Лекция 3

Бесконечно малые и большие величины

1. Определение бесконечно малых больших величин

Функция *f*(*х*)называется **бесконечно малой** при *х*→*а*, где *а* может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если

.

Функция ** является бесконечно малой при *х*→0 и не является бесконечно малой при *х*→1, т. к. .

Свойства бесконечно малых функций.

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при *х*→*а* тоже бесконечно малая функция при *х*→*а*.

2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при *х*→*а* тоже бесконечно малая функция при *х*→*а*.

3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки *х* = *а* является бесконечно малой функцией при *х*→*а*.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Предел функции *f*(*х*)при *х*→*а*, где *а* – число, равен бесконечности, если для любого числа *М* > 0 существует такое число σ > 0, что неравенство  выполняется при всех *х*, удовлетворяющих условию , при этом записывается

.

Функция называется при этом **бесконечно большой**.

Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие  на , то получим: а если заменить на , то: 

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 4).



Рис. 4

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема*.* Если *f*(*x*)→0 при *х*→*а* (*х*→∞ ) и не обращается в ноль, то .

2. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть  – бесконечно малые функции при . Будем обозначать эти функции α, β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т. е. по быстроте их стремления к нулю. Например, функция стремится к нулю быстрее, чем функция .

Если , то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β.

Если , то α и β называются бесконечно малымиодного порядка.

Если то функции α и β называются **эквивалентными** бесконечно малыми. Записывают α ~ β.

Бесконечно малая функция α называется бесконечно малой порядка *k*относительно бесконечно малой функции β, если предел  конечен

и отличен от нуля.

Пример. Сравним бесконечно малые при *х*→0 функции  и .

,

т.е. функция – бесконечно малая более высокого порядка, чем .

Пример. Если , то при *х*→0



т. е. функция α - бесконечно малая порядка 2 относительно функции β.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой.

Например, если отношение  не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если , то при х→0  не существует, т. е. функция α и β несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1. .

2. Если α ~ β и β ~ γ, то α ~ γ, .

3. Если α ~ β, то β ~ α, .

4. Если α ~ α1 и β ~ β1 и , то и  или

.

Следствие: а) если α ~ α1 и , то и ;

 б) если β ~ β1 и , то .

Это свойство особенно важно на практике, так как оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые функции. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции.

Пример. Найти предел .

Так как tg5*x* ~ 5*x* и sin7*x* ~ 7*x* при *х* → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

.

Пример. Найти предел .

Так как при *х*→0, то

.

Пример. Найти предел .

Пример. Найти предел $\lim\_{x\to \infty }\frac{P(x)}{Q(x)}$.

, – многочлены.



.

Можно вывести правило:



Пример. Найти предел .

При подстановке бесконечности в выражение, получим отношение неопределенности $\frac{\infty }{\infty }$. Оценим показатели степеней в числителе и знаменателе: они равны. Следовательно, по правилу этот предел равен отношению коэффициентов при старших степенях: $\frac{1}{3}.$



Пример. Найти предел .

При подстановке бесконечности в выражение, получим отношение неопределенности $\frac{\infty }{\infty }$. Оценим показатели степеней в числителе и знаменателе: в числителе степень многочлена меньше, чем в знаменателе. Следовательно, по правилу этот предел равен 0.



Ссылка: <https://vk.com/video-216917038_456239840>