МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им В.Г. Шухова

Ю. А. Феоктистов, А. С. Горлов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов 2-го курса заочной формы обучения направлений подготовки 15.03.01 – Машиностроение, 15.03.02 – Технологические машины и оборудование, 15.03.05 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

Белгород
2024

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
Ф42

Р е ц е н з е н т ы:
Кандидат физико-математических наук,
доцент Белгородского государственного
технологического университета
им. В. Г. Шухова *Ю. С. Некрасова*
Кандидат физико-математических наук, профессор
Белгородского государственного национального
исследовательского университета (НИУ «БелГУ»)
В. А. Полунин

Феоктистов, Ю. А.
Ф42 Высшая математика: учебное пособие / Ю. А. Феоктистов, А. С. Горлов. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2024. – 100 с.

ISBN 978-5-361-01357-9

Учебное пособие соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по дисциплине «Высшая математика» и написано с учетом современных требований к преподаванию математики.

Книга содержит основные теоретические сведения и примеры решения типовых задач по функциям нескольких переменных, а также рассмотрены основные вопросы теории вероятностей и математической статистики.

Учебное пособие предназначено для студентов 2-го курса заочной формы обучения направлений подготовки 15.03.01 – Машиностроение, 15.03.02 – Технологические машины и оборудование, 15.03.05 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 51 (075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-361-01357-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Числовые расчеты применяются во всех областях деятельности инженеров всевозможных специальностей, физиков, химиков и работников многих других профессий. В связи с развитием науки и техники приходится решать все более сложные задачи, проводить все более и более сложные подсчеты. Все эти расчеты основаны на математике, которая представляет собой значительный отдел в общей сумме человеческих знаний и приспособлена к обслуживанию самых разнообразных областей науки и практической деятельности.

Цель курса математики в системе подготовки бакалавров (инженеров) – освоение необходимого математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать прикладные технические задачи, используя в случае надобности компьютеры.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные технические процессы, в освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач, в овладении основными методами математики.

В данных указаниях рассматриваются темы в объеме второго курса, позволяющие самостоятельно освоить необходимый теоретический материал и выполнить контрольные задания. В соответствии с этим каждый раздел содержит ссылки на литературу, позволяющую изучить основной теоретический материал, и вопросы для самопроверки. Цель последних – помочь студентам при повторении и закреплении материала. Весь материал разделен на три части (контрольные работы). В первой части рассматриваются функции нескольких переменных. Во второй части – основные понятия и теоремы теории вероятностей. В третьей части рассмотрены основные понятия математической статистики. По всем темам приведены краткие теоретические сведения, а также подробные решения типовых примеров и задач, что должно способствовать лучшему пониманию и усвоению предмета.

Пособие рассчитано на студентов заочного факультета, но может быть использовано студентами дневной формы обучения, желающими лучше изучить математику

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Основной формой заочного обучения является самостоятельная работа студента над учебным материалом; она складывается из чтения учебников, решения задач, выполнения контрольных заданий. В помощь заочникам университет организует чтение лекций и проведение практических занятий. Ознакомиться с теоретическим материалом студенты могут на сайте кафедры. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с письменными или устными вопросами. Указания по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1.1. Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после полного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые опущены в учебнике), воспроизводя имеющиеся чертежи.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий; подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Следует добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательства сложных теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в котором записывать определения, формулировки теорем, формулы и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделяя их для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется подчеркивать или обводить рамкой, чтобы они выделялись и при прочитывании конспекта лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и служит постоянным справочником.

1.2. Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновать каждый этап, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решение задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертежи требуют тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

1.2. Самопроверка

1. После изучения определенной темы и решения достаточного количества задач рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы, формулы, формулировки и доказательства теорем, проверяя каждый раз себя по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в данном пособии, помогут студенту повторить, закрепить и проверить прочность усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз разобраться внимательно в материале учебника, порешать задачи.

2. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи. Однако благополучное решение задач нельзя воспринимать как признак полного усвоения теории. Часто правильное решение задачи

получается в результате применения механически заученных формул без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи – необходимый, но недостаточный показатель хорошего знания теории.

1.3. Консультации

1. Если при изучении теоретического материала или решения задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и т.д.), он может обратиться к преподавателю для получения письменной или устной консультации.

2. Студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднения. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, год издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если затруднение вызывает решение задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

1.4. Контрольные работы

1. В процессе изучения курса студент должен выполнить ряд контрольных работ. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела, укажут на имеющиеся у него пробелы, на возможное направление дальнейшей работы, помогут сформулировать вопросы для консультации.

2. Контрольные работы нужно выполнять самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в работе, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному или письменному экзамену.

3. Прорецензированные работы со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

4. Распределение заданий в контрольных работах и указания к их выполнению приведены на с. 96 данного пособия.

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

Тема 1. *Функции нескольких переменных*

1.1. Понятие функции нескольких переменных.

1.2. Непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные.

1.3. Полный дифференциал функции нескольких переменных.

1.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

1.5. Экстремум функции нескольких переменных.

1.6. Условный экстремум функции нескольких переменных.

1.7. Производная по направлению. Градиент.

1.8. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области.

1.9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Темы 2. *Двойные и криволинейные интегралы*

2.1. Понятие двойного интеграла.

2.2. Вычисление двойного интеграла.

2.3. Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла.

2.4. Двойной интеграл в полярных координатах.

2.5. Криволинейные интегралы 1 рода.

2.6. Понятие криволинейного интеграла 2 рода.

2.7. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

2.8. Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла.

2.9. Формула Остроградского – Грина.

2.10. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Тема 3. *Числовые и степенные ряды*

3.1. Понятие числового ряда. Сумма ряда.

3.2. Необходимый признак сходимости ряда.

3.3. Признаки сравнения рядов.

3.4. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши.

3.5. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.

3.6. Степенные ряды.

3.7. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

3.8. Ряды Тейлора и Маклорена.

Тема 4. *Элементы теории вероятностей и математической статистики.*

4.1. Понятие события. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики.

4.2. Основные теоремы теории вероятностей.

4.3. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная теорема Лапласа. Интегральная теорема Лапласа.

4.4. Закон распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной дискретной величины. Среднее квадратичное отклонение.

4.5. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

4.6. Законы равномерного, нормального и показательного распределения.

4.7. Закон больших чисел. Лемма Маркова. Неравенство и теорема Чебышева. Теорема Бернулли.

4.8. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки, доверительная вероятность. Доверительные интервалы для генеральной средней, генеральной дисперсии.

4.9. Понятие о статистической гипотезе. Критическая область. Статистическая проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

3. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3

Тема 1. *Функции нескольких переменных*

1.1. Понятие функции нескольких переменных.

