МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им В. Г. Шухова

Ю. А. Феоктистов, А. С. Горлов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия
для студентов 1-го курса заочной формы обучения
технических направлений бакалавриата*

Белгород
2023

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
Ф42

Рецензенты
Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова *Г. Л. Окунева*
Доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ») *А. В. Носков*

Ф42 **Феоктистов, Ю. А.**
Высшая математика: учебное пособие / Ю. А. Феоктистов, А. С. Горлов. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2023. – 119 с.

ISBN 978-5-361-01136-0

Учебное пособие соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по дисциплине «Высшая математика» и написано с учетом современных требований к преподаванию математики.

Книга содержит основные теоретические сведения и примеры решения типовых задач по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, пределам и производной функции, а также рассмотрены интегралы и дифференциальные уравнения.

Учебное пособие предназначено для студентов 1-го курса заочной формы обучения технических направлений бакалавриата.

УДК 51 (075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-361-01136-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Числовые расчеты применяются во всех областях деятельности инженеров всевозможных специальностей, физиков, химиков и работников многих других профессий. В связи с развитием науки и техники приходится решать все более сложные задачи, проводить все более и более сложные подсчеты. Все эти расчеты основаны на математике, которая представляет собой значительный отдел в общей сумме человеческих знаний и приспособлена к обслуживанию самых разнообразных областей науки и практической деятельности.

Цель курса математики в системе подготовки бакалавров (инженеров) – освоение необходимого математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать прикладные технические задачи, используя в случае надобности компьютеры.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные технические процессы, в освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач, в овладении основными методами математики.

В учебном пособии рассматриваются темы в объеме первого курса, позволяющие самостоятельно освоить необходимый теоретический материал и выполнить контрольные задания. В соответствии с этим каждый раздел содержит ссылки на литературу, позволяющую изучить основной теоретический материал, и вопросы для самопроверки. Цель последних – помочь студентам при повторении и закреплении материала. Весь материал разделен на две части (контрольные работы). В первой части рассмотрены темы: линейная алгебра, элементы аналитической геометрии, функции, пределы, производная и ее приложения. Во второй части – комплексные числа, неопределенный и определенный интегралы, приложения определенного интеграла и дифференциальные уравнения. По всем темам приведены подробные решения типовых примеров и задач, что должно способствовать лучшему пониманию и усвоению предмета.

Пособие рассчитано на студентов заочного института, но может быть использовано студентами очной формы обучения, желающими лучше изучить математику

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Основной формой заочного обучения является самостоятельная работа студента над учебным материалом; она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь заочникам университет организует чтение лекций и проведение практических занятий. Ознакомиться с теоретическим материалом студенты могут на сайте кафедры. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с письменными или устными вопросами. Указания по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1.Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после полного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся чертежи.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий; подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Следует добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательства сложных теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в котором записывать определения, формулировки теорем, формулы и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделяя их для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется подчеркивать или обводить рамкой, чтобы они выделялись и при прочитывании конспекта лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой

лист не только помогает запомнить формулы, но и служит постоянным справочником.

2. Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновать каждый этап, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решение задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертежи требуют тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

3. Самопроверка

1. После изучения определенной темы и решения достаточного количества задач рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы, формулы, формулировки и доказательства теорем, проверяя каждый раз себя по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в данном пособии, помогут студенту повторить, закрепить и проверить прочность усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз разобраться внимательно в материале учебника, порешать задачи.

2. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи. Однако благополучное решение задач нельзя воспринимать как признак полного усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи – необходимый, но недостаточный показатель хорошего знания теории.

4. Консультации

1. Если при изучении теоретического материала или решения задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и т.д.), он может обратиться к преподавателю для получения письменной или устной консультации.

2. Студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднения. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, год издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если затруднение вызывает решение задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

5. Контрольные работы

1. В процессе изучения курса студент должен выполнить ряд контрольных работ. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела, укажут на имеющиеся у него пробелы, на возможное направление дальнейшей работы, помогут сформулировать вопросы для консультации.

2. Контрольные работы нужно выполнять самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в работе, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному или письменному экзамену.

3. Прорецензированные работы со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

4. Распределение заданий в контрольных работах и указания к их выполнению см. на с. 101 и таблицу на с.102 – 103.

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

Тема 1. *Определители и матрицы. Системы линейных уравнений*

1. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам какого-либо столбца или строки.
2. Определители n-го порядка. Свойства определителей. Вычисление определителей.
3. Система n линейных уравнений с n неизвестными. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
4. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение. Ранг матрицы, базисный минор. Теорема о базисном миноре.
5. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Исследование совместных систем линейных уравнений. Базисные решения.

Тема 2. *Основы векторной алгебры*

6. Векторы. Линейные операции над ними. Их свойства. Разложение вектора по двум и трем направлениям. Теоремы о проекции вектора на ось. Координаты вектора.
7. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства, выражения в координатной форме.

Тема 3. *Элементы аналитической геометрии на плоскости*

8. Метод координат на плоскости. Основные задачи на метод координат (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении).
9. Понятие уравнения линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности. Точка пересечения двух прямых. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
10. Неравенства первой степени и их геометрический смысл.
11. Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы, параболы. Эксцентриситет эллипса и гиперболы. Асимптоты гиперболы.
12. Параллельный перенос. Понятие об общем уравнении кривой второго порядка и приведение его к каноническому виду путем переноса.

13. Полярная система координат. Уравнение некоторых кривых в полярной системе (кардиоида, спирали, лемниската).

Тема 4. *Элементы аналитической геометрии в пространстве*

14. Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости и его частные виды. Угол между плоскостями; условия параллельности и перпендикулярности.

15. Уравнения поверхности. Цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Тема 5. *Введение в анализ* (*функции, пределы, непрерывность*)

16. Определение функции. Область определения функции, способы задания. Графическое изображение функции, основные сведения по классификации функций.

17. Предел, основные свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства.

18. Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности (формулировка). Монотонность переменной $\left(1+1/n\right)^n$ при $n\to\infty$ и ее предел.

19. Число е. Натуральные логарифмы.

20. Предел $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$.

21. Сравнение бесконечно малых величин. Порядок малости. Эквивалентные бесконечно малые.

22. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Действия над непрерывными функциями. Формулировка основных свойств функции непрерывной на отрезке.

Тема 6. *Производная и дифференциал*

23. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной; ее геометрический и механический смысл.

24. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции.

25. Понятие об обратной функции. Построение по графику данной функции графика обратной функции. Производная обратной функции.

26. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной.

27. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Тема 7. *Приложения производной*

28. Теоремы Ролля и Лагранжа. Применение производной к исследованию функции. Минимум и максимум функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

29. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема исследования и построение графика функции по характерным точкам.

30. Формулы Тейлора и Маклорена. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

31. Параметрический способ задания функции. Параметрические уравнения окружности, эллипса, циклоиды. Дифференцирование функций, заданных в параметрической форме.

Тема 8. *Комплексные числа*

32. Комплексные числа, их изображения на плоскости. Алгебраические действия над комплексными числами. Тригонометрическая форма комплексного числа, свойство модуля и аргумента. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Формулы Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

Тема 9. *Неопределенный интеграл*

33. Первообразная. Неопределенный интеграл, его простейшие свойства. Таблица основных интегралов.

34. Интегрирование заменой переменной и по частям. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений. Понятие о не интегрируемости в элементарных функциях.

Тема 10. *Определенный интеграл. Приближенное вычисление определенного интеграла*

35. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Понятие об интегрируемости функции; формулировка теоремы существования определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

36. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Связь между определенным интегралом и первообразной. Формула Ньютона – Лейбница.

37. Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.

38. Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Порядок погрешностей.

Тема 11. *Приложения определенного интеграла*

39. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми в декартовой и полярной системе координат, объем тел по площадям поперечных сечений и тел вращения, длина дуг кривых, площади поверхности вращения. Примеры приложения интеграла к решению простейших задач механики и физики: вычисление работы переменной силы, пути по переменной скорости, статических моментов и моментов инерции, координат центра тяжести плоских фигур и линий.

Тема 12. *Дифференциальные уравнения первого порядка*

40. Задачи геометрического и физического характера, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши, частное и общее решение.

41. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

Тема 13. *Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений*

42. Интегрирование некоторых уравнений высших порядков путем понижения порядка уравнения.

43. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Структура общего решения.

44. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения неоднородного линейного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

45. Системы дифференциальных уравнений, методы их решения.

III. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Тема 1. *Определители и матрицы. Системы линейных уравнений*
Литература: [1, с. 16 – 37.]
Разберите решение задач 1, 2 данного учебного пособия.

Тема 2. *Элементы аналитической геометрии на плоскости*
Литература: [2, с. 181 – 200.]
Внимательно изучите решение задачи 3 данного учебного пособия.

Тема 3. *Основы векторной алгебры*
Литература: [1, с. 39 – 58.]
Разберите решение задачи 4 (п п. 1, 2, 5) данного учебного пособия.

Тема 4. *Элементы аналитической геометрии в пространстве*
Литература: [1, с. 90 – 115.]
Разберите решение задачи 4 данного учебного пособия.

Тема 5. *Введение в анализ (функции, пределы, непрерывность)*
Литература: [1, с. 115 – 160.]
Разберите решение задачи 5 данного учебного пособия.

Тема 6. *Производная и дифференциал*
Литература: [2, с. 116 – 134.]
Разберите решение задач 6 данного учебного пособия.

Тема 7. *Применение производной*
Литература: [1, с. 192 – 212.]
Разберите решение задачи 7 данного учебного пособия.

Тема 1. Определители и матрицы. Системы линейных уравнений

Определители и матрицы

Прямоугольная таблица, состоящая из чисел, расположенных в m строках и n столбцах, называется матрицей. Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами, например: $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$. Числа m и n называются порядками матрицы. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n, иначе – прямоугольной. Числа a_{ij}, входящие в состав матрицы, называются ее элементами, причем i – номер строки, j – номер столбца.

Единичной матрицей называется матрица $E = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Произведением матрицы A размером $m \times n$ на действительное число α называется матрица C размером $m \times n$, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}$.

Суммой двух матриц A и B размером $m \times n$ называется матрица C размером $m \times n$, элементы c_{ij} которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}$.

Произведением $m \times k$ матрицы A на $k \times n$ матрицу B называется $m \times n$ матрица C, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений элементов i строки матрицы A на соответствующие элементы j столбца матрицы B: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$.

Произведение матриц $A \cdot B$ имеет смысл в том случае, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$, т. е. произведение некоммутативно.

Каждой квадратной матрице поставим в соответствие определенное число, называемое *определителем* этой квадратной матрицы. Определитель матрицы второго порядка это: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Определителем третьего порядка назовем число, равное:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на любое число.

Минором любого элемента a_{ij} матрицы n-го порядка будем называть определитель порядка n – 1, соответствующий матрице, которая получена из данной вычеркиванием строчки с номером i и столбца с номером j, на пересечении которых находится данный элемент. Минор элемента a_{ij} будем обозначать $\overline{M}^i_j$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} назовем число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \overline{M}^i_j$.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на алгебраические дополнения этих элементов.

Пример 1. Вычислить определители второго и третьего порядка:

Решение

а. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7$;

б. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5.$

Для вычисления определителя 3-го порядка можно дописать ниже определителя 1-ю и 2-ю строки и составить сумму произведений элементов главной диагонали и двух прямых, ей параллельных, затем вычесть произведение элементов побочной диагонали и двух прямых, ей параллельных. Например, *а*.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-1)\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 4 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-2) = 23;$$

1 2 3
−2 0 1

б.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 0 + 5\cdot 2\cdot(-2) - 0\cdot(-1)\cdot 5 - (-2)\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 1 = -13;$$

3 2 0
1 −1 −2

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение

Для вычисления определителя накопим нули в первой строчке определителя, для этого умножим третий столбец на 6 и сложим с первым: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -17 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Теперь сложим четвертый столбец с третьим:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -17 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta .$$

Разложим определитель по первой строке, как произведение элементов этой строки на их алгебраические дополнения (очевидно, что первые три слагаемых равны 0):

$$\Delta = 0\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 1\cdot A_{14} = A_{14} = (-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -17 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2\cdot1\cdot1-$$

$$-17\cdot1\cdot1-2\cdot(-2)\cdot0-1\cdot1\cdot(-2)-0\cdot1\cdot2-1\cdot(-2)\cdot(-17)) = 47.$$

Алгебраическое дополнение A_{14} получаем вычеркиванием первой строки и четвертого столбца определителя.

Ранг матрицы

Пусть имеется прямоугольная матрица размером m на n**:** $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{nm} \end{pmatrix}$**.** Если в этой матрице выделить k строк и k столбцов, то мы получим квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется минором k – го порядка матрицы A. Среди этих миноров найдется хотя бы один, отличный от нуля, минор старшего (большего) порядка. Порядок наибольшего минора, отличного от нуля, называется рангом матрицы $r(A)$. Ранг матрицы не меняется, если удалить нулевую строку.

Напомним, что элементарными называются следующие преобразования матриц:

-перестановка двух любых строк или столбцов;

-умножение строки или столбца на число, отличное от нуля;

-прибавление к одному столбцу или строке линейной комбинации других столбцов или строк.

Элементарное преобразование не меняет ранг матрицы.

Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$ Считаем, что матрица A – невырожденная, т.е. ее определитель отличен от нуля.

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если выполняются равенства: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица соответствующего порядка.

Матрица $A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\ ...A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22}\ ...A_{2n} \\ .... \\ A_{1n}\ A_{2n}\ ...A_{nn} \end{pmatrix}$ называется присоединенной матрицей,

в которой A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A, причем алгебраические дополнения образуют транспонированную матрицу (строки и столбцы поменяли местами).

Формула для обратной матрицы: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Для матрицы 3-го порядка $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим второй способ отыскания обратной матрицы. Для этого запишем матрицу: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, в левой части которой – матрица A, а в правой – единичная матрица. С помощью элементарных преобразований в левой части получаем единичную матрицу, тогда в правой части получится обратная матрица.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

В общем случае система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Через $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначены неизвестные, подлежащие определению; величины $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$, называемые коэффициентами системы, и величины $b_1, b_2, ..., b_n$, называемые свободными членами, предполагаются известными. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых указывает номер уравнения, а второй – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент. Решением системы называется всякая совокупность чисел $c_1, c_2, ..., c_n$, которая, будучи подставлена в систему вместо неизвестных, превращает все уравнения системы в тождества. Система уравнений называется совместной, если она имеет хоты бы одно решение и несовместной, если она не имеет решений.

Условие совместимости системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений, приведенную выше. Матрицей этой системы будем называть матрицу, составленную из ее коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если к этой матрице добавить столбец свободных членов, получим расширенную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}...a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера–Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы.

Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

Введем матрицу неизвестных *X:* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, и матрицу свободных членов B: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$.

Считаем, что определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$. Систему можно заменить матричным уравнением: $A \cdot X = B$. Умножим матричное уравнение слева на обратную матрицу A^{-1}: $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$; поскольку $A^{-1} \cdot A = E$, тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Используя формулу для обратной матрицы и введя обозначения: $\Delta_i = b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + ... + b_n \cdot A_{ni}$, получаем формулы Крамера: $x_i = \Delta_i / \Delta,\ i = 1, 2, ..., n$.

Определитель Δ_i получается из определителя системы Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение, если определитель системы $\Delta \neq 0 : x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}; x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Метод Гаусса

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса представляет собой систематизированную схему последовательного исключения неизвестных. Пусть $a_{11} \neq 0$ (иначе переставим местами уравнения). С помощью первого уравнения исключим переменную x_1 из второго и последующих уравнений. Для этого от второго уравнения отнимем первое, умноженное на $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, от третьего – первое, умноженное на $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и т.д. Получим систему уравнений с новыми коэффициентами. Пусть $a'_{22} \neq 0$, тогда исключим

x_2 из третьего и последующих уравнений. Для этого умножим второе уравнение на $\frac{a_{32}}{a'_{22}}$ и вычтем полученный результат из третьего, из четвертого уравнения вычтем второе, умноженное на $\frac{a_{42}}{a'_{22}}$ и т.д. Продолжив дальнейшее исключение неизвестных, получим систему с так называемой треугольной матрицей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a''_{nn}x_n = b''_n \end{cases}$$

Эта процедура называется прямым ходом метода Гаусса. Далее начинаем обратный ход метода Гаусса, т.е. нахождение неизвестных. Находим x_n из последнего уравнения, затем найденное значение x_n подставляем в предпоследнее уравнение и определяем x_{n-1}. Найденные значения x_n и x_{n-1} подставляем в (n–2)-е уравнение и находим x_{n-2}. Продолжая этот процесс, определяем остальные неизвестные системы.

При решении систем линейных уравнений методом Гаусса удобно приводить к треугольному (или ступенчатому) виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Тема 2. Основы векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B. Вектор может обозначаться одной буквой: $\vec{a}$. Координатами вектора $\vec{a}$ будем называть его проекции на оси координат: $\vec{a} = \{x; y; z\}$. Модуль (длина) вектора $\vec{a}$: $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Линейными операциями называют сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на скаляр. Сложение векторов производят по правилу: $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$, Разность векторов: $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$. Умножение вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) λ: $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$.

Данные векторы называются линейно-зависимыми, если какой-либо из этих векторов линейно выражается через остальные, в противном случае эти векторы – линейно независимые.

Совокупность линейно независимых векторов, по которым производится разложение остальных векторов, называется базисом. В плоскости базисом могут служить два неколлинеарных (непараллельных) вектора, в пространстве – три некомпланарных (не лежащих в одной или в параллельных плоскостях) вектора.

Пусть $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ – базис, $\vec{d}$ – произвольный вектор, тогда $\vec{d} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_3\overrightarrow{a_3}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$.

Обычно выбирают ортонормированный базис, в котором векторы ортогональны (перпендикулярны) и каждый вектор имеет единичную длину. В этом случае базисные векторы называют ортами и обозначают $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ равно произведению модулей этих векторов на косинус угла φ между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Скалярное произведение можно выразить через координаты векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Угол между векторами вычисляют по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

Проекция вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$: $Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$

Векторное произведение векторов

Пусть дана тройка некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ с общим началом. Такая тройка называется правой, если поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$. Иначе тройка называется левой.

