = c_1 t; \\ y = \frac{c_1 t}{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_2 e^{\frac{c_1 t^2}{2}}; \\ y = \frac{c_1}{c_2} t e^{-\frac{c_1 t^2}{2}}; \end{cases}$$

Пусть теперь $x = 0$. Тогда исходная система превратится в уравнение $\dot{y} = \frac{y}{t}$, откуда $y = ct$.

Если же $y = 0$, то система превратится в уравнение $\dot{x} = 0$, откуда $x = c$, но это решение

можно получить из найденного ранее $\begin{cases} x = c_2 e^{\frac{c_1 t^2}{2}}; \\ y = \frac{c_1}{c_2} t e^{-\frac{c_1 t^2}{2}}; \end{cases}$ при $c_1 = 0$.

Ответ: $x = c_2 e^{\frac{c_1 t^2}{2}}$, $y = \frac{c_1}{c_2} t e^{-\frac{c_1 t^2}{2}}$ и $x = 0, y = ct$.