Литература: [1, гл. IX, с. 304–305].

Разберите решение задачи 1 данного пособия.

1.2. Непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные.

Литература: [1, гл. IX, с. 306–308].

Разберите решение примера 1 данного пособия.

1.3. Полный дифференциал функции нескольких переменных.

Литература: [1, гл. IX, с. 311–312].

Разберите решение примера 2 и задачи 2 данного пособия.

1.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Литература: [1, гл. IX, с. 310–311, 313–314].

Разберите решение примера 3 и задачи 3 данного пособия.

1.5. Экстремум функции нескольких переменных.

Литература: [1, гл. IX, с. 320–323].

Разберите решение примера 4 и задачи 5 данного пособия.

1.6. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Разберите решение примеров 5, 6 данного пособия.

1.7. Производная по направлению. Градиент.

Литература: [1, гл. XVI, с. 502–505].

Разберите решение примеров 7, 8 данного пособия.

1.8. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области.

Литература: [1, гл. IX, с. 323–325].

Разберите решение примера 9 данного пособия.

1.9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Литература: [1, гл. IX, с. 318–320].

Разберите решение примера 10 и задачи 4 данного пособия.

Темы 2. *Двойные и криволинейные интегралы*

2.1. Понятие двойного интеграла.

Литература: [1, гл. XI, с. 378–382].

Разберите решение задачи 6 данного пособия.

2.2. Вычисление двойного интеграла.

Литература: [1, гл. XI, с. 382–386].

Разберите решение примера 11 и задачи 7 данного пособия.

2.3. Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла.

Литература: [1, гл. XI, с. 388–3].

Разберите решение примеров 12, 13 и задачи 8 данного пособия.

2.4. Двойной интеграл в полярных координатах.

Литература: [1, гл. XI, с. 386–388].

Разберите решение примера 13 данного пособия.

2.5. Криволинейные интегралы 1 рода.

Литература: [1, гл. XII, с. 402–407].

Разберите решение примера 14 данного пособия.

2.6. Понятие криволинейного интеграла 2 рода.

Литература: [1, гл. XII, с. 402–407].

2.7. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

Литература: [1, гл. XII, с. 410–412].

Разберите решение примера 15 и задачи 9 данного пособия.

2.8. Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла.

Литература: [1, гл. XII, с. 402–407].

Разберите решение примера 16 данного пособия.

2.9. Формула Остроградского – Грина.

Литература: [1, гл. XII, с. 402–407].

2.10. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Литература: [1, гл. XII, с. 402–407].

Разберите решение задачи 10 данного пособия.

Тема 3. *Числовые и степенные ряды*

3.1. Понятие числового ряда. Сумма ряда.

Литература: [1, гл. XIII, с. 438–441].

Разберите решение задачи 11 данного пособия.

3.2. Необходимый признак сходимости ряда.

Литература: [1, гл. XIII, с. 442–444].

Разберите решение примера 17 данного пособия.

3.3. Признаки сравнения рядов.

Литература: [1, гл. XIII, с. 444–446].

Разберите решение примера 18 данного пособия.

3.4. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши.

Литература: [1, гл. XIII, с. 446–449].

Разберите решение примеров 19, 20 и 21 данного пособия.

3.5. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.

Литература: [1, гл. XIII, с. 451–454].

Разберите решение примеров 22, 23 и задачи 12 данного пособия.

3.6. Степенные ряды.

Литература: [1, гл. XIII, с. 457–462].

Разберите решение примера 25 и задачи 13 данного пособия.

3.7. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Литература: [1, гл. XIII, с. 462–463].

Разберите решение задачи 14 данного пособия.

3.8. Ряды Тейлора и Маклорена.

Литература: [1, гл. XIII, с. 463–471].

Разберите решение примера 26 и задачи 15 данного пособия.

Тема 4. *Элементы теории вероятностей и математической статистики.*

4.1. Понятие события. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики.

Литература: [2, с. 17–30].

Разберите решение примера 27 и задачи 16 данного пособия.

4.2. Основные теоремы теории вероятностей.

Литература: [2, с. 31–54].

Разберите решение примера 28 и задачи 17 данного пособия.

4.3. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная теорема Лапласа. Интегральная теорема Лапласа.

Литература: [2, с. 55–62].

Разберите решение примеров 29 – 31 данного пособия.

4.4. Закон распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной дискретной величины. Среднее квадратичное отклонение.

Литература: [2, с. 64–100].

Разберите решение примера 32 и задачи 18 данного пособия.

4.5. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Литература: [2, с. 111–127].

Разберите решение примеров 33 – 35 данного пособия.

4.6. Законы равномерного, нормального и показательного распределения.

Литература: [2, с. 122–154].

Разберите решение примера 36 и задачи 20 данного пособия.

4.7. Закон больших чисел. Лемма Маркова. Неравенство и теорема Чебышева. Теорема Бернулли.

Литература: [2, с. 101–110].

Разберите решение примеров 37 и 38 данного пособия.

4.8. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки.

Интервальные оценки, доверительная вероятность. Доверительные интервалы для генеральной средней, генеральной дисперсии.

Литература: [2, с. 187–226].

Разберите решение примеров 39, 40 и 41 и задач 21, 22 данного пособия.

4.9. Понятие о статистической гипотезе. Критическая область. Статистическая проверка статистических гипотез. Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

Литература: [2, с. 281–292].

Разберите решение примера 42 данного пособия.

4. Функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных

При рассмотрении многих явлений приходится иметь дело с функцией нескольких переменных. Например, площадь треугольника $S = \dfrac{xy}{2}$, $V = xyz$ – объём прямоугольного параллелепипеда. Пусть имеется n переменных величин и каждому набору их значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствует определённое значение величины z. Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ – независимые переменные (аргументы), Z – зависимая переменная. Множество X – область определения функции.

Будем вести изложение для функций двух переменных $(n = 2)$, при этом практически все понятия и теоремы, сформулированные для $n = 2$, легко переносятся и на случай $n > 2$.

Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных x и y из области D соответствует определённое значение величины z, то z – функция двух независимых переменных x, y: $z = f(x, y)$.

Функцию двух переменных можно задать с помощью формулы, аналитически или в виде таблиц (сложно).

Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых определяется $z = f(x, y)$, называется областью определения (существования) этой функции. Окрестностью $(\cdot)M_0(x_0, y_0) \in X$ называется круг, содержащий точку M_0.

Непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные первого порядка

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой точки. Число A называется пределом функции $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (в точке (x_0, y_0)), если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $(x;y)$, отстоящих от точки $(x_0; y_0)$ на расстояние ρ

меньшее, чем δ (т.е. при $0<\rho<\delta$), выполняется неравенство $\left|f(x;y)-A\right|<\varepsilon$.