Векторным произведением векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, определяемый следующими условиями:

1. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, φ – угол между векторами (геометрически – это площадь параллелограмма, построенного на этих векторах).
2. $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\bar{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ – правая.

Свойства:

1. $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;
2. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ – это выражение векторного произведения через координаты векторов.

Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора: $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Тогда смешанное (или векторно-скалярное) произведение – $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ – скалярная величина, т.к. первые два вектора умножаются векторно, а результат – скалярно на третий вектор.

Геометрический смысл смешанного произведения – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, которые образуют правую тройку. Если тройка левая, то $V=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1y_1z_1 \\ x_2y_2z_2 \\ x_3y_3z_3 \end{vmatrix}$. Это выражение смешанного произведения через координаты векторов, тогда векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если $\begin{vmatrix} x_1y_1z_1 \\ x_2y_2z_2 \\ x_3y_3z_3 \end{vmatrix}=0$.

Обычно смешанное произведение обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пример 3. Даны четыре вектора: $\vec{a}=\{2,3,5\}$; $\vec{b}=\{7,14,25\}$; $\vec{c}=\{13,12,16\}$; $\vec{d}=\{0,18,39\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение

Три некомпланарных вектора в пространстве линейно независимы, следовательно, образуют в нем базис. Если смешанное произведение трех векторов отлично от нуля, то векторы некомпланарные.

Находим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 25 \\ 13 & 12 & 16 \end{vmatrix}=-3\neq 0 .$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве.

Если вектор $\vec{d}$ имеет координаты $\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$ в этом базисе, то имеет место разложение:

$$\vec{d}=\alpha_1\cdot\vec{a}+\alpha_2\cdot\vec{b}+\alpha_3\cdot\vec{c} .$$

Векторное равенство в координатной форме можно записать в виде:

$$\{0;18;39\} = a_1\{2;3;5\} + a_2\{7;14;25\} + a_3\{13;12;16\}$$

что равносильно системе трех уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 7\alpha_2 + 13\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 14\alpha_2 + 12\alpha_3 = 18, \\ 5\alpha_1 + 25\alpha_2 + 16\alpha_3 = 39. \end{cases}$$

Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

то, вычислив определители

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 13 \\ 18 & 14 & 12 \\ 39 & 25 & 16 \end{vmatrix} = 12;$$

$$\Delta a_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 3 & 18 & 12 \\ 5 & 39 & 16 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\Delta a_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 14 & 18 \\ 5 & 25 & 39 \end{vmatrix} = 3,$$

можно найти решение системы по формулам Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}(i = 1,2,3...)$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta} = \frac{12}{-3} = -4; \ \alpha_3 = \frac{\Delta a_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Вектор $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеет вид

$$\vec{d} = -4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c},$$

его координаты в этом базисе: $\vec{d} = \{-4;3;-1\}$.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии на плоскости

Прямая на плоскости

В декартовой системе координат каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени.

Пусть точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит прямой *l*, нормальный вектор $\vec{n} \perp l, \vec{n} = \{A, B\}$. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ с нормальным (перпендикулярным) вектором $\vec{n} = \{A, B\}$, имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Общее уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах $Ax+By+C=0$. Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\alpha$: $y = kx+b$, где α – угол, образованный прямой с осью О*x*; *b* – величина отрезка, отсекаемого на оси О*y*. Если угол $\alpha = 0$, то прямая параллельна оси О*x* и *y* = *b*. Если $\alpha = 90^0$, то прямая перпендикулярна оси О*x* и *x* = *b*.

Уравнение прямой, проходящей через (·) $M_1(x_1;y_1)$ с угловым коэффициентом *k:* $y - y_1 = k(x-x_1)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2)$: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Угол между прямыми: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$. Условия параллельности прямых: $k_1 = k_2$ $(\alpha = 0)$; перпендикулярности: $k_2 = -1/k_1$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых.

Расстояние от точки до прямой.

Дана прямая $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0;y_0)$. Тогда расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой: $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Неравенства и их геометрический смысл

Материал настоящей темы программы в рекомендованных учебниках отсутствует. Ниже приводится его краткое изложение.

Метод координат позволяет истолковать геометрически не только уравнения, но и неравенства с двумя переменными. Для этого достаточно рассматривать эти переменные как координаты точек на плоскости. Тогда, как известно, геометрической интерпретацией уравнения

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

является некоторая линия, координаты точек которой удовлетворяют этому уравнению, а само уравнение (1) называется уравнением этой линии. Аналогично, множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$F(x,y)<0 \qquad (2)$$

рассматривается как геометрический образ этого неравенства. Наряду с неравенством (2) можно рассматривать также неравенство

$$F(x,y)>0 \qquad (3)$$

Так, например, уравнение

$$\left(x-\alpha\right)^2+\left(y-\beta\right)^2-r^2=0 \qquad (4)$$

определяет, как известно, окружность с центром в точке $C\ (\alpha\,;\beta\,)$ и радиусом r.

Неравенство

$$\left(x-\alpha\right)^2+\left(y-\beta\right)^2-r^2<0 \qquad (5)$$

определяет множество точек, лежащих внутри, а неравенство

$$\left(x-\alpha\right)^2+\left(y-\beta\right)^2-r^2>0 \qquad (6)$$

множество точек, лежащих вне круга, ограниченного окружностью (4).

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), называют *областью решений* этого уравнения. Аналогично говорят и об *области решений неравенства* (2) или (3).

Область решений уравнения (1) или неравенства (2) или (3) может оказаться и *пустым множеством,* т.е. множеством, не содержащим ни одной точки. Таковы, например, области решений уравнения $Ax+By+C=0$, где $A=B=0, C\neq 0$ или неравенства $x^2+y^2+1<0$. И, наоборот, уравнению или неравенству могут удовлетворять координаты любой точки плоскости, как, например, уравнению $Ax+By+C=0$, где $A=B=C=0$, или неравенству $x^2+y^2+1>0$. Обычно, изучая линии и их уравнения, такие случаи исключают, накладывая соответствующие ограничения на рассматриваемые уравнения. Если выражение $F\left(x;y\right)$ линейное, т.е. $F\left(x;y\right)=Ax+By+C$, где *A, B, C* – постоянные, то мы приходим к линейному уравнению

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

и двум *линейным неравенствам*

$$Ax + By + C < 0 \qquad (8)$$

$$Ax + By + C > 0 \qquad (9)$$

Если A и B не равны одновременно нулю ($A^2 + B^3 \neq 0$), то, как известно, уравнение (7) является уравнением прямой линии. Все точки, не лежащие на прямой (7), разобьются на два множества, лежащие по разные стороны от прямой (7). Можно показать, что эти множества определяются неравенствами (8) и (9).

Множество точек, лежащих на некоторой прямой и по одну сторону от нее, называется *полуплоскостью*. Очевидно, любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, для которых она является общей границей; граница считается принадлежащей одновременно обеим полуплоскостям.

Если граница полуплоскостей определяется уравнением (7), то полуплоскости определяются неравенствами

$$Ax + By + C \le 0 \qquad (10)$$

$$Ax + By + C \ge 0 \qquad (11)$$

Легко сформировать *критерий,* устанавливающий, какую из двух полуплоскостей определяет данное линейное неравенство: выбрав произвольную точку N, не принадлежащую границе, подставим ее координаты в данное неравенство; если неравенство удовлетворяется, то оно определяет полуплоскость, содержащую точку N, а если не удовлетворяет, то полуплоскость, не содержащую точку N.

Пример 4. Даны три точки A (2; 1), B (6; 3), C (4; 5). Найти неравенства, определяющие полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C.

Решение

Составим уравнение прямой AB, проходящей через две точки:

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-1}{3-1}, \text{ или } \quad x - 2y = 0 .$$

Подставив в левую часть этого уравнения координаты точки C, получим:

$4 - 2 \cdot 5 = -6 < 0$. Следовательно, точка C не лежит на прямой AB, а искомое неравенство будет $x - 2y \le 0$.

Система неравенств $\begin{cases} F_1(x,y)<0, \\ F_2(x,y)<0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x,y)<0 \end{cases}$ также может быть истолкована геометрически как область решений этой системы, т. е. как множество всех точек, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам системы.

Пересечением нескольких множеств называется множество, каждый элемент которого принадлежит всем пересекающимся множествам. Очевидно, область решений системы неравенств является пересечением областей решений каждого из неравенств системы.

Студенту рекомендуется убедиться в том, что область решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-1<0, \\ x+y>0 \end{cases}$$

представляет собой совокупность внутренних точек полукруга $x^2+y^2-1<0$, расположенных "выше" прямой $x+y=0$, и сделать чертеж.

Областью решений системы линейных неравенств $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1 \le 0, \\ A_2x+B_2y+C_2 \le 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_mx+B_my+C_m \le 0 \end{cases}$ является, очевидно, пересечение полуплоскостей, определяемых каждым из неравенств системы. Границей ее является ломаная, образованная граничными прямыми этих плоскостей. Такое множество точек называется *многоугольной* областью. Если, кроме того, эта область ограничена, т. е, не содержит точек со сколь угодно большими значениями координат, то ее называют *многогранником.*

Пример 5. Записать с помощью системы неравенств множество точек, лежащих внутри треугольника с вершинами в точках $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(4, 5)$.

Решение

Очевидно, множество точек треугольника *ABC* можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей.

Неравенство, определяющее первую из этих полуплоскостей, будет

$$x-2\cdot y \le 0 .$$

Оно было найдено при решении задачи 6. Аналогично, вторая полуплоскость определяется неравенством $x+y-9\le 0$, а третья – неравенством $2\cdot x-y-3\ge 0$.

Итак, множество точек треугольника *ABC* определяется системой линейных неравенств

$$\begin{cases} x-2y\le 0, \\ x+y-9\le 0, \\ 2\cdot x-y-3\ge 0. \end{cases}$$

Кривые второго порядка

Окружность

Окружностью радиусом *R* с центром в точке M_0 называется множество всех точек *M* плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$.

Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^1=R^2$ – определяет окружность радиусом *R* с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=R^2$.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами. Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать *2a*. Фокусы эллипса обозначают двумя буквами F_1 и F_2, а расстояние между ними – через *2c*.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид (рис. 1):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{где} \quad b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Число $\varepsilon=c/a$ называется эксцентриситетом эллипса.

Прямые $x=\pm a/\varepsilon$ называются директрисами эллипса.

Если центр эллипса находится в точке M_0 (x_0,y_0), то уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

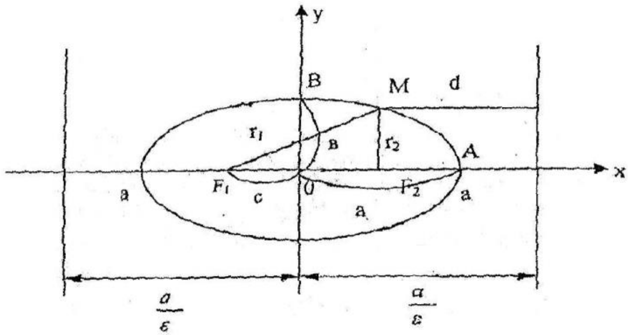


Рис. 1

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная $|2a|$.

Каноническое уравнение гиперболы (рис. 2) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \text{где}\quad b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

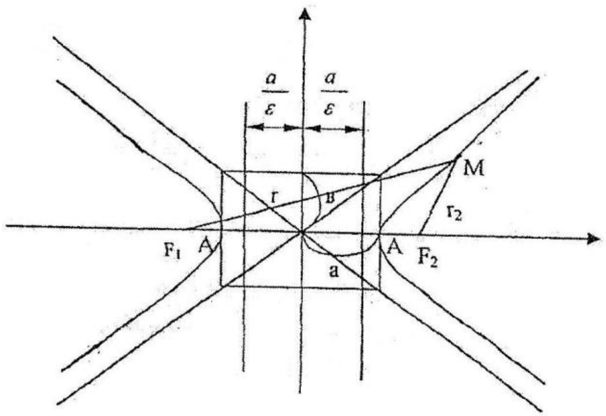


Рис. 2

Прямые $y=\pm bx/a$ являются асимптотами гиперболы.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы.

Парабола

Параболой называют геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы (рис. 3) имеет вид $y^2 = 2px$.

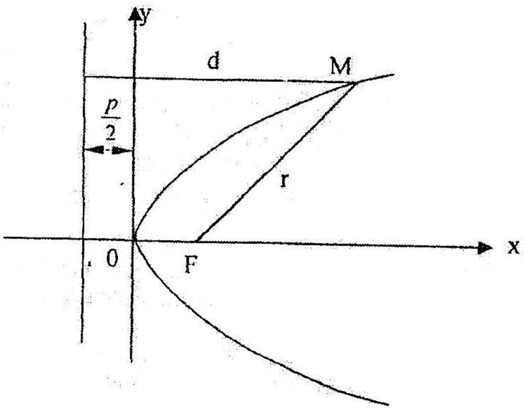


Рис. 3

Пример 6. Установить, какая линия определяется уравнением $x = 5 - \dfrac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

Решение

Преобразуем уравнение: $x - 5 = -\dfrac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

Так как в правой части число отрицательное, то $x - 5 \le 0$. Возведя обе части в квадрат, получим:

$$(x-5)^2 = \frac{9}{16}\left(y^2 + 4y - 12\right),$$

$$16(x-5)^2 = 9\left(y^2 + 4y + 4 - 4 - 12\right),$$

$$16(x-5)^2 = 9(y+2)^2 - 144,$$

$16(x-5)^2-9(y+2)^2=-144$. разделим все на (–144):

$\frac{9(y+2)^2}{16}-\frac{(x-5)^2}{9}=1-$ это уравнение гиперболы, центр которой находится в точке (5; –2), a = 3, b = 4. Поскольку $x \le 5$, то в качестве ответа выбираем часть гиперболы, лежащую левее прямой $x=5$.

Пример 7. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от точки A (0;2) и прямой $y=4$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.

Решение

В системе координат XOY построить точку A (0;2) и прямую $y=4$. Пусть M (x;y) – производная точка искомого геометрического места точек. Опустим из точки M перпендикуляр MB на данную прямую $y=4$ и определим координаты точки B. Очевидно, что абсцисса точки B равна абсциссе точки M, а ордината точки B равна 4, т.е. B (x;4). По условию задачи MA=MB. Определим расстояния MA и MB, тогда для любой точки M (x;y), принадлежащей искомому месту точек, выполнено соотношение

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-4)^2}.$$

Возведя в квадрат левую и правую часть и преобразовав, получим:

$$x^2+(y-2)^2=(y-4)^2; \quad x^2+y^2-4y+4=y^2-8y+16;$$

$$x^2=-4y+12; \qquad y=-\frac{x^2}{4}+3.$$

Последнее уравнение есть уравнение параболы с вершиной в точке O' (0, 3) и осью симметрии OY. Построим эту параболу (рис. 4).

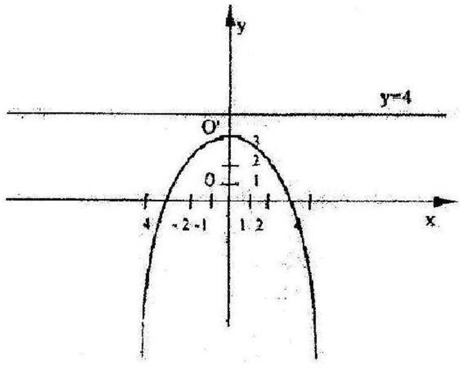


Рис. 4

Тема 4. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Плоскость

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени. Справедливо и обратное: каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Возьмем на плоскости P точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$, зададим нормальный вектор $\vec{n} \perp P$, $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Тогда

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через $(\cdot)M_0 \perp \vec{n}$.

$Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть известно уравнение плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$ и дана точка $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$, которая не принадлежит плоскости. Тогда расстояние от точки до плоскости $d = \dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, следует подставить координаты этой точки в уравнение плоскости и полученную величину поделить на модуль вектора $\vec{n}$.

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ лежат в плоскости P. Тогда

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ —уравнение плоскости, проходящей через эти три точки.

Пусть плоскости P_1 и P_2 заданы общими уравнениями $P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ и нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих плоскостей: $\vec{n}_1=\left\{A_1; B_1; C_1\right\}$, $\vec{n}_2=\left\{A_2; B_2; C_2\right\}$. Угол между плоскостями равен углу между нормалями, который можно найти по формуле

$$\alpha = \arccos\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|},\ \alpha = \arccos\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Плоскости параллельны, если $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Плоскости перпендикулярны, если $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2};\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0,$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Прямая в пространстве

В общем случае прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая на прямой; $\vec{q} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор (параллельный данной прямой), тогда $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ – канонические уравнения прямой.

Уравнения $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$ – это параметрические уравнения прямой, t – параметр.

Уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$.

Угол между прямыми

Пусть 2 прямые заданы в канонической форме, т.е. известны направляющие векторы каждой прямой: $\overrightarrow{q_1} = \{m_1; n_1; p_1\}$, $\overrightarrow{q_2} = \{m_2; n_2; p_2\}$.

Угол φ между прямыми равен углу между направляющими векторами: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Если прямые параллельны, то $\vec{q}_1 \| \vec{q}_2$ и $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Если прямые перпендикулярны, $\vec{q}_1 \perp \vec{q}_2$, то $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0$ и $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ – условия перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть дана прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: из канонического уравнения $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$ выразим *x*, *y*, *z* через параметр *t*: $\begin{cases} x = x_0 + t\cdot m, \\ y = y_0 + t\cdot n, \\ z = z_0 + t\cdot p \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой.

Если прямая $\vec{l}_1$ параллельна плоскости α, то направляющий вектор прямой $\bar{q}\perp\vec{n}$ (нормальному вектору плоскости), т.е. $\vec{q}\cdot\vec{n}=0$, $Am+Bn+Cp=0$. Если дополнительно координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ удовлетворяют уравнению плоскости, то прямая *l* принадлежит плоскости. Если $\vec{q}\parallel\vec{n}$, то прямая перпендикулярна плоскости, т.е. $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ – условие перпендикулярности плоскости и прямой.

Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, уравнение прямой необходимо записать в параметрическом виде и подставить в уравнение плоскости; из полученного равенства находим параметр *t* и, подставив найденное значение *t* в параметрические уравнения прямой, определяем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Угол между прямой и плоскостью – это угол φ между прямой и ее проекцией на плоскость.

Если между векторами $\vec{q}$ и $\vec{n}$ острый угол, то $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{q}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|}$,

или $\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|}$ – угол между прямой и плоскостью.

Тема 5. Введение в анализ (функции, пределы, непрерывность)

Предел функции

Определение предела функции

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящимся к числу a, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Аналогично, A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящимся к ∞, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Это записывают: $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$.

Вычисление пределов. Применение основных теорем

При вычислении пределов функции необходимо знать следующие теоремы:

$\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C – постоянная;

$\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x).$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ существуют, то

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x);$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x);$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0,$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Кроме того, надо пользоваться тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке из области определения справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Далее следует отметить, что

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = \infty, \text{если } \lim_{x\to a} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)} = 0, \text{ если } \lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Раскрытие неопределенностей

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием неопределенности. Часто приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

Первый замечательный предел.

При вычислении пределов трансцендентных функций часто используется формула: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел.

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = [1^\infty] = e, \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = [1^\infty] = e.$$

Сравнение бесконечно малых

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если предел их отношения $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен некоторому числу *C*, отличному от нуля.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Эквивалентность обозначается символом $\sim$, т.е. пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если эти бесконечно малые заменить их эквивалентными.

Основные эквивалентности при $x \to 0$:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x),\ \ \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x),\ \ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x),\ \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$e^{a(x)} - 1 \sim \alpha(x),\ \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x),\ a^{a(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a.$$

Непрерывность и точки разрыва функции

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в **точке** x_0, если: 1) она определена в этой точке; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;3) этот предел равен значению функции в этой точке x_0 т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то функция имеет разрыв в точке x_0.

Различают следующие виды разрывов:

– если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует, но функция $f(x)$ в точке x_0 не определена или определена, но так, что $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является устранимым;

– если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но существует оба односторонних предела в точке x_0 (они не равны друг другу), то разрыв в точке x_0 является разрывом первого рода, или скачком;

– если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности равен бесконечности), и следовательно, не существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является разрывом второго рода.

Пример 8. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

Решение

Эта функция является дробно-рациональной, и поэтому она непрерывна во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля. В точках $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$ функция не определена, и поэтому имеет точки разрыва. Нетрудно проверить, что в обеих этих точках односторонние пределы бесконечные:

$$\lim_{x\to -3-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty,\qquad \lim_{x\to -3+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to +3-}\frac{x}{x^2-9}=-\infty,\qquad \lim_{x\to +3+}\frac{x}{x^2-9}=+\infty.$$

Следовательно, $x=\pm 3$ – точка разрыва второго рода. График этой функции представлен на рис.5.

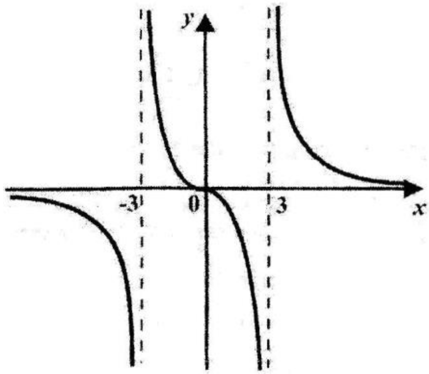


Рис. 5

Пример 9. Найти следующие пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg 7x}$, *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Решение

а. Воспользуемся эквивалентностью:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{arctg 7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$$

б. Преобразуем знаменатель по формуле: $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$ $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$. При $x\to 0$, $\frac{x}{2}$ также стремится к нулю, поэтому умножим числитель и знаменатель на 2 и, применяя формулу первого замечательного предела, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot 2}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}==\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}1=\sqrt{2}$$

Пример 10.: *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\mathrm{tg}7x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Решение

а. Воспользуемся эквивалентностью и формулой разности синусов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{tg7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos 4x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos 4x}{7x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{7x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\frac{2}{7}\cdot 1=\frac{2}{7}.$$

$$б)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}==\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$$

$$=\ln e=1;$$

$$в).\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left|\begin{matrix} y=e^x-1\\ x=\ln(1+y)\\ x\to 0, y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$$

Тема 6. Производная и дифференциал

Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ обозначается через y' или $f'(x)$. Таким образом, по определению:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция отыскания производной $f'(x)$ данной функции $f(x)$ часто называется дифференцированием этой функции.

Основные правила дифференцирования

Пусть имеются дифференциальные функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$.

1. $C' = 0.$
2. $(U \pm V)' = U' \pm V'.$
3. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$, $C = const.$
4. $(U \cdot V)' = U'V + UV'.$
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $(V \neq 0).$

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция. Если для соответствующих друг другу значений x и y существуют производные $f'(u)$ и $u' = \varphi'(x)$, то существует и производная от y по x, причем $y' = f_u^{'}(u) \cdot u_x^{'}$ т.е. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$

Формулы дифференцирования сложных функций

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$
3. $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}.$
4. $\left(a^n\right)' = a^n \cdot \ln a \cdot u'.$

5. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

6. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

7. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

8. $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

9. $\left(\mathrm{ctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

10. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $\left(\mathrm{arctg}u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

13. $\left(\mathrm{arcctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Логарифмическая производная

Пусть дана функция $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Логарифмируем: $\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x)$. Дифференцируя, получим

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$y' = y \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Учитывая, что $y = f(x)^{\varphi(x)}$, получим ответ

$$y' = f(x)^{\varphi(x)} \left[\frac{\varphi(x) \cdot f'(x)}{f(x)} + \ln f(x) \cdot \varphi'(x) \right].$$

Производная логарифмической функции $\ln y = \dfrac{y'}{y}$ называется *логарифмической производной.* Ее удобно использовать для нахождения производных функций, выражения которых существенно упрощаются при логарифмировании.

Пример 11. Вычислить производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение

Логарифмируем:

$\ln y = \ln(x^{\sin x}) = \sin x \cdot \ln x, (\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$;

$\dfrac{y'}{y} = (\sin x \cdot \ln x)' = \cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$; $y = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{1}{x}\sin x)$.

Производная неявной функции

Если задана неявная функция $F(x,y)=0$, то для вычисления производной надо взять производные от правой и левой частей, помня, что $y=y(x)$.

Пример 12. Найти производную функции, заданной неявно

$a)\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1;$. $x^2+y^2=10$.

Решение

$$a.\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1;\ \left(\frac{x^2}{9}\right)'+\left(\frac{y^2}{16}\right)'=(1)'_x;\ \frac{2x}{9}+\frac{2y\cdot y'}{16}=0;\ y'=-\frac{16x}{9y}.$$

$$б.\ x^2+y^2=10;\ (x^2+y^2)'=10';\ 2x+2y\cdot y'=0;\ y'=-\frac{y}{x}.$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть даны два уравнения $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$.

Каждому значению t соответствует определение значения x и y на плоскости. Если $T_1\le t\le T_2$, то точка описывает кривую на плоскости – кривая задана параметрически, t – параметр. Если $x=\varphi(t)\Rightarrow t=F(x)$, и $y=\psi(F(x))$. Такое задание определяет функцию $y=f(x)$, y от x задается параметрически.

Производная функции, заданной параметрически: $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}$.

Дифференциал функции

Пусть $y=f(x)$ и аргумент x получил приращение Δx. Тогда дифференциалом называется величина $dy=f'(x)\cdot\Delta x$, но $dx=x'_x\cdot\Delta x=\Delta x$, поэтому $dy=f'(x)dx=y'dx,\ y'=\frac{dy}{dx}$ – производная равна отношению дифференциалов.

Вычисление дифференциала функции называется ее дифференцированием, при этом вычисляется производная, поэтому процесс вычисления производной часто называется дифференцированием.

Дифференциал – главная линейная часть приращения функции.

Функция, обладающая дифференциалом, называется дифференцируемой.

Свойства дифференциала вытекают из свойств производной:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции: $y = f(u)$, где $u = u(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции: $\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot u'(x)$, то есть $dy = f'(u)u' \cdot dx = f'(u)du$ – инвариантность дифференциала – дифференциал сложной функции имеет такой же вид, как и для простой переменной.

Дифференциал широко применяется в приближенных вычислениях.

Дифференциал $dy \simeq \Delta y$, если $\Delta x \to 0$, то $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Пример 13. Вычислить приближенное значение $\sqrt[n]{a}$, заменив в точке $x = x_0$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом при $n = 4$, $a = 2386$, $x_0 = 2401$.

Решение

Известно, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ представляет собой главную часть приращения этой функции Δy. Если приращение аргумента x мало по абсолютной величине, то приращение функции приближенно равно дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$.

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а $dy = f'(x)dx$, то имеет место приближенное равенство

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx.$$

Пусть $x = x_1$, $x_1 + \Delta x = x_2$, т.е. $\Delta x = x_2 - x_1$.

Тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$ или $f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)\Delta x$.

Полученное приближенное равенство дает возможность найти значение функции при $x = x_2$, если известно значение функции и ее производной при $x = x_1 = 2401$.

Положив $x_1 = 2401$, $x_2 = 2386$, $\Delta x = 2386 - 2401 = -55$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[4]{x}$; $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;

$$\sqrt{2386} = \sqrt[4]{2401-55} \approx \sqrt[4]{2401} - \frac{55}{4\sqrt[4]{2401^3}} \approx$$

$$\approx 7 - \frac{55}{3443} = 7 - \frac{55}{1372} = 6{,}959.$$

Пример 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{10x+10}{x^2+2x+2}$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение

Наибольшее значение функции на отрезке $a \le x \le b$ обозначается $\max\limits_{[a;b]}(f)$, наименьшее значение $\min\limits_{[a;b]}(f)$. Непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значения

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$:

а. найти все критические точки, принадлежащие интервалу $(a;b)$ и входящие в область определения функции; вычислить значение функции в этих точках;

б. вычислить значение функции на концах отрезка, т.е. найти $f(a), f(b)$;

в. сравнить полученные результаты: наибольшие из значений, найденных в пп. a и b будет наибольшим значением на заданном отрезке $[a;b]$; аналогично, наименьшее из значений, найденных в пп. a и *б* будет наименьшим значением функции на отрезке $[a;b]$.

Найдем критические точки, принадлежащие интервалу (–1;3). Для этого найдем производную (как производную частного):

$$y' = \frac{-10x(x+2)}{(x^2+2x+x)^2}\ ;\ -10x(x+2)=0\ ;\ x_1=0, x_2=-2\ .$$

Найденная критическая точка $x_1 = 0$ входит в интервал, а $x_2 = -2$ не входит в интервал. Вычислим значение функции в точке x=0 и на концах отрезка $x=-1$, $x=3$.

$$f(0)=5,\ f(-1)=0,\ f(3)=2\frac{6}{17}$$

Сравнивая полученные результаты, заключаем, что

$$y_{\min} = f(-1)=0;\ \ y_{\max} = f(0)=5.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Если вычислить производную от первой производной y', то получим вторую производную: $y' = (y')' = y''(x)$. Производная от второй производной: $y''' = (y'')'$ – третья производная. Производная n-го порядка – производная от производной (n–1) порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Пример 15. Найти производные функции $y = x^4$ до 5-го порядка включительно.

Решение

$$y=x^4; y'=4x^3; y''=(4x^3)'=12x^2; y'''=24x; y^{(4)}=24; y^{(5)}=0\ ;$$

Для дифференцируемых функций u и v:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)};$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + uv^{(n)}$$ – формула Лейбница.

Дифференциал второго порядка:

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2 = d^2y = f''(x)dx^2,$$

$$(dx)^2 = dx^2\ ;$$

$d^n x = f^{(n)} \cdot dx^n$ – дифференциал n-го порядка.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1. Даны две матрицы *A* и *B*. Найти: *а*) *AB*; *б*) *BA*; *в*) A^{-1}; *г*) AA^{-1}; *д*) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

Решение

а. Найти *AB*

$A\cdot B=C$

Находим сумму произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

$c_{11}=3\cdot 2+1\cdot 5+0\cdot 1=11$ – элементы 1-й строки умножаем на соответствующие элементы 1-го столбца,

$c_{12}=3\cdot 7+1\cdot 3+0\cdot(-6)=24$ – элементы 1-й строки умножаем на соответствующие элементы 2-го столбца,

$c_{13}=3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1=1$ – элементы 1-й строки умножаем на соответствующие элементы 3-го столбца,

$c_{21}=4\cdot 2+3\cdot 5+2\cdot 1=25$ – элементы 2-й строки умножаем на соответствующие элементы 1-го столбца и т. д.

$c_{22}=4\cdot 7+3\cdot 3+2\cdot(-6)=25$

$c_{23}=4\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 1=5$

$c_{31}=2\cdot 2+2\cdot 5+(-7)\cdot 1=7$

$c_{32}=2\cdot 7+2\cdot 3+(-7)\cdot(-6)=62$

$c_{33}=2\cdot 0+2\cdot 1+(-7)\cdot 1=-5$

Запишем матрицу *C:*

$$C=\begin{pmatrix}11 & 24 & 1\\ 25 & 25 & 5\\ 7 & 62 & -5\end{pmatrix}$$

б. Вычислить произведение матриц *BA*

$B\cdot A=D$

Решение аналогично решению в пункте *a*, только находим сумму произведений элементов *i*-й строки матрицы *B* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *A*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot3+7\cdot4+0\cdot2 & 2\cdot1+7\cdot3+0\cdot2 & 2\cdot0+7\cdot2+0\cdot(-7) \\ 5\cdot3+3\cdot4+1\cdot2 & 5\cdot1+3\cdot3+1\cdot2 & 5\cdot0+3\cdot2+1\cdot(-7) \\ 1\cdot3-6\cdot4+1\cdot2 & 1\cdot1-6\cdot3+1\cdot2 & 1\cdot0-6\cdot2+1\cdot(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 23 & 14 \\ 29 & 16 & -1 \\ -19 & -15 & -19 \end{pmatrix}$$

в. Найти A^{-1}

1. Находим определитель матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 3\cdot3\cdot(-7)+4\cdot2\cdot0+1\cdot2\cdot2-0\cdot3\cdot2-2\cdot2\cdot3-4\cdot1\cdot(-7) = -43$$

$-43 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

2.Находим обратную матрицу.

Для вычисления обратной матрицы запишем матрицу *A*, дописав к ней справа единичную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Чтобы найти обратную матрицу, используем элементарные преобразования над строками матрицы, преобразуем левую часть полученной матрицы в единичную.

1-ю строку делим на 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

от 2-й строки отнимаем 1-ю строку, умноженную на 4; от 3-й строки отнимаем 1-ю строку, умноженную на 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 2 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -7 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2-ю строку делим на $\frac{5}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -7 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

от 1-й строки отнимаем 2-ю строку, умноженную на $\frac{1}{3}$; от 3-й строки отнимаем 2-ю строку, умноженную на $\frac{4}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.4 & 0.6 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & -8.6 & 0.4 & -0.8 & 1 \end{array}\right)$$

3-ю строку делим на –8.6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.4 & 0.6 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{43} & \frac{4}{43} & -\frac{5}{43} \end{array}\right)$$

к 1-й строке добавляем 3-ю строку, умноженную на 0,4; от 2-й строки отнимаем 3-ю строку, умноженную на 1,2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 25/43 & -7/43 & -2/43 \\ 0 & 1 & 0 & -32/43 & 21/43 & 6/43 \\ 0 & 0 & 1 & -2/43 & 4/43 & -5/43 \end{array}\right)$$

Ответ:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{25}{43} & -\frac{7}{43} & -\frac{2}{43} \\ -\frac{32}{43} & \frac{21}{43} & \frac{6}{43} \\ -\frac{2}{43} & \frac{4}{43} & -\frac{5}{43} \end{pmatrix}=\frac{1}{-43}\cdot\begin{pmatrix} -25 & 7 & 2 \\ 32 & -21 & -6 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

г. Найти AA^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-43}\cdot\begin{pmatrix} -25 & 7 & 2 \\ 32 & -21 & -6 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 3\cdot(-25)+1\cdot 32+0\cdot 2 & 3\cdot 7+1\cdot(-21)+0\cdot(-4) & 3\cdot 2+1\cdot(-6)+0\cdot 5 \\ 4\cdot(-25)+3\cdot 32+2\cdot 2 & 4\cdot 7+3\cdot(-21)+2\cdot(-4) & 4\cdot 2+3\cdot(-6)+2\cdot 5 \\ 2\cdot(-25)+2\cdot 32+(-7)\cdot 2 & 2\cdot 7+2\cdot(-21)+(-7)\cdot(-4) & 2\cdot 2+2\cdot(-6)+(-7)\cdot 5 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{43}\begin{pmatrix} -43 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

д. Найти $A^{-1}A$.

Решение аналогично решению в пункте *г*: $A^{-1}A=E$.

ЗАДАЧА 2. Доказать совместность данной системы линейных уравнений и решить ее тремя способами: *а*) по формулам Крамера; *б*) методом Гаусса; *в*) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ 3x_1+2x_2+x_3=10, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

Решение

Вычислим ранг матрицы системы *r(A)*: очевидно, что $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Вычислим определитель системы: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-14\neq 0;\quad \Delta\neq 0$,

следовательно, $r(A)=3$.

Система совместна и имеет единственное решение.

а. Решаем систему по формулам Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ $(i = 1, 2, 3, ...)$.

Для этого вычислим определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

Тогда решение системы находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

б. Решаем систему методом Гаусса. Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее – неизвестное x_1, первым ведущим элементом будет $a_{11} = 1$. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений, прибавив ко второму уравнению первое, умноженное на –3, а к третьему – первое, умноженное на –4. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_3 = 8, \\ -4x_2 - 2x_3 = -14, \\ -5x_2 - 6x_3 = -28. \end{cases}$$

Первый шаг закончен. Исключим x_2 из третьего уравнения, прибавив к третьему уравнению второе, умноженное на –5 / 4. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -4x_2 - 2x_3 = -14, \\ -\dfrac{7}{2}x_3 = -\dfrac{21}{2}. \end{cases}$$

Второй шаг закончен. В третьем уравнении осталось одно неизвестное. Прямой ход метода Гаусса закончен – система приведена к треугольному виду. Обратным ходом получаем:

$$x_3 = 3, \quad \text{из 3-го уравнения},$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}(-14 + 2x_3) = 2, \quad \text{из 2-го уравнения}.$$

$$x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 1, \quad \text{из 1-го уравнения}.$$

Решение системы $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$ – единственное.