Это обозначают так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$.

Функция $z=f(x;y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она:

1) определена в точке $(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности;

2) имеет конечный предел при $x\to x_0; y\to y_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $(x_0;y_0)$: $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x\to x_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$ или $\lim\limits_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\left[f\left(x+\Delta x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)\right]=0$ (1).

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области *D*, называется непрерывной в этой области.

Если условие (1) не выполняется, то точка $(x_0; y_0)$ – точка разрыва.

Если функция $z=f(x;y)$ непрерывна и определена в области *D* (замкнутой и ограниченной), то в области *D* она принимает наибольшее и наименьшее значения.

Частные производные

Пусть $z=f(x;y)$ – непрерывная функция, y = *const*, а аргумент *x* получил приращение Δx, т.е. $x=x+\Delta x$, тогда $\Delta z_x=f(x+\Delta x;y)-f(x;y)$ называется частным приращением $z=f(x;y)$ по переменной *x*, аналогично $\Delta z_y=f(x;y+\Delta y)-f(x;y)$ – называется частным приращением по *y*.

Полное приращение функции $z=f(x;y)$ равно $\Delta z=f(x+\Delta x;\ y+\Delta y)-f(x;y)$.

Получаем: Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции по переменной *x* и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial x},z'_x$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, причем предел вычисляется при $y=const$.

Аналогично, частной производной по y называется производная по y, вычисленная в предположении, что $x = const$: $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

При определении частных производных сохраняются правила дифференцирования для функций одной переменной.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных переменных.

Пример 1. Найти частные производные первого порядка.

а) $z = 12x^2 - 7xy - y^2 - 4x + 13$; *б)* $z = \arcsin(4x+y)$.

Решение

а. $\frac{\partial z}{\partial x} = 12 \cdot 2x - 7y - 4 = 24x - 7y - 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -7x - 2y.$

б. Используем формулу: $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Получаем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4}{\sqrt{1-(4x+y)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(4x+y)^2}}$.

Полный дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные. Полное приращение функции равно:

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$ После преобразований получаем:

$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$, где γ_1 и γ_2 – бесконечно малые величины при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, $\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ – полное приращение функции равно полному дифференциалу и бесконечно малым величинам высшего порядка малости.

Полный дифференциал – главная линейная часть приращения функции: $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \, (dx = \Delta x, \; dy = \Delta y)$.

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полный дифференциал: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

Пусть $z = f(x;y)$ – функция, дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$, $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) = f(x_0;y_0)+\Delta z$, но $\Delta z \approx dz$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, тогда получаем: $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0)+dz$, где $dz = \dfrac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y.$

Пример 2. Вычислить приближённо с помощью дифференциала $\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}$.

Решение

Воспользуемся формулой для приближенных вычислений:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0)+\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Выберем функцию $z=\sqrt{(x^3+y^3)},\ x_0=1,\ \Delta x = 0,02,\ y_0=2,\ \Delta y=-0,03.$

Находим частные производные и вычисляем их значение в точке (1;2):

$$z'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\ ;z'_y = \frac{3y^2}{\sqrt{x^3+y^3}}; z'_x(1;2) = \frac{3\cdot 1^2}{2\sqrt{1^3+2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2}\ ; z'_y(1;2) = \frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1+8}} = \frac{12}{6} = 2\ .$$

Тогда получаем:

$$\sqrt{(1,02)^3+(1,07)^3} \approx \sqrt{1^3+2^3}+\frac{1}{2}\cdot 0,02+2(-0,03) = 3+0,01-0,06 = 2,95\,.$$

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть имеется функция двух переменных $z = f(x;y)$. Если частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ являются дифференцируемыми функциями, то можно найти также и их частные производные, которые называются частными производными второго порядка Частных производных второго порядка четыре:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Если частные производные второго порядка снова дифференцировать, то получим 8 частных производных третьего порядка и т.д.

Теорема 1. Если функция $z = f(x;y)$ и её частные производные первого и второго порядка определены и непрерывны в точке $M(x;y)$ и в некоторой её окрестности, то в этой точке $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференциал второго порядка – дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е. $d^2z = d(dz)$. $d^2z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$, $d^3z = d(d^2z)$.

Пример 3. Найти частные производные второго порядка функции $z = \cos(xy^2)$.

Решение

Частные производные первого порядка:

$z'_x = -\sin(xy^2)\cdot y^2$; $z'_y = -\sin(xy^2)\cdot 2xy$.

Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(-y^2\sin\left(xy^2\right)\right)'_x = -y^4\cos\left(xy^2\right),$$

$$z''_{xy} = \left(-y^2\sin\left(xy^2\right)\right)'_y = -2y\sin\left(xy^2\right) - 2xy^3\cos\left(xy^2\right),$$

$$z''_{yy} = \left(-2xy\sin\left(xy^2\right)\right)'_y = -2x\sin\left(xy^2\right) - 4x^2y^2\sin\left(xy^2\right).$$

Экстремум функции нескольких переменных

Функция $z = f(x;y)$ имеет максимум в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$, если для всех точек $\left(x;y\right)$, достаточно близких к $\left(x_0;y_0\right)$, выполняется неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)$. Функция $z = f(x;y)$ имеет минимум в точке $\left(x_0;y_0\right)$, если $f\left(x_0;y_0\right) < f\left(x;y\right)$. Минимум и максимум называются экстремумами функции.

Теорема 2. (Необходимые условия экстремума). Если функция $z = f(x;y)$ достигает экстремума при $x = x_0$, $y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка по *z* или равна нулю, или не существует.

Точки, в которых частные производные первого порядка равны 0 или не существуют, называются критическими.

Введем обозначения:

$$A=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0},B=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\Bigg|_{M_0},C=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{M_0}.$$

Теорема 3. Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0;y_0)$, функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, пусть точка $M_0(x_0;y_0)$ – критическая, т.е. $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}=0$, тогда при $x=x_0, y=y_0$:

1) $f(x;y)$ имеет max, если $AC-B^2>0,\ A<0$,

2) $f(x;y)$ имеет min, если $AC-B^2>0,\ A>0$,

3) $f(x;y)$ не имеет экстремума, если $AC-B^2<0$,

4) если $AC-B^2=0$ – то необходимо дополнительное исследование.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy.$

Решение

Найдем частные производные первого порядка, приравняем их к нулю и решим полученную систему:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x,\begin{cases}3x^2-3y=0,\\3y^2-3x=0,\end{cases}$$

$$x^2=y,x^4-x=0,x(x-1)(x^2+x+1)=0,\ x_1=1,\ y_1=1,\ x_2=0,\ y_2=0.$$

Получили две критические точки: $D(1;1),\ E(0;0)$.