в. Решим систему матричным способом. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений эквивалентна матричному равенству $AX = B$.

Так как определитель матрицы *A*: $\det A = \Delta = 14 \neq 0$, то матрица *A* невырожденная и имеет обратную матрицу. Умножив обе части матричного уравнения на матрицу A^{-1} слева, получим решение в матричной форме: $X = A^{-1}B$.

Алгебраические дополнения вычислим по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где минор M_{ij} получается вычеркиванием *i*-го столбца и *j*-й строки матрицы *A*. Получаем алгебраические дополнения (если суммы номера строки и номера столбца нечетная,то перед определителем записываем –):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Получили обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, теперь найдем

матрицу *X:*

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7\cdot 8+7\cdot 10+0\cdot 4 \\ 10\cdot 8-6\cdot 10+2\cdot 4 \\ 1\cdot 8+5\cdot 10-4\cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Получили: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$.

ЗАДАЧА 3. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A*(1; 0), *B*(13;–9), *C*(17; 13). Найти: 1) длину стороны *AB;* 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *B* в градусах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину, не используя координаты точки *D*; 5) уравнение медианы, приведенной через вершину *C*; 6) точку пересечения высот треугольника; 7) систему линейных неравенств, определяющую множество внутренних точек треугольника *ABC*. Сделать чертеж.

Решение

1. Расстояние d между точками *A* $(x_1; y_1)$ и *B* $(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны *AB*:

$$d = |AB| = \sqrt{(13-1)^2 + (-9-0)^2} = \sqrt{144+81} = 15 .$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки *A* $(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_1}. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек *A* и *B*, получим уравнение стороны *AB*:

$$\frac{y-0}{-9-0} = \frac{x-1}{13-1}; \qquad \frac{y}{-9} = \frac{x-1}{12}; \qquad 3x + 4y - 3 = 0 .$$

Решив последнее уравнение относительно *y*, находим уравнение стороны *AB* в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}; \text{ откуда } k_{AB} = -\frac{3}{4}..$$

Подставляя в (2) координаты точек *B* и *C*, получим уравнение прямой *BC*:

$$\frac{y+9}{13+9} = \frac{x-13}{17-13}; \qquad \frac{y+9}{22} = \frac{x-13}{4}; \qquad 11x - 2y - 161 = 0$$

или $y = 5,5x - 80,5$, откуда $k_{BC} = 5,5.$

3. Тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3)$$

Формула (3) определяет тангенс угла, образованного вращением вокруг точки пересечения прямой с угловым коэффициентом k_1 до совмещения ее с прямой, имеющей угловой коэффициент k_2 (вращение против хода часовой стрелки).

Искомый угол *B* образован прямыми *AB* и *BC*, угловые коэффициенты которых уже найдены:

$$k_2 = k_{AB} = -\frac{3}{4}; \qquad k_1 = k_{BC} = 5,5.$$

Применяя (3), получаем: $\operatorname{tg}B = \dfrac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \dfrac{-\frac{3}{4} - 5,5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5,5} = 2;$

$B = 63^\circ 26'$, или $B \approx 1{,}11$ радиан (с помощью калькулятора или компьютера).

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right). \qquad (4)$$

Высота *CD* перпендикулярна стороне *AB*. Чтобы найти угловой коэффициент высоты *CD*, воспользуемся условием перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Так как $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $k_{CD} = \frac{4}{3}$. Подставив в (4) координаты точки *C* и найденный угловой коэффициент высоты, получим уравнение высоты *CD:*

$$y - 13 = \frac{4}{3}\left(x - 17\right); \quad 3y - 39 = 4x - 68; \quad 4x - 3y - 29 = 0.$$

Чтобы найти длину высоты *CD*, не используя координаты точки *D*, рассмотрим формулу для расстояния от точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

В качестве прямой берем прямую AB с уравнением $3x + 4y - 3 = 0$, а за точку M берем точку C (17; 13). Подставляя в (5), получим длину высоты CD:

$$|CD| = \frac{|3 \cdot 17 + 4 \cdot 13 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{100}{5} = 20.$$

5. Чтобы найти уравнение медианы CE, определим координаты точки E, которая является серединой стороны AB, применяя формулы деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (6)$$

Следовательно, $x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1 + 13}{2} = 7;$

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + (-9)}{2} = -4,5; \quad E(7; -4,5).$$

Подставляя в (2) координаты точек C и E, находим уравнение медианы:

$$\frac{y - 13}{-4,5 - 13} = \frac{x - 17}{7 - 17}; \; \frac{y - 13}{-17,5} = \frac{x - 17}{-10}; \; 17,5x - 10y - 167,5 = 0, \qquad .$$

$$7x - 4y - 67 = 0.$$

6. Чтобы найти точку пересечения высот треугольника, решим совместно уравнения высот CD и AF.

Уравнение высоты CD найдено выше. Для нахождения уравнения AF воспользуемся условием перпендикулярности прямых AF и BC. Так как $k_{BC} = 5,5,$ то $k_{AE} = -\dfrac{2}{11}$. Подставив в (4) координаты точки A и найденный угловой коэффициент высоты, получим уравнение высоты AF:

$$y - 0 = -\frac{2}{11}(x - 1); \qquad 11y = -2x + 2; \qquad 2x + 11y - 2 = 0.$$

Для нахождения координат точки O – точки пересечения высот треугольника, решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 29 = 0, \\ 2x + 11y - 2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 6,5$; $y = -1$; $O(6,5;-1)$.

7. Очевидно, множество внутренних точек треугольника ABC можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, третья ограничена прямой CA и содержит точку B.

Неравенство, определяющее первую из этих полуплоскостей, получим следующим образом. Возьмем уравнение стороны AB:

$$3x + 4y - 3 = 0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки C, получим: $3 \cdot 17 + 4 \cdot 13 - 3 = 100 > 0$.

Следовательно, точка C не лежит на прямой AB, а искомое неравенство будет: $3x + 4y - 3 > 0$.

Аналогично, полуплоскость, ограниченная прямой BC и содержащая точку A, определяется неравенством: $11x - 2y - 161 < 0$,

а полуплоскость, ограниченная прямой AC и содержащая точку B, определяется неравенством: $13x - 16y - 13 > 0$. Итак, множество внутренних точек треугольника ABC определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 3 > 0, \\ 11x - 2y - 161 < 0, \\ 13x - 16y - 13 > 0. \end{cases}$$

Треугольник ABC, высоты CD и AF, медиана CE, точка пересечения высот O построены в системе координат XOY (рис. 6).

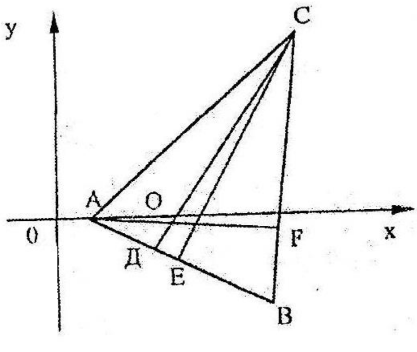


Рис. 6

ЗАДАЧА 4. Даны координаты $A_1(1;\ 2;\ 3)$, $A_2(9;\ 6;\ 4)$, $A_3(3;\ 0;\ 4)$, $A_4(5;\ 2;\ 6)$ вершин пирамиды. Требуется:

1) записать разложение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$; 3) найти угол между ребром $\overrightarrow{A_1A_4}$ и гранью $A_1A_2A_3$; 4) найти площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) найти объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$; 6) составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки A_1 и A_2; 7) составить канонические уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 8) найти точку пересечения высоты с гранью $A_1A_2A_3$.

Решение

1. Произвольный вектор может быть разложен по ортам формулой

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (1)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси O_x, O_y, O_z. Если даны координаты начала $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и конца $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатные оси находятся по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1;\ a_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

Тогда из (2) и (1) получаем

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (3)$$

Подставив в (3) координаты точек A_1 и A_2, получаем представление

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (9-1)\vec{i} + (6-2)\vec{j} + (4-3)\vec{k} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\ .$$

Аналогично находим, что $\overrightarrow{A_1A_3} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$.

Если вектор задан (1), то его модуль вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \qquad (4)$$

Применяя (4), получим модули найденных векторов:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{81} = 9;\ \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = 3;\ \left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = 5.$$

2. Косинус угла между двумя векторами равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=8\cdot 2+4\cdot(-2)+1\cdot 1=9.$$

Модули этих векторов известны: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=9$; $\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=3$.

Следовательно, $\cos\varphi = \frac{9}{9\cdot 3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333.$

По таблице определим, что $\varphi \approx 70^{\circ}32$.

3. Углом ψ между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Если направляющий вектор прямой $\vec{q}=\{l;m;n\}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{A;B;C\}$ (рис.7) направлены в одну сторону от плоскости, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}-\psi$, если же векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ направлены в разные стороны, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}+\psi$. Таким образом,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\psi\right)=\frac{\vec{q}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (5)$$

откуда $$\sin\psi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (6)$$

За направляющий вектор прямой A_1A_4 примем вектор $\overrightarrow{A_1A_4}=\{4,0,3\}$.

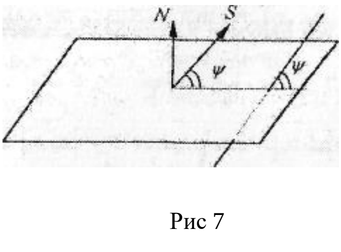


Рис 7

Чтобы найти вектор $\vec{n}$, нужно записать уравнение плоскости, проходящей через три данные точки A_1, A_2, A_3. Пусть M (x,y,z) –

произвольная точка искомой плоскости. Три вектора $\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ лежат в одной плоскости, т.е. они компланарны. Смешанное произведение равно 0: ($\overrightarrow{A_1M}$; $\overrightarrow{A_1A_2}$; $\overrightarrow{A_1A_3}$)=0, откуда получим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

Подставив в (7) координаты точек A_1, A_2 и A_3, получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 9-1 & 6-2 & 4-3 \\ 3-1 & 0-2 & 4-3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$6(x-1)-6(y-2)-24(z-3)=0 .$$

Сократив на 6, получим уравнение искомой плоскости

$$x-y-4z+13=0 \qquad (8)$$

Из уравнения плоскости находим $\vec{n}=\{1;-1;-4\}$.

Подставляя координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_4}$ и $\vec{N}$ в (6), получим:

$$\sin\psi=\frac{|1\cdot 4+(-1)\cdot 0+(-4)\cdot 3|}{\sqrt{1+1+16}\cdot\sqrt{16+0+9}}=\frac{|-8|}{\sqrt{18}\cdot 5}\approx 0,377$$

Определяем $\psi\approx 22^\circ 9'$.

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Обозначим векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ через вектор $\vec{p}$. Модуль вектора $\vec{p}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, а площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине модуля вектора $\vec{p}$.

Имеем:

$$\vec{p}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}-24\vec{k},$$

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{36+36+576} = \sqrt{648} = 18\sqrt{2}; \qquad S = \frac{|p|}{2} = 9\sqrt{2} \text{ (кв.ед.)}$$

5. Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения, объем же тетраэдра (пирамиды) равен одной трети произведения площади основания на высоту. У параллелепипеда, построенного на тех же векторах, та же высота, а площадь основания в 2 раза больше. Следовательно,

$$V_{тетр} = \frac{1}{6} V_{парал} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| \quad . \qquad (9)$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48 .$$

Объем параллелепипеда равен 48 куб. ед., объем заданной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен 8 куб. ед.

6. Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} , \qquad (10)$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты точки, через которую проходит прямая, а проекции направляющего вектора $\vec{q}$, параллельного прямой, равны *m, n, p*.

По условию прямая проходит через точку $A_1\left(1;2;3\right)$. В качестве направляющего вектора $\vec{q}$ возьмём вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ = {8;4;1}. Подставив в (10) координаты точки A_1 и заменив соответственно числа *m, n, p* числами 8, 4, 1, получим уравнение прямой A_1A_2 : $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{1}$.

7. По условию искомая прямая проходит через точку $A_4\left(5;2;6\right)$ и перпендикулярна плоскости

$x - y - 4z + 13 = 0$,

поэтому направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости коллинеарные. В качестве направляющего вектора прямой примем нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \left\{1;-1;-4\right\}$. Подставив в (10) координаты точки A_4 и заменив соответственно числа m, n, p числами 1, –1, –4, получим канонические уравнения высоты:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{-4} \quad . \qquad (11)$$

8. Чтобы найти точку пересечения высоты (11) с плоскостью (8), запишем уравнения прямой (11) в параметрическом виде. Пусть $\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{-4}=t$, где t – некоторый параметр,

откуда $x=t+5$, $y=-t+2$, $z=-4t+6$ (12).

Подставляя (12) в (8) и решив уравнение, получим значение параметра t:

$$t+5-\left(-t+2\right)-4\left(-4t+6\right)+13=0;$$
$$t+5+t-2+16t-24+13=0;\ 18t=8;\ t=4/9 \ .$$

Подставляя в (12) $t=4/9$, находим координаты точки P пересечения прямой (11) с плоскостью (8); $x=49/8;\ y=14/9;\ z=38/9$.

ЗАДАЧА 5. Найти пределы функций: $a)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ **,**

$б)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, $в)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}$, $г)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x}$, $д)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$

Решение

$a.\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ **.**

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$. При $x\to 2$ и числитель и знаменатель – бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть неопределенность, следует разложить числитель и знаменатель на множители, решив квадратные уравнения ($x^2-5x+6=0, x_1=2;\ x_2=3$, $x^2-12x+20=0, x_1=2,\ x_2=10$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8};$$

б. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Здесь также имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$; чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель на выражения, сопряженные числителю и знаменателю (которые отличаются знаком). После этого можно будет сократить на x^2, воспользоваться теоремой о пределе дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)(\sqrt{x^2+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(x^2+16-16)(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{\sqrt{0+16}+4}{\sqrt{0+1}+1}=$$

$$=\frac{8}{2}=4;$$

в. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}$.

В данном случае имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах числитель и знаменатель делят почленно на x^n, где n – степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0-0}{1-0-0}=3,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0.$

г. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x}$.

Предел основания равен 1 (разделите числитель и знаменатель на x), а показатель степени стремится к бесконечности, имеем неопределенность вида 1^∞. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, представим основания степени в виде $1+\alpha$, а в показателе выделяем множитель $1/\alpha$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4+9}{2x-4}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}\cdot\frac{9}{2x-4}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}}\right]^{\frac{27x}{2x-4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x}{2x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27}{2-\frac{4}{x}}}=e^{\frac{27}{2}}.$$

д. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.

При $x\to 0$ аргумент числителя $\alpha=5x$ также стремится к нулю, поэтому, умножая числитель и знаменатель на 5 и применяя формулу 1-го замечательного предела, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5}{5x\cdot 3}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot 1=\frac{5}{3};$$

ЗАДАЧА 6. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций:

а) $y=\sqrt[5]{x^3-3x^2}-\sqrt[3]{5x-4}$;

б) $y=\cos\left(\mathrm{arctg}^2\,\frac{x}{3}\right)$;

в) $y=\left(\sin 2x+x^2\right)^{2x}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{1+\cos x}{1-\sin x}}$;

д) $y\cdot\cos 3x-x^2\cdot\sin y=o$.

Решение

а. Вводя дробные показатели и пользуясь правилами дифференцирования сложной функции, получаем:

$$y=\left(x^3-3x^2\right)^{\frac{1}{5}}-\left(5x-4\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$y'=\frac{1}{5}\left(x^3-3x^2\right)^{1-\frac{1}{5}}\left(x^3-3x^2\right)'-\frac{1}{3}(5x-4)^{1-\frac{1}{3}}\left(5x-4\right)'=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^3-3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(3x^2-6x\right)-\frac{1}{3}(5x-4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5=\frac{3x^2-6}{5\sqrt[5]{\left(x^3-3x^2\right)^4}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-4)^2}}.$$

б. В данном случае сложная функция составлена наложением ряда функциональных зависимостей. Чтобы получить для какого-нибудь значения x значение функции, надо сначала x разделить на 3, потом найти $\operatorname{arctg}(\frac{x}{3})$, далее возвести результат в квадрат и взять от него косинус. Следовательно, функцию можно рассматривать как сложный косинус, т.е. представить в форме $y=\cos(u)$, $u=\operatorname{arctg}^2(\frac{x}{3})$.

Применяя правило дифференцирования сложной функции

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\ y'=f'(u)\cdot u',$$

получаем

$$y'=\left(\cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\right)'=-\sin\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)'.$$

Мы пришли к дифференцированию более простой, хотя еще сложной функции. У нее последней операцией является возведение в квадрат, поэтому эту функцию надо начинать дифференцировать по правилу дифференцирования степени. Таким образом,

$$\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)'=2\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)'=$$

$$=2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{\left(\frac{x}{3}\right)'}{1+\frac{x^2}{9}}=2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{9+x^2}{9}}=2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{9+x^2}.$$

Следовательно,

$$y'=\left(\cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\right)'=-\sin\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{6}{9+x^2}.$$

Итак, при нахождении производной сложной функции главной задачей является умение правильно выделить последнюю операцию, с которой и начинается дифференцирование в виде цепочки простых функций. Это помогает правильно вычислить производную, не потеряв ни одного промежуточного аргумента.

в. Данная функция является показательно-степенной функцией типа $y=u^v$, где u и v – функции от *x*. Для нахождения производных подобных функций воспользуемся приемом логарифмического дифференцирования: $\ln y = v\ln u$.

Дифференцируя последнее соотношение, имеем

$$\frac{y'}{y}=v\frac{u'}{u}+v'\ln u.$$

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, получаем окончательно после очевидных преобразований

$$y'=u^v(v\frac{u'}{u}+v'\ln u)=vu^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'.$$

Применяя этот метод, будем иметь

$$y=\left(\sin 2x+x^2\right)^{2x}, \quad \ln y=2x\ln\left(\sin 2x+x^2\right).$$

Дифференцируем обе части равенства. Учитывая, что в левой части равенства стоит логарифм от функции, имеем:

$$\frac{y'}{y}=2\ln\left(\sin 2x+x^2\right)+2x\frac{\left(\sin 2x+x^2\right)'}{\sin 2x+x^2};$$

$$\frac{y'}{y}=2\ln\left(\sin 2x+x^2\right)+2x\frac{\left(\cos 2x\cdot 2+2x\right)}{\sin 2x+x^2};$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(\sin 2x+x^2\right)^2+\frac{4x\left(\cos 2x+x\right)}{\sin 2x+x^2};$$

$$y'=y\cdot\left[\ln\left(\sin 2x+x^1\right)^2+\frac{4x\left(\cos 2x+x\right)}{\sin 2x+x^2}\right]$$

$$y'=\left(\sin 2x+x^2\right)^{2x}\left[\ln\left(\sin 2x+x^2\right)^2+\frac{4x\left(\cos 2x+x\right)}{\sin 2x+x^2}\right].$$

г. Легко увидеть, что данное выражение будет удобно дифференцировать, если, пользуясь правилом логарифмирования степени и дроби преобразовать правую часть в разность

$$y=\frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\cos x\right)-\ln\left(1-\sin x\right)\right);$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 x-\sin x+\cos x+\cos^2 x}{\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\sin x+\cos x}{(1+\cos x)(1-\sin x)}.$$

д. В данном случае зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением, которое не разрешено относительно функции y. Чтобы найти производную y', следует дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное равенство решить относительно искомой производной y'. Характерно, что производная неявной функции выражается через x и y. Имеем:

$$y'\cos 3x-3y\sin 3x-2x\sin y-x^2\cos y\cdot y'=0;$$

$$y'\left(\cos 3x-x^2\cos y\right)=3y\sin 3x+2x\sin y;$$

$$y'=\frac{3y\sin 3x+2x\sin y}{\cos 3x-x^2\cos y}.$$

ЗАДАЧА 7. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$ и построить ее график.

Решение

Исследование функции включает в себя выполнение таких этапов:

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование симметрии графика функции (определение четности, нечетности, периодичности функции).
3. Исследование поведения функции на границе области определения, нахождение асимптот. Исследование функции на непрерывность.
4. Нахождение корней функции и определение интервалов знакопостоянства.
5. Нахождение точек экстремума и определение интервалов монотонности.
6. Нахождение точек перегиба и определение направления выпуклости.
7. Построение графиков.

Проведем исследование функции $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$. по предложенной схеме.

1. Функция существует всюду, кроме точки x = 2, т.е. на интервале $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2. Функция общего вида, т.е. не обладает симметрией.

3. Найдем предельные значения на границе существования:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to2-0}\left(x^2-x-6\right)\cdot\lim_{\substack{x\to2-0\\2-0<0}}\frac{1}{x-2}=-4\lim_{\substack{x\to2-0\\2-0<0}}\frac{1}{x-2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=-4\lim_{\substack{x\to2+0\\x-2>0}}\frac{1}{x-2}=-\infty.$$

Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем, если существует, наклонную асимптоту. Уравнение наклонной асимптоты: $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, а $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. Найдем k и b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6}{x-2}=1.$$

Таким образом, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ график функции асимптотически приближается к прямой $y=x+1$.

4. Найдем точки пересечении графика с осями координат. При $x=0, y=3$. График проходит через точку A (0;3). Положим, что $y=0$, тогда $\frac{x^2-x-6}{x-2}=0,\ x^2-x-6=0,\ x_1=3,\ x_2=-2$. График проходит через точки B (3;0), C (–2;0). Определим интервалы знакопостоянства функции. Построим числовую прямую и нанесем точки, в которых функция обращается в нуль и не существует, и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 8).

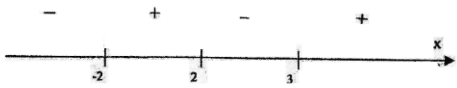
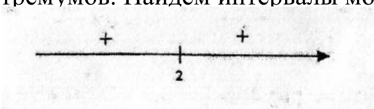


Рис.8

5. Для нахождения точек экстремума найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 2}\right)' = \frac{(2x-1)(x-2) - x^2 + x + 6}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 8}{(x-2)^2}.$$

Найдем корни числителя $x^2 - 4x + 8 = 0$, $D = 16 - 32 = -16 < 0$, нет действительных корней. Знаменатель равен нулю при $x = 2$, но в этой точке функция не определена. Отсюда следует, что функция не имеет экстремумов. Найдем интервалы монотонности



т.е. функция везде возрастает.

6. Для нахождения точек перегиба найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2 - 4x + 8)}{(x-2)^4} = -\frac{8}{(x-2)^3}.$$

Критических точек второго рода нет; $y''(x) > 0$ при $x < 2$, кривая вогнута вниз $(\bigcup)$ на интервале $(-\infty; 2)$; $y''(x) < 0$ при $x > 2$ на интервале $(2; \infty)$ кривая вогнута вверх $(\bigcap)$.

Строим график (рис.9):

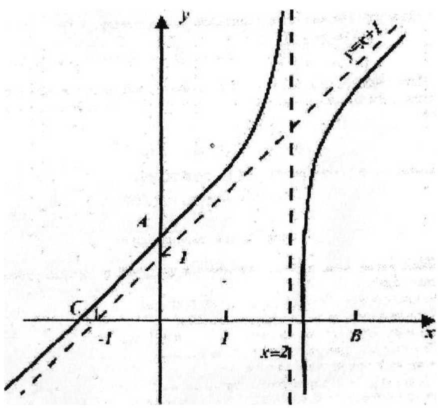


Рис.9

Вопросы для самопроверки

1. Напишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости.

2. Напишите формулу для вычисления координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении.

3. Что называется уравнением линии на плоскости?

4. Как убедиться, что данная точка лежит на данной линии?

5. Напишите уравнения декартовых осей координат.

6. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

7. Напишите формулу для определения тангенса угла между двумя прямыми по их угловым коэффициентам.

8. Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

9. Напишите общее уравнение прямой.

10. Как найти координаты точки пересечения двух прямых, если их уравнения заданы?

11. Какие линии называются кривыми второго порядка?

12. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат.

13. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(a;b)$ и с радиусом равным R.

14. Напишите канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

15. Что называется вектором и как он изображается?

16. Что называется скалярным произведением векторов? Перечислите его основные свойства.

17. Чем отличаются компоненты вектора по осям координат от его проекций на оси координат?

18. Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства?

19. Что называется смешанным произведением векторов? Каков его геометрический смысл? Перечислите его основные свойства.

20. Каково условие компланарности трех векторов?

21. Каков геометрический смысл коэффициентов в уравнении плоскости?

22. Как узнать, лежит ли данная точка на данной плоскости?

23. Записать условия пересечения прямой с плоскостью и условия принадлежности прямой плоскости,

24. При каких условиях возможно умножение матриц?

25. Какая матрица называется обратной к данной?

26. Что такое обратная матрица? Сформулируйте правило нахождения обратной матрицы.

27. Сформулируйте теорему Кронекера – Капели.

28. В чем состоит метод Гаусса?

29. Сформулируйте правило Крамера решения систем линейных уравнений.

30. Какая переменная величина называется функцией от другой переменной величины?

31. Что называется областью определения функции?

32. Что называется графиком функции?

33. Какая функция называется обратной к данной функции?

34. Перечислите основные элементарные функции.

35. Какая функция называется сложной?

36. Сформулируйте определение предела переменной величины, предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному пределу и предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

37. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой величины.

38. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

39. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке, на интервале и на отрезке.

40. Сформулируйте определение производной. Каков ее механический и геометрический смысл?

41. Сформулируйте определение дифференциала функции.

42. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

43. Каков механический смысл второй производной?

44. Сформулируйте теоремы Роля, Лагранжа. Каков их геометрический смысл?

45. Напишите формулы Маклорена для функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

46. Сформулируйте определение функции, возрастающей и убывающей на отрезке.

47. Сформулируйте два правила для отыскания экстремума функции.

48. Сформулируйте определение выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба.

IV. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Тема 8. *Комплексные числа*
Литература: [1, с. 218 – 225.]
Разберите решение примеров 16 – 18 данного учебного пособия.

ТЕМА 9. *Неопределенный интеграл*
Литература: [2, с. 323 – 343.]
Разберите решение задач 21 – 23 данного учебного пособия.

Темы 10, 11. *Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла*
Литература: [1, с. 259 – 303.]
Разберите решение задач 8 – 9 данного учебного пособия.

Тема 12. *Дифференциальные уравнения первого порядка*
Литература: [1, с. 325 – 342.]

Разберите решение примера 20 и задач 12, 14 данного учебного пособия.

Тема 13. *Дифференциальные уравнения второго порядка. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений*
Литература: [1, с. 354 – 376.]

Разберите решение задач 13 и 15 данного учебного пособия.

Тема 8. Комплексные числа

Комплексные числа – выражения вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1 (\sqrt{-1} = i)$. Модуль числа z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

Сопряженным к данному числу $z = x + iy$ называют число $\bar{z} = x - iy$.

С комплексными числами $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ можно производить арифметические операции (по правилам алгебры):

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 =$$
$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Решение квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

1) если $D > 0$, то 2 действительных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

2) если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$,

3) если $D < 0$, то 2 комплексных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a} i$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно представить в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, φ - аргумент числа z. Значение аргумента, заключенное в границах $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, называется главным значением аргумента $\arg z$ и определяется по формуле

$$arg\,z=\begin{cases} arctg(y/x) \text{ при } x>0, \\ arctg(y/x)+\pi \text{ при } x<0; y\ge 0, \\ arctg(y/x)-\pi \text{ при } x<0; y<0. \end{cases}$$

Кроме тригонометрической формы комплексных чисел $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, используют показательную форму комплексного числа: $z=re^{i\varphi}$, где r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа.

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня удобно выполнять в тригонометрической или показательной форме.

Пусть даны два комплексных числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_2e^{i\varphi_2}$.

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, r_2\ne 0.$$

$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Пример 16. Даны два комплексных числа $z_1=\sqrt{3}+i$ и $z_2=2-2i$. *а*). Найти их сумму z_1+z_2 и разность z_1-z_2. *б*) Перевести их в тригонометрическую и показательную форму и найти $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^3 .

Решение

$a.\ z_1+z_2=\sqrt{3}+i+2-2i=2+\sqrt{3}-i;$

$z_1-z_2=\sqrt{3}+i-2+2i=-2+\sqrt{3}+3i.$

б. Найдем модуль и аргумент: $z_1=\sqrt{3}+i$. $|z_1|=r_1=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2;$

$\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, тогда $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Для числа z_2 : $|z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$ $\arg z_2=\operatorname{arctg}\dfrac{-2}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$,

тогда $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

$$z_1\cdot z_2=2\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Воспользуемся формулой Муавра:

$$\left(z_1\right)^3=2^3\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot 3+i\sin\frac{\pi}{6}\cdot 3\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8i.$$

Пример 17. Извлечь $\sqrt[3]{a}$, где $a=1+i$.

Решение

Число a представим в тригонометрической форме. Найдем модуль данного числа по формуле $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Для того чтобы найти аргумент, построим точку на комплексной плоскости.

Находим главное значение аргумента $\varphi=\operatorname{arctg}1/1=\pi/4$.

$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$. Для удобства представлен рис. 10.

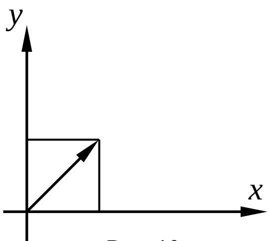


Рис. 10

Для вычисления корня *n-й степени* из данного числа используем формулу

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos(\varphi+2k\pi)/n+i\cdot\sin(\varphi+2k\pi)/n)$ (k = 0, 1, 2,…, n –1), тогда имеем

$$a_0=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12});$$

$$a_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{9}{12}\pi+i\cdot\sin\frac{9}{12}\pi);$$

$$a_2=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{17}{12}\pi+i\cdot\sin\frac{17}{12}\pi).$$

Пример 18. Решить уравнение $z^3-6z-9=0$.

Решение

Находим, что $z=3$ является корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на z – 3, решаем квадратное уравнение $z^2+3z+3=0$, получаем остальные корни: $z_1=3,$ $z_2=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Тема 9. Неопределенный интеграл

Часто по данной функции $f(x)$ необходимо найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. В этом случае функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$.

Теорема. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная имеет вид $F(x)+C$, где C – константа.

Если функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$, где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Восстановление функции по ее производной или отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием*.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $\int dF(x) = F(x) + C,$ 2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ *где k – константа.*

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Основные табличные интегралы:

1 $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1), \int dx = x + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\, \dfrac{x}{a} + C$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C\ \ (a \neq 0)$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + h}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + h} \right| + C\ (h \neq 0)$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg\, \dfrac{x}{2} \right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}) \right| + C$

$$5.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1) \qquad 15.\int \mathrm{s}\,hx\,dx = ch\,x + c$$

$$6.\int e^x dx = e^x + C \qquad 16.\int chx\,dx = sh\,x + C$$

$$7.\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad 17.\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C$$

$$8.\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad 18.\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C$$

$$9.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \qquad 19.\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$10.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \qquad 20.\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

Метод подстановки. Интегрирование по частям

Часто используется подстановка (замена переменной) вида $x = \varphi(t)$. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Применяются подстановки вида $t = \varphi(x)$. Тогда получаем: $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f(t)\,dt$

Интегрирование по частям

Пусть имеются дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Продифференцируем произведение этих функций: $d(u \cdot v) = udv + vdu$ или, интегрируя, получим: $u \cdot v = \int vdu + \int udv;\ \int udv = uv - \int vdu$ – формула интегрирования по частям.

При использовании формулы интегрирования по частям необходимо выбрать функцию *u*, тогда оставшаяся часть будет дифференциалом функции *v*, т.е. *dv*. Можно указать следующие случаи:

1. $$n \in N \qquad \int x^n \left[\begin{array}{c} e^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{array}\right. dx = \left[\begin{array}{c} x^n = u \quad du = x^{n-1}dx \\ \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} e^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{pmatrix} dx = dv \quad v = \int dv \end{array}\right. \end{array}\right].$$

В этом случае последовательное дифференцирование уменьшает показатель n до нуля. Наиболее простой случай, когда $n = 1$.

2. $$k \neq -1 \quad \int x^k \left[\begin{array}{c} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{array}\right. dx = \left[\begin{array}{c} u = \left[\begin{array}{c} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{array}\right. \quad du = \begin{pmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{pmatrix}' dx \\ x^k dx = dv \ v = \int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}(c = 0) \end{array}\right].$$

В этом случае дифференцирование указанных функций обычно упрощает нахождение интеграла.

Интегрирование рациональных функций. Разложение на простейшие дроби

Рассмотрим рациональную функцию вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Напомним, что многочлен – это выражение вида: $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется *неправильной* и необходимо выполнить деление:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где $W(x)$ – многочлен, полученный в результате деления.

Далее будем рассматривать *правильные* дроби (т.е. старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя), так как интегрирование функции $W(x)$ – табличное. Знаменатель такой дроби необходимо разложить на линейные множители вида $(x - \alpha_i)$. Среди корней могут быть и комплексные, в этом случае элементарными множителями будут выражения $x^2+2px+q\,(D=4p^2-4q<0)$.

Кроме того, корни могут быть кратными (одинаковыми). Окончательно имеем: $Q(x)=(x-\alpha_1)^r\cdot(x-\alpha_2)^s\cdot\ldots\cdot(x^2+2px+q)^t\cdot\ldots$, где $r,s,t\in N$.

Эту правильную дробь можно представить в виде простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots\frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t}$$

Это разложение рациональной функции на простейшие дроби.

Интегрирование простейших дробей

Чтобы определить числа A_i,N_i,M_i, умножим обе части разложения на $Q(x)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части равенства.

После этого задача сводится к нахождению интегралов 4 типов:

$$I.\ \int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\ln|x-\alpha|+c.$$

$$II.\ \int\frac{A}{(x-\alpha)^r}dx=A\int(x-\alpha)^{-r}d(x-\alpha)=-\frac{A}{(1-r)(x-\alpha)^{1-r}}+c,\ r>1.$$

$$III.\ \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx. \qquad IV.\ \int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}dx,\ r>1.$$

Вычислим интеграл типа III. Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+px+q=(x+p/2)^2+q-p^2/4$.

Используем подстановку:

$x+p/2=t, dx=dt,\ x=t-p/2;\ a^2=q-p^2/4$. Тогда имеем:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}dx=\int\frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{At}{t^2+a^2}dt+\int\frac{B-Ap/2}{t^2+a^2}dt=\frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+(B-Ap/2)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+c=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{B-Ap/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}+c$$

Рассмотрим интеграл типа IV. Используем подстановку: $x+p/2=t, dx=dt,\ x=t-p/2;\ a^2=q-p^2/4$. Тогда имеем:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}dx=\int\frac{Ax+B}{\left((x+p/2)^2+q-p^2/4\right)^r}dx=\int\frac{A(t-p/2)+B}{(t^2+a^2)^r}dt=$$

$$=\int\frac{At}{(t^2+a^2)^r}dt+\int\frac{B-Ap/2}{(t^2+a^2)^r}dt=\frac{A}{2}\int(t^2+a^2)^{-r}d(t^2+a^2)+J=$$

$$=\frac{A}{2(1-r)}(t^2+a^2)^{1-r}+J+c$$

Рассмотрим интеграл вида: $J_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$. Эти интегралы вычисляют по рекуррентной формуле: $J_n=\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}$.

Зная, что $J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+c,$ можно вычислить $I_{2,}I_{3,\dots}$.

Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$, где $R(u,v)$ – рациональная функция от *u, v*. Он всегда выражается через элементарные функции.

1. Для вычисления таких интегралов часто используется универсальная подстановка: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ и получается интеграл $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$ от рациональной функции *t*.

Использование этой подстановки обычно связано с громоздкими вычислениями.