Найдем частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Рассмотрим точку $D(1;1)$.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=6x=6,B=-3,C=\frac{d^2 z}{dy^2}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=6y=6.$$

$$AC-B^2=6\cdot 6-(-3)^2=27>0,A>0-\min;\ z_{\min}=-1.$$

Для точки $E(0;0)$: $A=\frac{d^2 z}{dx^2}\Bigg|_{(0,0)}=0,B=-3,C=0;\ AC-B^2=-9<0$ – экстремума нет.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Во многих задачах на отыскание наибольших и наименьших значений функции нескольких переменных эти переменные связаны друг с другом некоторым условием – это условный экстремум.

Рассмотрим вопрос об условном экстремуме функции $z = f(x;y)$ при условии, что *x* и *y* связаны уравнением $\varphi(x;y) = 0$.

Если можно выразить *y* из второго условия и подставить в функцию, то получим функцию одного переменного *x* и далее очевидно.

Введём функцию Лагранжа $F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\cdot\varphi(x;y)$, где λ – коэффициент Лагранжа. Далее найдём частные производные функции $F(x;y;\lambda)$ по *x*, *y*, λ и приравняем к нулю. Получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными: *x*, *y*, λ, из которой определим x, y, λ.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2F(x;y) = F''_{xx}\cdot dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ для найденных значений *x*, *y*, λ при условии, что dx и dy связаны уравнением $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0.$ Функция $z = f(x;y)$ имеет условный максимум, если $d^2F < 0$, и условный минимум, если $d^2F > 0.$ Если $\Delta = AC - B^2$ для *F*(*x*;*y*) положителен, то в этой точке условный максимум $z = f(x;y)$, если $A < 0$, и условный минимум, если $A > 0$.

Пример 5. Найти экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ (сечение цилиндра плоскостью).

Решение

Функция Лагранжа:

$F(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$ $F'_x = -4 + 2\lambda x;$ $F'_y = -3 + 2\lambda y;$

$F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1.$

Решим систему:

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{4}{5}; y_1 = \dfrac{3}{5}; \lambda_1 = \dfrac{5}{2}$ или $x_2 = -\dfrac{4}{5}; y_2 = -\dfrac{3}{5}; \lambda_2 = -\dfrac{5}{2}.$

Находим: $F''_{xx} = 2\lambda, F''_{xy} = 0; F''_{yy} = 2\lambda,$ тогда $d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$. Если $\lambda = \frac{5}{2}\left(x = \frac{4}{5} \text{ и } y = \frac{3}{5}\right)$, то $d^2F > 0$ и будет условный минимум $z_{\min} = 1$; если $\lambda = -\frac{5}{2}\left(x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}\right)$, то $d^2F < 0$ – максимум $z_{\max} = 11$.

Пример 6. Выбрать из прямоугольных листов периметра *2p* лист с наибольшей площадью.

Решение

Пусть *x, y* – длина и ширина, тогда площадь *u=xy, x* и *y* связаны отношения: *2x+2y=2p*, или $\varphi(x, y) = x + y - p = 0$. Составим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - p)$, найдем частные производные и решим систему:

$$\begin{cases} \partial F / \partial x = y + \lambda = 0, \\ \partial F / \partial y = x + \lambda = 0, \\ \partial F / \partial \lambda = x + y - p = 0, \end{cases} \qquad . \begin{cases} y = p/2, \\ x = p/2. \end{cases}$$

Получили, что наибольшую площадь имеет квадрат.

Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности $(\cdot)M(x; y)$, ℓ – некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы. При перемещении в данном направлении ℓ из $(\cdot)M(x; y)$ в точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ функция получит приращение $\Delta_\ell z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

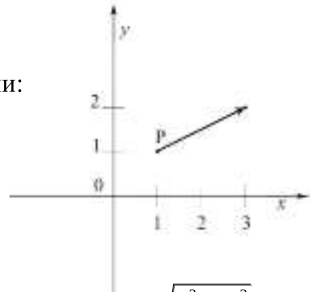
Производной z'_ℓ по направлению ℓ функции $z = f(x; y)$ называется предел: $z'_\ell = \lim\limits_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta_\ell z}{\Delta\ell}$. Производная z'_ℓ характеризует скорость изменения функции в направлении ℓ и определяется формулой $z'_\ell = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta$.

Градиентом $grad\, z$ функции $z = f(x; y)$ называется вектор с координатами $\{z'_x; z'_y\}$, т.е. $grad\, z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}$.

Градиент $grad\, z$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Если рассмотреть функцию трех переменных $U = U(x, y, z)$, то производная по направлению ℓ, заданному единичным вектором $\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, определяется выражением $U'_\ell = gradU \cdot \vec{e}$, где $gradU = U'_x + U'_y + U'_z$ – градиент функции U.

Пример 7. Найти и построить градиент функции $z = x^2 y$ в точке $P(1;1)$.



Решение

Используем формулу для градиента функции:

$grad\, z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}$.

Найдем и вычислим частные производные:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$; $grad\ z = (2xy)\overline{i} + x^2 \overline{j}$;

$gradz\big|_P = 2\overline{i} + \overline{j}$.

Пример 8. Найти величину и направление градиента $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке $M(5;3)$.

Решение

Найдем частные производные:

$$z'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}; \; z'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$grad\ z = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)\vec{i} + \left(-\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)\vec{j}; \; grad\ z = \left(\frac{5}{\sqrt{25-9}}\right)\vec{i} + \left(\frac{-3}{\sqrt{25-9}}\right)\vec{j}$$

$$grad\ z = \frac{5}{4}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}; \; |\,grad\ z\,| = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области

Функция, ограниченная и дифференцируемая в замкнутой области, достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения или во внутренних точках этой области (критических) или на её границе. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в области D, надо найти все внутренние критические точки $\left(z'_x = 0,\ z'_y = 0\right)$, найти значения функции в этих точках, вычислить наибольшее и наименьшее значение функции на каждой линии, ограничивающей область *D*. Сравнив все полученные значения, определяем наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y + 5 = 0$.

Решение

а. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3; \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2,$ $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$ $x = -2,\ y = -1.$

Полученная точка принадлежит области. Вычислим: $z_1(-2; -1) = -3$.