2. Если имеет место тождество $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то можно применить подстановку $\operatorname{tg}x=t, \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

3. Рассмотрим интегралы вида $\int \cos^n x \sin^m x dx$, где m и n – целые числа любого знака.

а). если $m = 2k+1$ – нечетное, тогда $\int \cos^n x \sin^{2k+1} x dx = \int \cos^n x \sin^{2k} x \sin x dx = -\int \cos^n x (1-\cos^2 x)^k d(\cos x)$, $\sin x dx = -d(\cos x)$, далее используется подстановка $\cos x = t$ $\left(\left(\sin^2 x\right)^k = \left(1-\cos^2 x\right)^k\right)$ и получаем интеграл: $I = -\int t^n (1-t^2)^k dt.$

б). если n – нечетное, тогда $\sin x = t$, $\cos x dx = d(\sin x)$.

в). если m и n четные, то можно использовать подстановку tg $x = t$, или понизить степень:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

4. Часто используют формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right].$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Рассмотрим интеграл вида $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, где R – рациональная функция. Используем подстановку , тогда необходимо вычислить $\int R(\varphi(t), t))\varphi'(t)dt$, т.е. интеграл от рациональной функции. Затем возвращаемся к переменной x. По этой же методике можно вычислять и $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}})dx$. Необходимо найти наименьшее общее кратное знаменателей q_1 и q_2: если оно равно m, то положить $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ используют подстановку $t = \frac{1}{x-\alpha}$.

Интегралы, имеющие вид: $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx, \int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ можно найти с помощью тригонометрических подстановок.

а). Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то используется подстановка $x = a\sin t, \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t,\ dx = a\cos t dt$.

б). Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, то подстановка $x = a\cdot \mathrm{tg} t, \sqrt{a^2+x^2} = a\frac{1}{\cos t}, dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$

в). Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то $x = a\frac{1}{\cos t}$,

$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}} = a\cdot \mathrm{tg} t,\ dx = \frac{a\sin t dt}{\cos^2 t}$.

Пример 19. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$

Решение

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}dx = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[6]{x} & 6t^5dt = dx \\ t^6 = x & \end{matrix} \right| = \int \frac{t^3-1}{t^2-1}6t^5dt = 6\int \frac{t^7+t^6+t^5}{t+1}dt =$$

$$= 6\int \left(t^6+t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{t+1} \right)dt = 6\frac{t^7}{7}+6\frac{t^5}{5}-6\frac{t^4}{4}+6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}+6t-$$

$$-6\ln|t+1|+C = \frac{6}{7}\left(\sqrt[3]{x}\right)^7+\frac{6}{5}\left(\sqrt[3]{x}\right)^5-\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^4+2\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+6\sqrt[3]{x}-$$

$$-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Тема 10. Определенный интеграл. Приближенное вычисление определенного интеграла

Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $\left[a,b\right]$ функция. Разобьем $\left[a,b\right]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, выберем на каждом из частичных отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$ по произвольной точке ξ_j , определим значение функции $f(\xi_j)$ (в этих точках) и составим сумму: $S = \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\xi_j\right)\Delta x_j, \left(\Delta x_j = x_{j+1} - x_j\right)$. Перейдем к пределу, т. е. устремим $max\{\Delta x_j\} \to 0$: $\lim\limits_{\max \Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \int_a^b f(x)dx$.

Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $\left[a,b\right]$ функция, то этот предел не зависит от способа разбиения отрезка $\left[a,b\right]$ и выбора точек ξ_j и называется *определённым интегралом* и обозначается: $\int_a^b f(x)dx$.

Числа a и b называются нижним (a) и верхним (b) пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Для вычисления определённого интеграла используют формулу Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ или $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$, где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ – непрерывная на отрезке $\left[a,b\right]$ функция и $f(x) \geq 0$ на этом отрезке, то определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a, x = b, y = 0$ и графиком функции $f(x)$.

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ – не зависит от переменной интегрирования.

2. $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$
$= F(b) - F(a).$

5. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$, A = const.

6. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две непрерывные дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$, тогда дифференциал произведения этих функций $d(u\,v) = vdu + udv$. Проинтегрируем равенство от a до b:
$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$, имеем: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ – формула интегрирования по частям.

Замена переменной в определённом интеграле

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная функция на $[a,b]$. Введем новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$. Если $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$; $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, $f\left[\varphi(t)\right]$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

Тема 11. Приложение определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

Из определения определенного интеграла следует, что площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $x = a,\ x = b$, осью OX и графиком функции $y = f(x)$, определяется формулой $S = \int\limits_a^b f(x)dx$, если функция $f(x) \ge 0$.

Если $f(x) < 0$ на интервале интегрирования, то рассматривают интеграл от модуля $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Если фигура ограничена прямыми $x = a,\ x = b$ а также графиками функций $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$ (рис. 11), то более удобной является формула: $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$, где $f_2(x) \ge f_1(x)$.

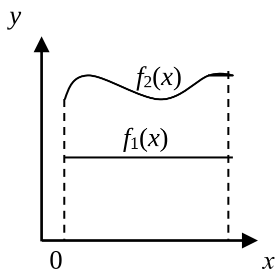


Рис. 11

Пусть функция задана в *параметрической форме:* $x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$. Тогда площадь фигуры, ограниченной этой функцией и прямыми $x = a,\ x = b$ и осью Ox, определяется по формуле: $S = \int\limits_a^b ydx = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$

Если кривая задана в *полярных координатах*: $r = f(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta,$ то площадь фигуры: $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$

Длина дуги кривой

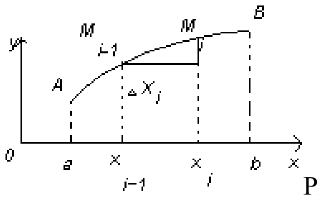


Рис. 12

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Возьмем на дуге $\overset{\cup}{AB}$ точки $A, M_1, M_2, \ldots M_i, \ldots B,$ и проведем хорды, которые обозначим Δl_1, $\Delta l_2, \ldots$ Δl_n (рис. 12). Получим ломанную $AM_1 \ldots M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Длина ломаной: $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$. Для вычисления длины дуги перейдем к пределу: $L = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$. Если на отрезке $[a, b]$ $f(x)$, $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует и равен определенному интегралу:

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \ L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f')^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$

Получили, что длины дуги равна $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$

Если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t), y = \psi(t),$ то длина дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} dt; \ a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

Пример 20. Найти длину дуги астроиды $x = 2\cos^3 t, \ y = 2\sin^3 t, \ 0 \le t \le \pi / 2.$

Решение

Найдем производные и вычислим подкоренное выражение в формуле длины дуги: $x' = -6\cos^2 t \cdot \sin t, \ y' = 6\sin^2 t \cdot \cos t,$

$$\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2=36\cos^4 t\cdot\sin^2 t+36\sin^4 t\cdot\cos^2 t=36\sin^2 t\cdot\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)=$$
$$=36\sin^2 t\cdot\cos^2 t\ .$$

Найдем длину дуги астроиды:

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{36\sin^2 t\cdot\cos^2 t}\,dt=6\int_0^{\pi/2}\sin t\cdot\cos t\,dt=6\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=3$$

Пусть кривая задана в полярных координатах: $r=r(\varphi)$, тогда

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi\,.$$

Пример 21. Найти длину дуги кардиоиды: $r=3(1+\cos\varphi)$.

Решение

Найдем производную и вычислим подкоренное выражение:

$$r'=-3\sin\varphi;\ r^2+(r')^2=9(1+\cos\varphi)^2+9\sin^2\varphi=9+9(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+$$
$$+18\cos\varphi=18(1+\cos\varphi)=36\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда получаем, что длина дуги

$$L=\int_0^\pi\sqrt{36\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=\int_0^\pi 6\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=12\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=12.$$

Тема 12. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее аргумент x, исходную функцию y и её производные. Порядок старшей производной называется порядком дифференциального уравнения. Всякая функция $y = F(x)$ – решение, если она обращает его в тождество. Общее решение дифференциального уравнения n–го порядка содержит n констант $y = \varphi(x, c_1, ..., c_n)$ или $F(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$ – общий интеграл.

Дифференциальное уравнение с разделяющими переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение с разделяющими переменными вида: $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x).f_2(y)$, полагая, что $f_2(y) \neq 0, \dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Интегрируя, получим общий интеграл (общее решение): $\displaystyle\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде: $M(x)dx + N(y)dy = 0$. Интегрируем: $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$

Пример 22. Найти частное решение уравнения $(1+e^{2x})y^2y' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение

Запишем данное уравнение в дифференциальной форме:

$$(1+e^{2x})y^2dy - e^xdx = 0.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2dy - \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2dy - \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{C}{3};\ \frac{y^3}{3} - \mathrm{arctg}(e^x) = \frac{C}{3};\ y = \sqrt[3]{C + 3\mathrm{arctg}e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения. Использовав начальное условие, определяем значение произвольной постоянной:

$1=\sqrt[3]{c+3\pi/4},\ c=1-3\pi/4$.

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y=\sqrt[3]{1-3\pi/4+3\operatorname{arctg}e^{x}}$.

Однородные относительно аргумента и функции дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией *n*-го измерения, если $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y)$. Например, $f(x,y)=\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}$ – однородная функция 1-го измерения, $f(x,y)=xy-y^{2}$ – 2-го измерения и т.д.

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется однородным относительно *x* и *y*, если $f(x,y)$ однородная функция *нулевого* измерения.

Рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения.

По условию: $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$. Пусть $\lambda=1/x$ тогда $f(\lambda x,\lambda y)=f(1,y/x)=y'$. Сделаем подстановку: $y/x=u, y=xu, y'=u+u'x$ и подставим в дифференциальное уравнение: $u+\frac{du}{dx}\cdot x=f(1,u)$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. $x\frac{du}{dx}=f(1,u)-u;\frac{dx}{x}=\frac{du}{f(1,u)-u}$, далее – интегрируем по *u* и *x*. Подставив вместо $u=\frac{y}{x}$, получаем общий интеграл.

Пример 23. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y'=xy/(x^{2}-y^{2})$

Решение

$$y'=\frac{xy}{x^{2}-y^{2}};y=u\cdot x;y'=u+u'\cdot x;u+u'\cdot x=\frac{x\cdot u\cdot x}{x^{2}-u^{2}\cdot x^{2}}=\frac{u}{1-u^{2}}$$

$$u'\cdot x=\frac{u}{1-u^{2}}-u=\frac{u^{3}}{1-u^{2}};\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^{3}}{1-u^{2}};\frac{du(1-u^{2})}{u^{3}}=\frac{dx}{x};(\frac{1}{u^{3}}-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x}.$$

Далее – интегрируем: $-\frac{1}{2u^{2}}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|c|$;

$-1.(2u^{2})=\ln|u\cdot x\cdot c|, u=y/x$. Получили: $-x^{2}/(2y^{2})=\ln(cy)$

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка методом подстановки

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно y и y'. Оно имеет вид: $y'+p(x)\cdot y=f(x)$. Если $f(x)=0$, то это однородное уравнение, иначе – не однородное.

Будем искать решение в виде $y=u(x)\cdot v(x)$, тогда $y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x)$, подставим в уравнение:, $u'v+uv'+p(x)uv=f(x)$ или $u(v'+p(x)v)+u'v=f\left(x\right)$. Выберем функцию v такой, чтобы $v'+p(x)v=0$, тогда $\frac{dv}{dx}=-pv:\frac{dv}{v}=-pdx;\ln v=-\int pdx+\ln c$, или $v=c_1e^{-\int pdx}$, т.к. достаточно отличного от нуля решения, то $v=e^{-\int pdx}$.

Поскольку $y=u(x)\cdot v(x)$ подставим найденное значение v:

$u'v=f;\frac{du}{dx}=\frac{f}{v};u=\int\frac{f(x)}{v(x)}\cdot dx+c$. окончательно, $y=uv=v[\int\frac{f(x)}{v(x)}\cdot dx+c]$.

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид: $y'+p(x)y=f(x)y^n$, $(n\neq 0;n\neq 1)$.

Разделим на y^n: $\frac{y'}{y^n}+p(x)\cdot y^{-n+1}=f(x)$. Сделаем замену: $z=y^{-n+1}, z'_x=(1-n)\cdot y^{-n}\cdot y'$, подставим в уравнение:

$$\frac{z'}{1-n}+pz=f(x);z'+(1-n)p(x)z=(1-n)f(x).$$

Это линейное дифференциальное уравнение относительно z. Решение такого уравнения рассмотрено выше. Решаем, например, методом подстановки. Находим z, затем находим y (вместо z подставим y^{-n+1}).

Тема 13. Дифференциальные уравнения второго порядка
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным называется дифференциальное уравнения, линейное относительно y, y', y''. Если в правой части 0, то уравнение называется однородным. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид: $y'' + py' + qy = 0$,
где p, q – действительные числа.

Чтобы найти общее решение этого дифференциального уравнения, необходимо решить характеристическое уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$. Пусть корни уравнения k_1, k_2, определяемые по формуле: $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, тогда общее решение уравнения записывается в одном из следующих трех видов:

1. $y_{00} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если k_1, k_2 действительные числа и $k_1 \neq k_2$.
2. $y_{00} = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, если $k_1 = k_2$.
3. $y_{00} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, если дискриминант меньше нуля и корни комплексные: $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{|\, p^2 - 4q\,|}}{2} = \alpha \pm i\beta$ $\left(i = \sqrt{-1},\ \beta \neq 0\right)$.

Пример 24. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 3) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение

1. Запишем характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 3 = 0,\ D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4,\ x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, x_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$ Корни различные, тогда общее решение $y_{00} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$.

2. Запишем характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0,\ D = (-4)^2 - 4\cdot 4 = 0,\ x_1 = x_2 = \frac{4}{4} = 2.$ Корни одинаковые (кратные), тогда общее решение $y_{00} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

3. Запишем характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 25 = 0,\ D = (-6)^2 - 4\cdot 25 = -64,\ x_1 = \frac{6 - i\sqrt{|-64|}}{2} = 3 - 4\mathrm{i},$

$x_2 = \frac{6 + i\sqrt{|-64|}}{2} = 3 + 4\mathrm{i}.$

Корни комплексные, общее решение $y_{00} = e^{3x}(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Пусть имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' + py' + qy = f(x)$

Теорема. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения $\tilde{y}$ и общего решения y_{00} соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Пусть правая часть имеет так называемый специальный вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right]$, где α и β – вещественные числа, *P(x)* и *Q(x)* – многочлены одной или разных степеней. Если они разной степени, то пусть *n* – их наибольшая степень. Решение можно определить методом вариации произвольных постоянных, однако можно отыскать решение более простым методом *неопределённых коэффициентов.*

Рассмотрим два случая:

1. Число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного дифференциального уравнения. В этом случае частное решение ищем в виде: $y = e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x]$,

где *p(x)* и *q(x)* – многочлены одной и той же степени *n*, равной наивысшей степени многочленов *P(x)* и *Q(x)*. Необходимо определить коэффициенты многочленов *p(x)* и *q(x)*.

2. Если число $\alpha+\beta i$ является корнем кратности $k(k\geq 1)$ характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде:

$$\bar{y}=x^k\cdot e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x]\ ,$$

где *p(x)* и *q(x)* – многочлены одной и той же степени *n*, равной наивысшей степени *P(x)* и *Q(x)*. Необходимо определить коэффициенты многочленов *p(x)* и *q(x)*.

В обоих случаях определяем коэффициенты многочленов следующим образом: в данное уравнение подставляем y и производные y', y'', приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получаем систему уравнений, из которой определяем коэффициенты многочленов $p(x)$ и *q(x)*.

Пример 25. Найти общее решение неоднородных дифференциальных уравнений: 1) $y''-8y'+7x=x^2+7x+8;$

2) $y''+2y'-3y=4e^{-x};$ 3) $y''+y=5\sin 2x$.

Решение

1. Запишем и решим характеристическое уравнение:

$$k^2-8k+7=0, k_1=1, k_2=7, y_{00}=c_1e^x+c_2e^{7x}.$$

В правой части уравнения отсутствует множитель $e^{\alpha x}$, следовательно, $\alpha=0$ и правая часть не содержит *sin x* и *cos x*, это значит, что $\beta=0$. Число $\alpha+\beta i=0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$ (такой же многочлен, как в правой части, но с неопределенными коэффициентами). Находим производные: $\tilde{y}'=2Ax+B, \tilde{y}''=2A.$ Подставим в уравнение:

$$2A-8(2Ax+B)+7(Ax^2+Bx+C)=x^2+7x+8;$$

$$7Ax^2+x(-16A+7B)+(2A-8B+7C)=x^2+7x+8.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} 7A = 1 \\ 7B - 16A = 7 \\ 2A - 8B + 7C = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{7} \\ B = (7 + \dfrac{16}{7}) \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{65}{49} \\ C = \dfrac{1}{7}(8 + 8 \cdot \dfrac{65}{49} - 2\dfrac{1}{7}) = \dfrac{898}{343} \end{cases},$$

Общее решение: $y = y_{00} + y = c_1 \cdot e^x + c_2 e^{7x} + \dfrac{1}{7} \cdot x^2 + \dfrac{65}{49} \cdot x + \dfrac{898}{343}.$

2. Запишем и решим характеристическое уравнение:

$k^2 + 2k - 3 = 0, k_1 = 1, k_2 = -3, y_{00} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}; \alpha = -1, \beta = 0,$

$\alpha + i\beta = -1 + 0 \cdot i = -1$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = Ae^{-x},$ (как в правой части, но с неопределенными коэффициентами). Найдем производные и подставим в уравнение:

$\tilde{y}' = -Ae^{-x}, \tilde{y}'' = Ae^{-x}; Ae^{-x} + 2(-Ae^{-x}) - 3Ae^{-x} = 4e^{-x}, A - 2A - 3A = 4;$

$A = -1.$

Получили ответ: $y = y_{00} + \tilde{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - e^{-x}.$

3. Запишем и решим характеристическое уравнение:

$y'' + y = 0, k^2 + 1 = 0, k = \pm i, y_{00} = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \alpha = 0, \beta = 2,$

$\alpha + i\beta = 0 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$. Находим производные: $\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ и подставляем в дифференциальное уравнение и приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = 5\sin 2x,$

$\cos 2x(-4A + A) + \sin 2x(-4B + B) = 5\sin 2x,$

$-3A = 0; -3B = 5, A = 0, B = -5/3.$

Получили ответ: $y = y_{00} + \tilde{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 5/3\sin 2x.$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 8. Найти неопределенные интегралы:

$a)\ \int 2xe^{x^2}dx$, $б)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, $в)\ \int x^2\ln(1+x^2)dx$, $г)\ \int \frac{(2x^2-3x)dx}{x^3+x^2+3x+3}$,

$д)\ \int \sin^3 x\cdot\cos^2 xdx$.

Решение

а. Заметим, что $2xdx$ есть дифференциал $d(x^2)$ $\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}d(x^2)=\int e^u du$, где $u=x^2$, последний интеграл нам известен: он равен e^u+c, значит $\int 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}+c$.

$$б.\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+1)=$$

$$=\left[x^2+1=u\right]=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

в. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int UdV=UV-\int VdU$$

Схема ее применения такова: подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде двух множителей *U* и *dV*, за *dV* выбирается выражение, содержащее dx, из которого с помощью интегрирования можно найти *V*, за *U* в большинстве случаев принимается функция, которая при дифференцировании упрощается (например, обратные тригонометрические функции, логарифмы, многочлены и т.д.).

Положим $\begin{bmatrix} U=\ln(1+x^2) & dU=\frac{2x}{1+x^2}dx \\ dV=x^2dx & V=\int x^2dx=\frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$.

Из формулы интегрирования по частям получим

$$\int x^2\ln(1+x^2)dx=\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)-\int \frac{x^3\,2xdx}{3(1+x^2)}=\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)-\frac{2}{3}\int \frac{x^4dx}{1+x^2}$$

Так как степень числителя больше степени знаменателя, выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & 1+x^2 \\ \cline{2-2} -\;x^4+x^2 & x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2} \\ \hline -x^2 & \\ -\;-x^2-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

т.е. $\dfrac{x^4}{1+x^2}=x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2}$.

$$J=\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)-\frac{2}{3}\int(x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x-$$

$$-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^3}{3}\ln(1+x^2)-\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+C$$

г. $\displaystyle\int\frac{(2x^2-3x)dx}{x^3+x^2+3x+3}$

Интегрируется правильная рациональная дробь. Разложим ее знаменатель на множители и представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2-3x}{(x^2+3)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, получим тождество:

$$2x^2-3x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1)=Ax^2+3A+Bx^2+Bx+Cx+C\ .$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=2 \\ B+C=-3 \\ 3A+C=0 \end{cases}$$

Решив систему, найдем значения $A=\dfrac{5}{4}$; $B=\dfrac{3}{4}$; $C=-3\dfrac{3}{4}$.

Имеем

$$\int\frac{(2x^2-3x)dx}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}}{x^2+3}dx=\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\int\frac{xdx}{x^2+3}-\frac{15}{4}\int\frac{dx}{x^2+3}=$$

$$=\frac{5}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{8}\ln(x^2+3)-\frac{15}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

д

$$\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin xdx=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{bmatrix}=-\int(1-t^2)t^2dt=-\int t^2dt+\int t^4dt=-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

ЗАДАЧА 9. Найти неопределенные интегралы

а) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$, *б*) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$, *в*) $\int\frac{\cos xdx}{1+\sin x+\cos x}$.

Решение

а.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=2\begin{bmatrix} tgx=t & \sin x=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\\ dx=\frac{dt}{t^2+1} & \cos x=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\end{bmatrix}=\int\frac{t^2(t^2+1)^3}{(t^2+1)^2}dt=\int t^2(t^2+1)dt=$$

$$=\int t^4dt+\int t^2dt=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}tg^5x+\frac{1}{3}tg^3x+C.$$

б.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\begin{vmatrix}\operatorname{tg}x=t,\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},dx=\frac{dt}{t^2+1}\end{vmatrix}=\int\frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^2}}=$$

$$=\int\frac{(t^2+1)^2dt}{t^2}=\int\frac{(t^4+2t^2+1)dt}{t^2}=\int(t^2+2+t^{-2})dt=$$

$$=t^3/3+2t-1/t+C=/3+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

в.

$$\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x+\cos x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t, & dx=\dfrac{2dt}{t^2+1} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1} \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)2dt}{\left(1+t^2\right)^2\left(\dfrac{2\left(t+1\right)}{1+t^2}\right)} = \int \frac{(1+t)(1-t)dt}{(1+t^2)(t+1)} = \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x/2)) - \frac{1}{2}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2(x/2)\right| + C.$$

ЗАДАЧА 10. Вычислить интегралы:

а) $J=\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$, *б*) $\int\limits_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$, *в*) $\int\limits_0^\pi x\cos x dx$.

Решение

а. Положим $x=2\sin t$. Такая подстановка возможна (так как при любом значении под корнем получается неотрицательная величина) и приводит к тому, что корень под знаком интеграла исчезает. При этом изменению переменной x от 0 до 1 соответствует изменение переменной t от t=0 до $t=\pi/6$.

Применим формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ .$$

Получаем

$$J=\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t+\sin 2t/2\right)\Big|_0^{\pi/6} = \pi/3+\sqrt{3}/2\,.$$

б)

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x} = \left[\begin{matrix} x=\dfrac{1}{\cos t} & t_н=0 \\ dx=\dfrac{\sin t dt}{\cos^2 t} & t_в=\dfrac{\pi}{3} \end{matrix} \right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}\cdot\cos t\cdot\frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \operatorname{tg} t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\ .$$

в. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ \cos x dx = dv, v = \sin x \end{vmatrix} = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \pi \sin \pi + \cos \pi - 0 \sin 0 - \cos 0 = -2.$$

ЗАДАЧА 11. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y = -x;\ y = 2x - x^2$.

Решение

Сделаем схематический чертеж. Методом выделения полных квадратов приведем уравнение параболы к виду $y - 1 = -(x-1)^2$; парабола симметрично относительно прямой x=1, ветвями направлена вниз и вершина ее лежит в точке (1;1). Совместным решением уравнений параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$ определяем абсциссы точек A и B: $x_A = 0, x_B = 3$. (рис. 13).

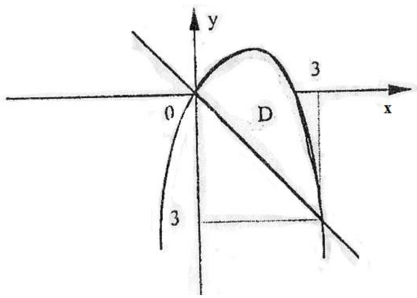


Рис. 13

Если область ограничена сверху кривой $y = f_2(x)$, а снизу – кривой $y = f_1(x)$, а также прямыми $x = a,\ x = b$, то площадь S вычисляется по формуле: $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$

По этой формуле вычисляем искомую площадь при $f_1(x) = -x;\ \ f_2(x) = 2x - x^2$:

$$S = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \quad \text{(кв. ед.)}$$

ЗАДАЧА 12. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+y\text{tg}x=1/\cos x$.

Решение

Сделаем подстановку Бернулли: $y=UV$, $y'=U'V+V'U$.

Получаем:

$$U'V+V'U+UV\text{tg}x=\frac{1}{\cos x}, U'V+U\left(V'+V\text{tg}x\right)=\frac{1}{\cos x}.$$

Находим частное решение: $V'+V\text{tg}x=0$; $dV+V\text{tg}xdx=0$,

$$\frac{dV}{V}+\text{tg}xdx=0, \int\frac{dV}{V}=-\int\frac{\sin xdx}{\cos x};\ \ln|V|=\ln|\cos x|+\ln|c|=\ln|c\cdot\cos x|,$$

$V=c\cdot\cos x.$

Полагая C=1, выбираем частное решение $V=\cos x$. Далее ищем функцию U: $U'V=\frac{1}{\cos x}$, где $V=\cos x$. Имеем:

$$U'=\frac{1}{\cos^2 x},\ U=\int\frac{dx}{\cos^2 x}.=\text{tg}x+C$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y=U\cdot V=\left(\text{tg}x+C\right)\cos x.$$

ЗАДАЧА 13. Найти общее решение уравнения $y''-7y'+6y=5e^{2x}$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^2-7k+6=0$ имеет корни $k_1=1$ и $k_2=6$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $y_{00}=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

Правая часть специального вида и корни характеристического уравнения не совпадают с выражением $\alpha+\beta i$. Поэтому частное решение ищем в виде $y=Ae^{2x}$.

Дифференцируем y два раза: $y'=2Ae^{2x}$, $y''=4Ae^{2x}$ и подставляем производные и y в исходное уравнения, получаем:

$$4Ae^{2x}-7(2Ae^{2x})+6Ae^{2x}=5e^{2x};\ 4A-14A+6A=5;\ -4A=5,\ A=-5/4$$

Тогда частное решение y примет вид: $y=-\frac{5}{4}e^{2x}$.

Общим решением будет являться функция

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{6x}-\frac{5}{4}e^{2x}.$$

ЗАДАЧА 14. Найти общее решение дифференциального уравнения
$3(xy'+y)=xy^2$

Решение

Преобразуем уравнение $xy'+y=1/3xy^2$.

Разделим на x: $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}y^2$.

Это уравнение Бернулли. Разделим на y^2 и введём новую переменную *u:*

$\dfrac{y'}{y^2}+\dfrac{1}{yx}=\dfrac{1}{3}$, $u=\dfrac{1}{y}$, $u'=-\dfrac{y'}{y^2}$, тогда: $-u'+\dfrac{u}{x}=\dfrac{1}{3}$, $u'-\dfrac{u}{x}=-\dfrac{1}{3}$.

Это линейное уравнение первого порядка. Решим методом вариации произвольной постоянной:

$u'-\dfrac{u}{x}=0$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u}{x}$, $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{x}$

Интегрируем: $\int du/u=\int dx/x$; $\ln|u|=\ln|x|+\ln|c|=\ln|x\cdot c|$, потенцируем: $u=x\cdot c(x)$ (считаем, что $c=c(x)$ – неизвестная функция).

$u'=c(x)+x\cdot c'(x)$. Подставим в уравнение:

$c(x)+x\cdot c'(x)-\dfrac{x\cdot c(x)}{x}=-\dfrac{1}{3}$; $x\cdot c'(x)=-1/3$

$c'(x)=-1/(3x)$; $c(x)=\int -dx/(3x)=-1/3\ln|x|+C_1$, тогда $u=x(-1/3\ln|x|+C_1)$; $u=1/y$; $1/y=x(-1/3\ln|x|+C_1)$;

$y=\dfrac{1}{x(-\frac{1}{3}\ln|x|+C_1)}$ – общее решение дифференциального уравнения.

ЗАДАЧА 15. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=6x-y, \\ y'=3x+2y. \end{cases}$

Решение

В задании использовано обозначение: $x'=\dfrac{dx}{dt}$, $y'=\dfrac{dy}{dt}$.

Дифференцируем первое уравнение по t: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=6\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}$. Вместо производной $\frac{dy}{dt}$ подставим ее значение из 2-го уравнения. Получаем: $\frac{d^2x}{dt^2} = 6\frac{dx}{dt} - (3x + 2y) = 6\frac{dx}{dt} - 3x - 2y.$ Из первого уравнения определяем $y = 6x - \frac{dx}{dt}$ и подставим в полученное равенство: $\frac{d^2x}{dt^2} = 6\frac{dx}{dt} - 3x - 2(6x - \frac{dx}{dt}) = 8\frac{dx}{dt} - 15x,\ \frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 15x = 0$.

Получили однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Запишем и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 8k + 15 = 0,\ k_1 = 3,\ k_2 = 5.$ Общее решение: $x = c_1e^{3t} + c_2e^{5t}$. Из равенства $y = 6x - \frac{dx}{dt}$ определяем y:

$$y = 6x - \frac{dx}{dt} = 6c_1e^{3t} + 6c_2e^{5t} - 3c_1e^{3t} - 5c_2e^{5t} = 3c_1e^{3t} + c_2e^{5t}.$$

Окончательно: $\begin{cases} x = c_1e^{3t} + c_2e^{5t}, \\ y = 3c_1e^{3t} + c_2e^{5t}. \end{cases}$

Аналогично можно поступать и в случае системы с большим числом уравнений.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется комплексным числом?
2. Как производятся алгебраические действия над комплексными числами?
3. Запишите комплексное число $x+yi$ в тригонометрической и показательной форме.
4. Как производится действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня над комплексными числами? Приведите примеры.
5. Дайте определение первообразной функции и неопределенного интеграла.
6. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
7. Выведите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
8. Выведите формулу интегрирования по частям
9. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на простейшие множители.
10. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых и кратных действительных корней знаменателя.
11. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби для случаев, когда имеются пары простых или кратных комплексно-сопряженных корней.
12. Изложите методику нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R-$ рациональная функция.
13. Дайте определение определенного интеграла и укажите геометрический смысл.
14. Докажите основные свойства определенного интеграла.
15. Докажите, что если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, а если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
16. Докажите теорему о среднем для определенного интеграла.
17. Докажите, что функция $F(x)=\int_{a}^{x} f(x)dx$ является первообразной функции $f(x)$. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
18. Выведите формулу замены переменной в определенном интеграле. Приведите пример.

19. Выведите формулу интегрирования по частям определенного интеграла.

20. Выведите формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла.

21. Выведите формулу парабол (правило Симпсона) для приближенного вычисления определенного интеграла.

22. Дайте определение несобственного интеграла первого рода (интеграла, у которого один или оба предела бесконечны), укажите его геометрический смысл; приведите примеры сходящегося и расходящегося интегралов первого рода.

23. Сформулируйте правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра.

24. Выведите формулу площади криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярной системе координат.

25. Выведите формулу длины дуги кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат.

26. Выведите формулу вычисления объема тела по известным площадям поперечных сечений. Выведите формулы для вычисления объема тела вращения.

27. Выведите формулу для вычисления координат центра тяжести плоской линии и плоской фигуры.

28. Что называется, криволинейным интегралом по длине дуги? Сформулируйте правило его вычисления.

29. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка, его общего и частного решения. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите его геометрический смысл.

30. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод его решения.

31. Дайте определение и изложите метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

32. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной?

33. Изложите метод решения дифференциальных уравнений высших порядков.

34. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n–го порядка (однородного и неоднородного). Какова структура общего решения линейного дифференциального уравнения?

V. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В первом семестре студент должен выполнить контрольную работу №1, во втором семестре №2. Каждая контрольная работа содержит по 7 заданий. При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с двумя последними цифрами его зачетной книжки (см. таблицу, с.105 – 106). По вертикали следует отыскать последнюю цифру зачетки, а по горизонтали – предпоследнюю цифру зачетной книжки. На пересечении найденных строки и столбца приведены номера задач, соответствующих данному варианту. Например, если две последние цифры **37**, на пересечении **7**-й строки и **3**-го столбца записаны номера **10, 16, 23, 36, 44, 55, 68** задач, которые необходимо решить. Контрольные работы, выполненные по другому варианту, не зачитываются.

2. Контрольную работу следует выполнять в тетради (отдельной для каждой работы) чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

3. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия и инициалы студента и дата отправления работы в БГТУ.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы (как зачтенной, так и незачётной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. Если рецензент предлагает переделать ту или иную задачу в работе или дать более обстоятельное решение и прислать эти исправления для повторной проверки, то это следует выполнить в краткий срок. Вместе с исправлениями нужно обязательно выслать прорецензированную работу и рецензию, поэтому при выполнении контрольной работы нужно оставлять в конце тетради несколько чистых листов для исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

Таблица

В клетках таблицы указаны номера задач для вашего варианта

Цифры зачетки		Предпоследняя цифра номера зачетной книжки			
		1	2	3	4
Последняя цифра зачетной книжки	1	1, 12, 23, 34, 45, 56, 67	2, 13, 24, 35, 46, 57, 68	3, 14, 25, 36, 47, 58, 69	4, 15, 26, 37, 48, 59, 70
	2	3, 15, 27, 36, 50, 51, 68	4, 16, 28, 37, 41, 52, 69	5, 17, 29, 38, 42, 53, 70	6, 18, 30, 39, 43, 54, 61
	3	4, 16, 28, 40, 42, 56, 67	5, 17, 29, 31, 43, 54, 68	6, 18, 30, 38, 44, 56, 62	7, 19, 28, 33, 43, 59, 62
	4	5, 17, 29, 31, 42, 55, 61	6, 12, 29, 39, 41, 55, 65	7, 19, 22, 31, 47, 50, 69	8, 12, 24, 37, 41, 56, 64
	5	6, 18, 30, 32, 48, 54, 68	7, 15, 29, 37, 47, 53, 66	8, 14, 28, 34, 44, 59, 63	9, 13, 22, 31, 45, 57, 68
	6	7, 19, 21, 33, 45, 57, 61	8, 16, 22, 38, 47,54, 64	9, 15, 23, 34, 45, 51, 68	10, 12, 28, 36, 48, 53, 66
	7	8, 20, 22, 35, 41, 57, 68	9,12, 27, 31, 42, 58, 66	10, 16, 23, 36, 44, 55, 68	1, 18. 25, 37, 49, 51, 67
	8	9, 11, 24, 36, 44, 51, 62	10,11, 22, 31, 41, 52, 63	1, 12, 28, 36, 42, 58, 63	2, 11, 26, 37, 42, 57, 68
	9	10, 13, 25, 37, 41, 57, 63	1, 15, 24, 33, 48, 57, 68	2, 13, 26, 36, 46, 56,66	3, 16, 25, 32, 46, 58, 68
	0	2, 14, 26, 38, 45, 56, 68	3, 15, 27, 38, 42, 54, 65	4, 18, 26, 31, 49, 55, 62	5, 11, 25, 38, 45, 53, 66

Окончание табл.