б. на оси *ох*: $y=0$, тогда $z=x^2+3x+1$.

$$(-5 \le x \le 0), \frac{dz}{dx} = 2x + 3, x = -\frac{3}{2}, z_2\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = -5/4.$$

в. ось о*y*; $x = 0,\ z = 2y^2 + 2y + 1;\ (-5 \le y \le 0), \frac{dz}{dy} = 4y + 2;$

$$y = -\frac{1}{2}, z_3\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

г. $y = -x - 5, z = 4x^2 + 26x + 41, (-5 \le x \le 0), \frac{dz}{dx} = 8x + 26,$

$$x = -\frac{13}{4},\ y = \frac{-7}{4};\ z_4\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right) = -5/4.$$

Значения функции в вершинах треугольника: $Z_5(-5;0) = 11;\quad Z_6(0;0) = 1;\quad Z_7(0;-5) = 41.$

Из полученных чисел выбираем: $z_{наиб} = z(-5;0) = 41;\quad z_{наим} = z(-2;-1) = -3.$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 (точке касания) называется плоскость, в которой лежат все касательные в точке M_0 к различным кривым, проведённым на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Если уравнение поверхности $z = f(x; y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$, уравнение нормали: $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

Если поверхность задана неявно в виде $F(x;y;z)=0$, то

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$$

– уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}$$ – уравнение нормали.

Пример 10. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z-2=0$ в точке $M_0(1;1;1)$.

Решение

Найдем частные производные функции $F(x;y;z)=x^2+y^2+2\cdot y\cdot z-z^2+y-2\cdot z-2.$

$$F'_x=2\cdot x;\ F'_y=2\cdot y+2\cdot z+1;\ F'_z=2y-2z-2.$$

В точке $M_0(1;1;1)$ значения частных производных:

$$F'_x=2\cdot x=2;\ F'_y=2\cdot y+2\cdot z+1=5;\ F'_z=2y-2z-2=-2.$$

Пользуясь формулами

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0;y_0;z_0)}$$

получаем уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

$2(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0;\ 2x+5y-2z-5=0$ – уравнение касательной плоскости,

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$ – уравнение нормали.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Найти область определения функции

а) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; *б*) $z=\ln(-x-y)$

Решение

а. Подкоренное выражение неотрицательно:

$1-x^2-y^2\ge 0;\ 1\ge x^2+y^2;\ x^2+y^2=1.$

Это окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Неравенству соответствуют все внутренние точки круга, включая саму окружность.

б. $z=\ln(-x-y)$

Выражение под знаком логарифма положительное:

$-x-y>0;\ x+y<0;\ x+y=0$.

Это уравнение прямой, которая делит плоскость на две полуплоскости. Чтобы выбрать искомую полуплоскость, выберем произвольную точку $A(3;0)$ и проверим выполнение неравенства: $3>0$, значит, решением будет другая полуплоскость – полуплоскость, расположенная «ниже» прямой.

Задача 2. Найти полный дифференциал функции $z=x^3y^2+xy+2y$.

Решение

$zx'=3x^2y^2+y$; $zy'=2yx^3+x+2$.

Полный дифференциал определяется по формуле:

$dz=zx'dx+zy'dy$; $dz=(3x^2y^2+y)dx+(2yx^3+x+2)dy$.

Задача 3. Найти частные производные второго порядка функции $z=\sin(x^2-y)$.

Решение

Частные производные первого порядка:

$z'_x=2x\cos(x^2-y);\quad z'_y=-\cos(x^2-y).$

Частные производные второго порядка:

$z''_{xx}=2\cos(x^2-y)-4x^2\sin(x^2-y)$,

$z''_{xy}=2x\sin(x^2-y)$, $z''_{yy}=-\sin(x^2-y)$.

Задача 4. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1;-2;5)$.

Решение

В точке $M_0(1;-2;5)$ значения частных производных:

$z'_x = 2x = 2,\ z'_y = 2y = -4.$

Используем формулы:

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0;y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y - y_0)\ ,$$

уравнение нормали: $\dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}.$

Тогда уравнение касательной плоскости: $z - 5 = 2(x-1) - 4(y+2),\ 2x - 4y - z - 5 = 0,$

уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}.$

Задача 5. Исследуйте на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

Решение

Для определения критических точек найдем частные производные первого порядка: $z'_x = 6 - 2x - y;\ z'_y = -x - 2y$.

Приравняем частные производные первого порядка к нулю и решим систему:

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Получили критическую точку: $M_1(4;-2)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$z''_{xx} = -2 = A,\ z''_{xy} = -1 = B,\ z''_{yy} = -2 = C.$

Составим определитель: $\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0$.

Поскольку $\Delta > 0$, то экстремум существует. $A = -2 < 0$ – максимум, $z_{\max}(4;-2) = 13.$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Что называется функцией n переменных?
3. Что называется областью определения функции?
4. Что называется пределом функции двух переменных?
5. Дать определение непрерывности функции двух переменных в точке.
6. Дать определение непрерывности функции двух переменных в области.
7. Сформулировать свойства функции двух переменных, непрерывной и ограниченной в замкнутой области.
8. Дать определение частной производной по x функции двух переменных.
9. Дать определение частной производной по y функции двух переменных.
10. Что называется частными производными высших порядков?
11. Написать формулу полного дифференциала функции двух переменных.
12. Использование дифференциала функции двух переменных в приближенных вычислениях?
13. Написать формулу касательной плоскости и нормали к поверхности.
14. Что такое экстремум функции двух переменных?
15. Необходимое условие экстремума функции двух переменных.
16. Сформулировать достаточное условие экстремума функции двух переменных.
17. Сформулировать правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области.

5. Двойные и криволинейные интегралы

Понятие двойного интеграла

Рассмотрим в плоскости XOY замкнутую область D, ограниченную линией L. Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D на n частей: $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$, называемых площадками. Через ΔS_i обозначим и площади площадок. В каждой из площадок возьмем точку P_i: $P_1, P_2, ..., P_n$. Обозначим через $f(P_1), f(P_2), ..., f(P_n)$ значения функции в выбранных точках и составим сумму произведении вида

$$f(P_i)\Delta S_i : V_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + ... + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D. Если $f \geq 0$, то $(P_i)\cdot\Delta S_i$ – объем цилиндра, построенного на ΔS_i как на основании с высотой $f(P_i)$.

Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, составленных с помощью функции $f(x, y)$ для данной области D: $V_{n_1}, V_{n_2}, V_{n_3}, ..., V_{n_k}$ при различных способах разбиения области D на части ΔS_i. Считаем, что $\max d\, \Delta S_i \to 0$ при $n \to \infty$. При этом справедлива теорема 1:

Теорема 1. Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то существует предел последовательности интегральных сумм, если наибольший диаметр площадок $\Delta S_i \to 0$, ($n \to \infty$), который не зависит ни от способов разбиения области D, ни от выбора точек P_i.

Этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается так: $\iint\limits_D f(P)ds$ или $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, т.е.

$$\lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i = \iint\limits_D f(x, y)dxdy ,$$ D – область интегрирования.

Если $f(x, y) \geq 0$, то $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = V$ – объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны OZ, а направляющей служит граница области D.

Теорема 2. Двойной интеграл от суммы двух функций $\varphi(x,y)+f(x,y)$ по области D равен сумме двойных интегралов по области D от каждой из функций в отдельности:

$$\iint_D\left[\varphi(x,y)+f(x,y)\right]ds=\iint_D\varphi(x,y)ds+\iint_D f(x,y)ds\,.$$

Теорема 3. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла: $\iint_D cf(x,y)ds=c\iint_D f(x,y)ds$ ($c=const$).

Доказательство аналогично доказательству для определенного интеграла.

Теорема 4. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек и функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области D, то $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$.

Теорема справедлива для любого числа слагаемых.

Теорема 5. (теорема о среднем). $\iint_D f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0)S$, точка $P(x_0;y_0)\in D$, S – площадь области D.

Теорема 6. Если функция $f(x,y)$ во всех точках области D удовлетворяет неравенствам $m\le f(x,y)\le M$, то $m\cdot S\le\iint_D f(x,y)dxdy\le M\cdot S$, где S – площадь области D

Вычисление двойного интеграла

Пусть область D такова, что всякая прямая, параллельная одной из координатных осей, например, оси OY, и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границу области в двух точках. Предположим, что область ограничена линиями: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ и функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $a<b$. Такая область называется правильной в направлении оси OY. Аналогично определяется область,

правильная в направлении оси OX. Область, правильную как в направлении оси OX, так и оси OY, называют правильной.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Рассмотрим $I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$, который будем называть двукратным интегралом от $f(x,y)$ по области D. В этом выражении сначала вычисляется определенный интеграл, стоящий в скобках, при этом считаем, что $x = const$, получаем функцию от $x: \Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, далее вычисляем определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x)dx = I_D$, который равен постоянному числу.

Пусть область D такова, что одна из функций $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ не может быть задана одним аналитическим выражением на всем участке $[a,b]$, т.е. если $c \in (a,b)$, то $\varphi_1 = \psi(x)$ на отрезке $[a,c]$ и $\varphi_1(x) = \chi(x)$ на отрезке $[c,b]$, тогда

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

Теорема. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по области D: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Замечание 1.

Пусть правильная в направлении оси OX область D ограниченна линиями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, $\psi_1 \le \psi_2$, $c < d$.

Очевидно, что

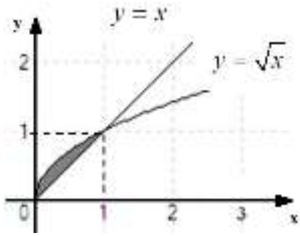
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \cdot$$

Для вычисления двойного интеграла его надо представить в виде двукратного. В каждом конкретном случаи надо выбрать формулу в зависимости от вида области и подынтегральной функции $f(x,y)$.

Пример 11. Изменить порядок интегрирования в интеграле $I=\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\right)dx$.

Решение

Очевидно, что $x=y^2$, $x=y$, $0\le y\le 1$.



$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx\right)dy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx.$$

Замечание 2. Если область D не является правильной ни в направлении оси OX, ни в направлении OY, то необходимо разбить область D на *конечное* число правильных областей, затем найти интегралы по каждой области и сложить результаты.

Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла. Объем цилиндроида

Как отмечалось выше, объем цилиндроида, т.е. тела, ограниченного поверхностью $z=f(x,y)\ge 0$, плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельные оси OZ, равен $V=\iint\limits_D f(x,y)ds$.

Замечание 1. Если тело ограничено сверху поверхностью $z=\Phi_2(x,y)\ge 0$, а снизу – поверхностью $z=\Phi_1(x,y)\ge 0$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость XOY является область D, то объем этого тела равен разности объемов двух цилиндроидов: $V=\iint\limits_D \Phi_2(x,y)ds-\iint\limits_D \Phi_1(x,y)ds=V=\iint\limits_D(\Phi_2-\Phi_1)ds$. Формула верна для любых непрерывных функций Φ_2 и Φ_1, для которых $\Phi_2(x,y) \ge \Phi_1(x,y)$.

Площадь плоской фигуры

Если составить интегральную сумму для функции $f(x,y) \equiv 1$ по области D, то эта сумма равна площади $S = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta S_i$. Переходя к пределу, получим: $S = \iint_D dxdy$. Если область – правильная, то имеем $S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_a^b \left(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right) dx$ – формула, рассмотренная ранее.

Пример 12. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 2 - x^2, y = x$.

Решение

Координаты точек пересечения: $x_1 = -2, x_2 = 1$, тогда площадь $S = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx = \frac{9}{2}$.

Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат φ, r задана такая область D, что каждый луч, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает границу области не более чем в двух точках. D ограничена кривыми $r = \Phi_1(\varphi)$, $r = \Phi_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, $\Phi_1 \le \Phi_2$, $\alpha < \beta$. Такую область называют правильной.

Формула для вычисления двойного интеграла в полярных координатах:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi) r dr.$$

Пример 13. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ и цилиндром $x^2 + y^2 - 2ay = 0$.

Решение

Область интегрирования – основание цилиндра $x^2+y^2-2ay=0$ – круг с центром в точке $(0;a)$ и радиусом a. Вычислим $\frac{1}{4}V$ – ту его часть, которая расположена в 1 октанте:

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{2a}dy\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,.$$

В полярных координатах: $x^2+y^2=r^2$, $y=r\sin\varphi$ и уравнение окружности: $r^2-2ar\sin\varphi=0$ или $r=2a\sin\varphi$. Тогда:

$$\frac{1}{4}V=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\sin\varphi}\sqrt{4a^2-r^2}\,rdr=\int_0^{\pi/2}\left(\left.-\frac{\left(4a^2-r^2\right)^{3/2}}{3}\right|_0^{2a\sin\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\left(4a^2-4a^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}-\left(4a^2\right)^{3/2}\right)d\varphi=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{9}a^3\left(3\pi-4\right).\ \text{V}=4\cdot\frac{4}{9}a^3\left(3\pi-4\right)=\frac{16a^3\left(3\pi-4\right)}{9}.$$

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть на плоскости XOY задана линия L, в каждой точке которой определена функция $f(x,y)$ двух независимых переменных, предполагаемая непрерывной.