5	6	7	8	9	0	
5, 16, 27, 38, 49, 60, 61	6, 17, 28, 39,50, 51, 62	7, 18, 29, 40,41, 52, 63	8, 19, 30, 31,42, 53, 64	9, 20, 21, 32,43, 54, 65	10, 11, 22, 33,44, 55, 66	**1**
7, 19, 21, 40,44, 55, 62	8, 20, 22, 31,45, 56, 63	9, 11, 23, 32,46, 57, 64	10, 12, 24, 33,47, 57, 65	1, 13, 25, 34,48, 58, 66	2, 14, 26, 35,49, 59, 67	**2**
8, 13, 28, 34,45, 56, 69	9, 12, 26, 36,46, 55, 62	1, 11, 22, 35,43,55, 66	2, 14, 25, 37,41, 53, 64	3, 14, 26, 33,48, 53, 64	4, 17, 29, 32,48, 54, 69	**3**
8, 12, 22, 38,41, 59, 68	9, 16, 23, 35,49, 52, 67	1, 13, 25, 36,41, 54, 63	2, 14, 21, 33,43, 52. 68	3, 11, 25, 35,46, 52, 64	4, 14, 30, 30,46, 54, 67	**4**
1, 17, 23, 31,47, 55, 63	2, 16, 22, 39,43, 51, 64	3, 17, 21, 38,46, 52, 67	4, 19, 26, 34,49, 59, 64	5, 20, 27, 31,42, 55, 69	10, 14, 27, 32,45, 58, 66	**5**
1, 16, 25, 34,47, 52, 64	2, 13, 22, 35,47, 59, 62	3, 11, 28, 33,44, 58, 65	4, 14, 23, 37,44, 58, 69	5, 15, 26, 31,43, 52, 67	6, 14, 27, 35,47, 56, 68	**6**
2, 14, 26, 36,48, 53, 66	3, 12, 22, 35,49, 58, 61	3, 11, 22, 37,41, 55, 69	4, 18, 28, 34,47, 51, 68	5, 19, 23, 31,47, 59, 62	6, 11, 25, 31,41, 52, 64	**7**
3, 15, 23, 35,44, 51, 68	4, 12, 28, 34,42, 58, 63	5, 17, 28, 33,41, 57, 65	6, 14, 29, 33, 48, 59, 61	7, 18, 21, 38,44, 57. 69	8, 11, 29, 31,43, 54, 67	**8**
4, 15, 25, 37,49, 54, 68	2, 16, 22, 31,47, 54, 63	3, 15, 26, 34,44, 55, 66	4, 12, 27, 36,45, 54, 63	5, 13, 24, 36,48, 59, 61	6, 14, 26, 32,45, 57, 62	**9**
6, 16, 26, 36,45, 55, 65	7, 14, 26, 35,45, 57, 62	8, 14, 27, 35,41, 54, 65	9, 18, 22, 33,46, 57, 68	10, 12, 23, 40,45, 57, 68	1, 15, 23, 32,43, 54, 66	**0**

Контрольная работа № 1

В **задачах 1 – 10** даны две матрицы A и B. Найти: *а*) произведение матриц AB; *б*) BA; *в*) обратную матрицу A^{-1}; *г*) произведение матриц $A^{-1}\cdot A$; *д*) произведение матриц $A\cdot A^{-1}$. *е*) $2A-4B$.

1. $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

В **задачах 11 – 20** доказать совместность данной системы линейных уравнений и решить ее тремя способами:

1) по формуле Крамера;
2) методом Гаусса;
3) с помощью обратной матрицы.

11 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

12 $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

15 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

. В **задачах 21 – 30** даны вершины $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ треугольника. Найти:

1) длину сторон AB;
2) уравнение сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;
3) внутренний угол B в радианах с точностью до 0,01;

4) уравнение высоты CD и её длину, не используя координаты точки D;

5) уравнение медианы, проведённой через вершину C;

6) точку пересечения высот треугольника;

7) сделать чертёж.

21. $A(5;2)$, $B(2;–4)$, $C(–1;2)$. **22**. $A(–3;0)$, $B(–2;3)$, $C(5;–3)$.
23. $A(1;1)$, $B(0;4)$, $C(–2;3)$. **24**. $A(5;4)$, $B(0;–3)$, $C(–3;4)$.
25. $A(–2;5)$, $B(2;–4)$, $C(2;2)$. **26**. $A(–5;4)$, $B(1;–4)$, C(–1;5.)
27. $A(2;2)$, $B(2;–5)$, $C(–5;3)$. **28**. $A(1;2)$, $B(3;–2)$, C(5;5).
29. $A(4;–3)$, $B(0;0)$, $C(1;4)$. **30**. $A(3;3)$, $B(0;–2)$, $C(–3;3)$.

В **задачах 31 – 40** даны вершины пирамиды. Требуется:

1) записать векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, в системе орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти модули этих векторов;

2) найти угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$;

3) найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

4) найти площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) найти объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

6) составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки A_1 и A_2;

7) составить канонические уравнения высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

8) найти точку пересечения высоты A_4H с гранью $A_1A_2A_3$.

31. $A_1(4;3;5)$, $A_2(–4;–1;5)$, $A_3(5;–5;3)$, $A_4(–1;6;5)$.
32. $A_1(3;–3;4)$, $A_2(1;–5;–2)$, $A_3(–5;–4;–6)$, $A_4(–1;2;–2)$.
33. $A_1(–1;5;7)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(2;–3;–5)$, $A_4(–4;–2;–7)$.
34. A_1(5;3;-–3), $A_2(–1;6;0)$, $A_3(5;3;6)$, $A_4(1;–1;–3)$.
35. $A_1(–3;6;–5)$, $A_2(6;1;0)$, $A_3(–6;–1;–3)$, $A_4(5;5;3)$.
36. $A_1(0;–5;–2)$, $A_2(0;5;0)$, $A_3(5;1;–3)$, $A_4(4;–2;4)$.
37. $A_1(4;4;4)$, $A_2(3;4;2)$, $A_3(6;–5;1)$, $A_4(–2;–1;–1)$.
38. $A_1(–1;3;–1)$, $A_2(–2;–3;–5)$, $A_3(5;2;–2)$, $A_4(–3;5;–2)$.
39. $A_1(2;–1;3)$, $A_2(3;4;3)$, $A_3(1;–2;5)$, $A_4(4;–4;–6)$.
40. $A_1(0;0;0)$, $A_2(3;2;2)$, $A_3(0;5;–3)$, $A_4(2;5;3)$.

В **задачах 41 – 50** найти предел функции:

41. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}(\pi x/2)$.

42. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$.

43. *а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

44. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\mathrm{tg}x}$

45. *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$.

46. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{4x^2+2x-2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$; *в)* $\lim\limits_{x\to(-3)}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{-2x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tg\,x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

47. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$; *в)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{1+2x}\right)^{-4x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$.

48. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

49. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+7}\right)^{-3x}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$.

50. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+6}\right)^{2x+1}$; *д*) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi/2-\mathrm{x})\cdot\mathrm{tg}\,x$.

В **задачах 51 – 60** найти производные заданных функций:

51. *а*) $y=\mathrm{tg}^3 2x\cdot\cos 7x^2$; *б*) $y=2^{\cos x}\cdot\mathrm{arctg}^4 x$;

в) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$; *г*) $y=\dfrac{6log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$

52. *а*) $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$; *б*) $y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$;

в) $y=\dfrac{\mathrm{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$; *г*) $y=\dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$.

53. *а*) $y=\mathrm{ctg}\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$; *б*) $y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$;

в) $y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$; *г*) $y=\dfrac{7log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$.

54. *а*) $y=\mathrm{tg}^3 2x\cdot\arccos 2x^3$; *б*) $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$;

в) $y=\dfrac{2\ln(2x-10)}{(x+5)^7}$; *г*) $y=\dfrac{\ln^3 x}{\mathrm{ctg}(x-3)}$.

55. *а*) $y=\cos^3 4x\cdot\mathrm{arcctg}\sqrt{x}$; *б*) $y=(x-3)^5\cdot\mathrm{arcctg}3x^2$;

в) $y=\dfrac{\mathrm{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$; *г*) $y=\dfrac{7\mathrm{arcctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$.

56. *а*) $y=\arcsin^3 2x\cdot\mathrm{ctg}7x^4$; *б*) $y=5^{-x^2}\arcsin 3x^2$;

в) $y=\dfrac{\log_2(7x-5)}{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$; *г*) $y=\dfrac{log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$.

57. *а*) $y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$; *б*) $y=\lg_3(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$;

в) $y=\dfrac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg}2x}$; *г*) $y=\dfrac{7log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$.

58. *а*) $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$; *б*) $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$;

в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x+2)}$; *г*) $y=\dfrac{3log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$.

59. *а*) $y=\sin^2 3x\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$; *б*) $y=4^{-\sin x}\operatorname{arctg}3x$;

в) $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$; *г*) $y=\dfrac{4lg(3x+7)}{(x+1)^7}$.

60. *а*) $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$; *б*) $y=\operatorname{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$;

в) $y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg}(\frac{1}{x})}$; *г*) $y=\dfrac{8lg(4x+5)}{(x-1)^5}$.

В **задачах 61 – 70** произвести полное исследование функции и построить ее график.

61. $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$.

62. $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$.

63. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

64. $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

65. $y=\dfrac{2x^2-6x+9}{(x-1)^2}$.

66. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$.

67. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$.

68. $y=\dfrac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$.

69. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$.

70. $y=\dfrac{4-x^2}{x^2}$.

Контрольная работа № 2

В **задачах 1 – 10** даны два комплексных числа z_1 и z_2: *а*) найти их сумму и разность; *б*) записать число z_1 в тригонометрической и показательной форме; *в*) вычислить $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; z_1^{n+1}, где n – последняя цифра номер варианта.

1. $z_1 = 6 - 6i;\ z_2 = -6 + i$.
2. $z_1 = -3 + 3i;\ z_2 = 9 - 5i$.
3. $z_1 = 1 + i;\ z_2 = -5 + 4i$.
4. $z_1 = 2 + 2i;\ z_2 = -2 - 1i$.
5. $z_1 = -2 + 2i;\ z_2 = 7 - 3i$.
6. $z_1 = 9 - 9i;\ z_2 = 3 + 2i$.
7. $z_1 = -2 - 2i;\ z_2 = 8 - 3i$.
8. $z_1 = -1 - i;\ z_2 = 7 - 2i$.
9. $z_1 = -6 + 6i;\ z_2 = 1 + 9i$.
10. $z_1 = -8 - 8i;\ z_2 = 8 - 2i$.

В **задачах 11 – 20** найти неопределённые интегралы. Результат проверить дифференцированием.

11\. *а)* $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)}dx$; *в)* $\displaystyle\int \frac{2x+5}{5x^2+1}dx$;

г) $\displaystyle\int x\cos(x+7)dx$; *д)* $\displaystyle\int \sqrt[3]{4-2x}\,dx$.

12\. *а)* $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{9x^2+5}}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3+x}}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{x-3}{4x^2+1}dx$;

г) $\displaystyle\int (x+3)e^{-x}dx$; *д)* $\displaystyle\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$.

13\. *а)* $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; *б)* $\displaystyle\int \sqrt[4]{2-5x}\,dx$; *в)* $\displaystyle\int \frac{x-5}{8-4x^2}dx$;

г) $\displaystyle\int xe^{-7x}dx$; *д)* $\displaystyle\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)}$.

14\. *а)* $\displaystyle\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{8-3x^2}}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{12-7x}{15+2x^2}dx$;

г) $\displaystyle\int (5-2x)e^{6x}dx$; *д)* $\displaystyle\int \frac{4x^3 - 5x^2 + 3}{x^2 - 3x + 2}dx$.

15\. *а)* $\displaystyle\int \frac{10x\,dx}{4x^2+5}$; *б)* $\displaystyle\int \sqrt[5]{3-5x}\,dx$; *в)* $\displaystyle\int \frac{15-4x}{\sqrt{4-6x^2}}dx$;

г) $\int x\sin 3x dx$; *д)* $\int \frac{6x^3-x^2+4}{x^2-2x-3}$.

16. *а)* $\int \frac{12xdx}{\sqrt{4-2x^2}}$; *б)* $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$; *в)* $\int \frac{9-6x}{8-4x^2}dx$;

г) $\int (5x+6)\sin 3x dx$; *д)* $\int \frac{3x^4-2x^3+1}{x(x-1)(x+2)}dx$.

17. *а)* $\int \frac{15xdx}{4x^2-1}$; *б)* $\int \sqrt[3]{5-6x}dx$; *в)* $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx$;

г) $\int (7x^2-2)\cos 3x dx$; *д)* $\int \frac{10x^3+x^2-4}{x^2-6x+5}dx$.

18. *а)* $\int \frac{10xdx}{\sqrt{4-3x^2}}$; *б)* $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-2x}}$; *в)* $\int \frac{x-8}{x^2+3}dx$;

г) $\int e^{4x}(3x-5)dx$; *д)* $\int \frac{7x^3-8x+4}{x^2-3x+2}dx$.

19. *а)* $\int \frac{6xdx}{\sqrt{3x^2+4}}$; *б)* $\int \sqrt[4]{x-8}dx$; *в)* $\int \frac{3-5x}{7-3x^2}dx$;

г) $\int (3x+5)\sin 2x dx$; *д)* $\int \frac{6x^4-5x^3+2x-1}{x^3+2x^2-3x}dx$.

20. *а)* $\int \frac{5xdx}{\sqrt{x^2-3}}$; *б)* $\int \sqrt[3]{4-x}dx$; *в)* $\int \frac{3x+2}{x^2+5}dx$;

г) $\int e^{3x}(5x-4)dx$; *д)* $\int \frac{x^4-3x^2+5}{x^3-2x^2-3x}dx$.

В **задачах 21 – 30** вычислить определённые интегралы:

21. *а)* $\int_0^{1/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; *б)* $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^3 2x dx$; *в)* $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8}}$; *г)* $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\cdot\sin x\, dx$.

22. *а)* $\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; .*б)* $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$; *в)* $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$;

г) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

23. *а)* $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$; *б)* $\int\limits_0^{\pi/8} \sin x \sin 3x dx$; *в)* $\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+1}$.

24. *а)* $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$; *б)* $\int\limits_0^1 xe^{x^2}\, dx$ *в)* $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^3}}$; *г)* $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^3 2xdx$.

25. *а)* $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; *б)* $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$; *в)* $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$;

г) $\int\limits_3^5 \frac{\ln^5(x+1)}{x+1}dx$.

26. *а)* $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$; *б)* $\int\limits_0^1 \frac{arctg^2 x}{x^2+1}$ *в)* $\int\limits_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin^2 x}}dx$.

27. *а)* $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$; *б)* $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x dx$; *в)* $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,dx$;

28. *а)* $\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$; *б)* $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x dx$; *в)* $\int\limits_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{3\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx$.

29. *а)* $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$; *б)* $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{tg^2 x+4}{\cos^2 x}\,dx$; *в)* $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}\, xdx$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{3\cos xdx}{\sin^2 x+4}$.

30. *а)* $\int\limits_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}\,dx$; *б)* $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$;

в) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$ *г)* $\int\limits_{2}^{4} \frac{(1+x)dx}{\sqrt{2x^2-7}}$.

В **задачах 31 – 40** вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

31. $y = x^2\sqrt{4-x^2}$; $y=0$; $(0 \le x \le 2)$.

32. $y=(x+1)^2$, $y^2 = x+1$.

33. $y = \cos x \sin^2 x$; $x = \ln 2$; $y=0$.

34. $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$; $y=0$; $(0 \le x \le \pi/2)$.

35 $y = \arccos x$; $y=0$; $x=0$.

36. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$; $y=0$; $x=1$; $x=e^3$.

37. $y=(x+1)^2$; $y^2 = x+1$.

38. $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $0 \le x \le 2$.

39. $y = x\cos x$; $y=0$; $(0 \le x \le \pi/2)$.

40. $y = x^2\sqrt{16-x^2}$, $y=0$, $0 \le x \le 4$.

В **задачах 41 – 50** найти решение задачи Коши.

41. $y' + 2xy = -2x^3$; $y(1) = e^{-1}$.

42. $y' + xy = (x-1)e^x y^2$; $y(0) = 1$.

43. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$; $y(1) = 4$.

44. $2(y'+y) = xy^2$; $y(0) = 2$.

45. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

46. $xy' + y = 2y^2 \ln x$; $y(1) = \frac{1}{2}$.

47. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$; $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

48. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2; y(0) = 1$.

49. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

50. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x} y^{-1}; y(0) = 2$.

В **задачах 51 – 60** найти решение задачи Коши.

51. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

52. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

53. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$; $y'(0) = 3$; $y(0) = 1$.

54. $y'' - 6y' + 25y = -24\cos 4x + 9\sin 4x$, $y(0) = 2, y'(0) = -2$. .

55. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

56. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

57. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

58. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

59. $y'' - 4y = 8e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$.

60. $y'' - 2y' + 37y = 36x\cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

В задачах 61 – 70 найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

61. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ 62. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 63. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ 65. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ 66. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ 68. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$ 69. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$

70. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

Библиографический список

Основной

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс\ Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2014. – 608 с.
2. Лекции по высшей математике/А.Д. Мышкис. 10-е изд. – М.: Наука, 2007. – 688 с.
3. Дифференциальные уравнения в приложениях: учеб. пособие для студентов всех техн. специальностей и направлений бакалавриата / А. С. Горлов, В. Б. Никуличев. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2016. – 139 с.
4. Математика: практикум: учебное пособие / Ю. А. Феоктистов. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2017. – 86 с.
5. Электронные лекции по математике для студентов 1-го курса заочной формы обучения всех направлений / Ю. А. Феоктистов Белгород: Изд-во БГТУ, 2015. – 101с.
6. Математический анализ: учебное пособие для студентов младших курсов технических направлений и специальностей. Ч.1 / Г. М. Редькин, А. С. Горлов, Е. И. Красюкова. – Белгород: Издательство БГТУ им. В. Г. Шухова, 2019. – 128 с.

Дополнительный

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/Под ред . проф. Н.Ш. Кремера, –4-е изд., М.: ЮНИТИ, 2006. – 479 с.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – С.-Пб.: Профессия, 2003. – 224 с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б. П. Демидовича . – М.: Астрель, 2004. – 495 с.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 – М.: Интеграл-Пресс, 2010.

Учебное издание

Феоктистов Юрий Александрович
Горлов Александр Семенович

Высшая математика

Учебное пособие

Редактор В. И. Пустовая

Подписано в печать 18.01.23. Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 6,9. Уч.-изд. л. 7,4.
Тираж 50 экз. Заказ 1. Цена 173 р. 95 к.
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46