Разобьем дугу AB кривой L на n частей точками $A_0=A$, A_1, A_2, …, $A_n=B$. На каждой части A_iA_{i+1} выберем произвольную точку $M_i(x_i;y_i)$ и вычислим значение $f(x,y)$ в этой точке: $f(x_i,y_i)$. Число $f(x_i,y_i)$ умножим на длину дуги $A_iA_{i+1}=\Delta S_i$ и сложим эти произведения. Получим сумму $\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i,y_i)\Delta S_i$. Рассмотрим предел этой суммы при условии, что $\max\Delta S_i\to 0$ ($n\to\infty$). Если функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках дуги AB, то этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги AB на части, ни от выбора точки $M_i(x_i;y_i)$ на каждой из этих частей.

Этот предел называется криволинейным интегралом первого рода по дуге AB от функции $f(x,y)$ и обозначается $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \lim\limits_{\max \Delta S_i \to 0} \sum f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Из определения следует, что кривой AB не предписывается определенного направления, то есть

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds .$$

По аналогии, если AB – пространственная кривая, то криволинейный интеграл:

$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds$, здесь $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ – дифференциал дуги.

Если кривая AB задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то криволинейный интеграл первого рода вычисляют по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\ dt .$$

Если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f\left(x, \varphi(x)\right)\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx .$$

Если подынтегральную функцию интерпретировать как линейную плотность кривой, то этот интеграл – масса этой кривой.

Пример 14. Вычислить $\int\limits_{AB} x^2 y ds$, где AB – часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в первой четверти.

Решение

Используем формулу $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f\left(x, \varphi(x)\right)\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx$.

Получаем:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\ ;\ 1 + \left(y'\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}\ ;$$

$$\int\limits_{AB} x^2 y ds = \int\limits_{0}^{R} x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^R = \frac{R^4}{3} .$$

Криволинейный интеграл второго рода

Понятие криволинейного интеграла второго рода

Пусть точка $P(x;y)$ движется вдоль плоской линии L от точки M до точки N. К точке P приложена сила $\vec{F}$, меняющаяся по величине и направлению: $\vec{F}=\vec{F}(P)$. Вычислим работу A силы $\vec{F}$ при перемещении точки P из M в N.

Разобьем кривую L на n частей точками $M_0=M, M_1, M_2, ..., M_n=N$ и обозначим через $\Delta\vec{S}_i$ вектор $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$.

Величину силы в точке M_i обозначим $\vec{F}_i$. Тогда $A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$.

Пусть $\vec{F}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$, где $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ – проекции силы на оси OX и OY. $\overrightarrow{\Delta S_i}=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$, ($\Delta x_i$ и Δy_i – приращение координат от точки M_i к точке M_{i+1}).

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} = X(x_i;y_i)\Delta x_i + Y(x_i;y_i)\Delta y_i .$$

Работа силы равна: $A \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta S_i} = \sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i;y_i)\Delta x_i + Y(x_i;y_i)\Delta y_i\right];$

$$A=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left[X(x_i;y_i)\Delta x_i+Y(x_i;y_i)\Delta y_i\right].$$

Если функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ – непрерывные, то этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги, ни от выбора точек. Стоящий справа предел называется криволинейным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{F}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ по кривой L:

$$A=\int_L Xdx+Ydy \quad \text{или} \quad A=\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)dx+Y(x,y)dy,$$

где (M) и (N) – не числа, а обозначение концов линии. Направление от M к N – направление интегрирования. Если кривая пространственная, то $A=\int_L X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz$.

Свойство 1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл меняет знак ($\overrightarrow{\Delta S_i}$ меняет знак).

Свойство 2. Если разбить кривую L на части L_1 и L_2, то

$$\int_L Xdx+Ydy=\int_{L_1} Xdx+Ydy+\int_{L_2} Xdx+Ydy .$$

Замечание. Если кривая L замкнутая, то используется обозначение: $\oint\limits_L Xdx+Ydy$. Поскольку $\vec{F}$ – векторная функция, получаем $\oint\limits_L \vec{F}d\vec{S}$. Интеграл $\oint\limits_L \vec{F}d\vec{S}$ называется *циркуляцией вектора* $\vec{F}$ по замкнутому контуру L.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Пусть кривая L задана параметрически: $x=\phi(t)$; $y=\psi(t)$ и точкам M и N соответствуют значения α и β параметра t.

Рассмотрим криволинейный интеграл $\int\limits_L Xdx+Ydy$.

Формула для вычисления криволинейного интеграла:

$$\int\limits_L X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta\left\{X\left[\varphi(t);\psi(t)\right]\varphi'(t)+Y\left[\varphi(t);\psi(t)\right]\psi'(t)\right\}dt$$

Если пространственная кривая задана уравнениями: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ и $\alpha\le t\le\beta$, то аналогично:

$$\int Xdx+Ydy+Zdz=\int\limits_\alpha^\beta\Big[X\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\cdot\varphi'(t)+Y\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\cdot\psi'(t)+$$

$$+Z\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\chi'(t)\Big]dt$$

Пример 15. Вычислить криволинейный интеграл от векторной функции $\vec{F}=x^3\vec{i}+3zy^2\vec{j}-x^2y\vec{k}$ вдоль отрезка прямой, идущей от точки $M(3;\,2;\,1)$ до точки $N(0;\,0;\,0)$.

Решение

Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{1-0};\ \frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=t;\ x=3t,\ y=2t,\ z=t;\ x'=3,\ y'=2,\ z'=1$$

Точке M соответствует $t=1$, точке N: $t=0$, тогда:

$$\int\limits_{MN} x^3dx+3zy^2dy-x^2ydz=\int\limits_1^0\left[(3t)^3 3+3t(2t)^2 2-(3t)^2 2t\right]dt=$$

$$=\int\limits_1^0(81t^3+24t^3-18t^3)dt=\int\limits_1^0 87t^3dt=87\left.\frac{t^4}{4}\right|_1^0=-\frac{87}{4}.$$

В общем виде: если $y=\varphi(x)$ – кривая, $a\le x\le b$, то криволинейный интеграл второго рода равен:

$$\int\limits_L X(x,y)dx+Y(x,y)dy=\int\limits_a^b\left[X(x,\varphi(x))+\varphi'(x)Y(x,\varphi(x))\right]dx.$$

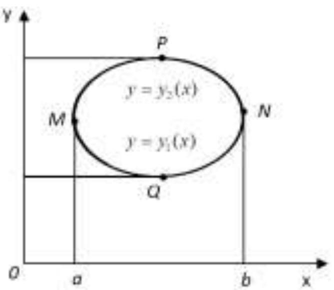
Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла

Пусть в плоскости *ХОУ* дана правильная область *D*. На ось *OX* область *D* проектируется в отрезок [*a*;*b*], снизу она ограничена кривой $y_1(x)$, сверху кривой $y_2(x)$.

Кривая *L* обходится против часовой стрелки. Аналогично,

$$S=\oint\limits_L xdy\text{, тогда } S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx,$$

т.е. получили три формулы для вычисления площади плоской фигуры.



Пример 16. Вычислить площадь эллипса $x=2\cos t$, $y=3\sin t$.

Решение

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(2\cos t\cdot 3\cos t-3\sin t(-2\sin t)\right)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}6dt=6\pi$$

или:

$$S=-\int\limits_L ydx=-\int\limits_0^{2\pi}3\sin t(-2\sin t)dt=\int\limits_0^{2\pi}6\sin^2 tdt=6\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=6\pi.$$

Формула Остроградского – Грина

Установим связь между двойным интегралом по некоторой плоской области D и криволинейным интегралом 2 рода по границе L этой области.

Пусть в плоскости XOY дана ограниченная замкнутым контуром L правильная область D, ограниченная снизу кривой $y = y_1(x)$, а сверху кривой $y = y_2(x)$, $a \le x \le b$. Пусть в области D заданы непрерывные функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные.

$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Xdx + Ydy$ – *формула Остроградского–Грина*: двойной интеграл по плоской области равен криволинейному интегралу по границе этой области.

Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода $\oint\limits_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy$, взятый по замкнутому контуру L.

Теорема. Пусть во всех точках области D функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial X}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y}{\partial x}$ непрерывны. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ во всех точках области D.

Если выполняется условие $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$, то выражение $Xdx + Ydy = dU(x, y)$, т.е. это выражение – полный дифференциал функции $U(x, y)$, причем $\frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y)$. Действительно, дифференцируя первое соотношение по y, а второе – по x, получим $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, но $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, поэтому $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$.

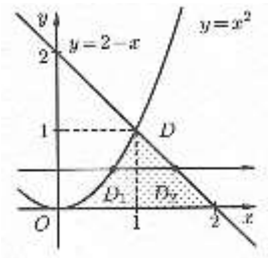
В этом случае $\int\limits_{MN} Xdx + Ydy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x,y) = U(N) - U(M)$, где $U(N)$ и $U(M)$ – значения функции $U(x,y)$ в точках N и M соответственно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 6. Вычислить $\iint(2x-y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y=0;\ y=x^2,\ x+y=0$

Решение

Изобразим область D и запишем двойной интеграл в виде:



$$\iint\limits_D(2x-y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}(2x-y)dx=\int\limits_0^1 dy\left(x^2-xy\right)\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\left((2-y)^2-2y+y^2-y+\sqrt{y}y\right)=\left(\frac{(y-2)^3}{3}-y^2+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=-\frac{11}{10}$$

Если изменить порядок интегрирования, то получим два интеграла:

$$\iint\limits_D(2x-y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(2x-y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2}(2x-y)\,dxdy=$$

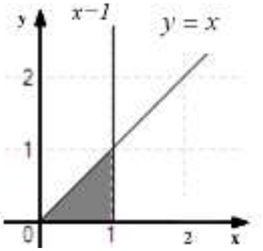
$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}(2x-y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}(2x-y)\,dy=-\frac{11}{10}$$

Задача 7. Вычислить $\iint\limits_D e^{y/x}ds$, где D – треугольник, ограниченный прямыми $y=x, y=0, x=1$

Решение

Выберем порядок интегрирования, чтобы подынтегральная функция была простой для интегрирования:

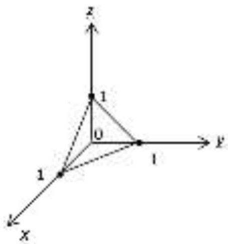
$$\iint\limits_D e^{y/x}ds=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x e^{y/x}dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(x\cdot e^{y/x}\right)\Big|_0^x dx=\int\limits_0^1(x\cdot e-x)dx=(e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

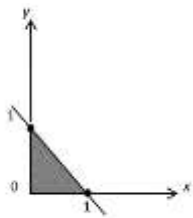


Задача 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1.$

Решение

Очевидно, что $z=1-x-y;\ V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\dfrac{1}{6}.$





Задача 9. Найти работу силового поля $\vec{F}=6x^2y\vec{i}+10xy^2\vec{j}$ вдоль кривой $y=x^3$ от точки $M(1;1)$ до точки $N(2;8)$.

Решение

Здесь $x=x; y=x^3$ – (считаем, что x – параметр): $x'_x=1,\ y'_x=3x^2$, тогда:

$$\int_{MN} 6x^2ydx+10xy^2dy=\int_1^2\left(6x^2\cdot x^3\cdot 1+10x\cdot\left(x^3\right)^2 3x^2\right)dx=$$

$$=\int_1^2(6x^5+30x^9)dx=(x^6+3x^{10})\Big|_1^2=3132.$$

Задача 10. Найти криволинейный интеграл второго рода $I=\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} y\ dx+x\ dy$.

Решение

Здесь $X = y$, $Y = x$, $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 1$. Согласно теореме, интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можно взять отрезок прямой $y = x$, дугу параболы $y = x^2$ и т.д. или воспользоваться формулой

$$I = \int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = U(x_2;y_2) - U(x_1;y_1).$$

Так как $ydx + xdy = d(xy)$, то $I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} d(x \cdot y) = xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)} = 1 - 0 = 1$.

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение двойному интегралу.
2. Основные свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
4. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
5. Как использовать двойной интеграл для вычисления площади плоской фигуры.
6. Дать определение вычисления объема «цилиндроида» с помощью двойного интеграла.
7. Сформулировать понятие криволинейного интеграла 1 рода.
8. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.
9. Сформулировать понятие криволинейного интеграла 2 рода.
10. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода.
11. Сформулировать формулу Остроградского–Грина.
12. Условия независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования

6. Числовые и степенные ряды

Понятие числового ряда. Сумма ряда

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_n, ...$ Выражение $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n + ...$ (1) называется числовым рядом. Числа $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_n ...$ называются членами ряда. Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера: $u_n = f(n)$.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n -ой частичной суммой ряда: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$. Рассмотрим частичные суммы: $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, ...,\quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда (1) и говорят, что ряд сходится. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд расходится и суммы не имеет.

Теорема 1. Если сходится ряд, полученный из данного ряда (1) отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, полученный из данного отбрасыванием нескольких членов.

Теорема 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ $(c = const)$ тоже сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

Т*еорема* 3. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S_1 и S_2, то ряды $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ...$ и $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ...$ тоже сходятся и их суммы равны $S_1 + S_2$ и $S_1 - S_2$ соответственно.

Необходимый признак сходимости ряда

При исследовании рядов одним из основных вопросов является вопрос о сходимости ряда.

Теорема. Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 17. Исследовать ряд $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$ на сходимость.

Решение

Ряд расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$, т.е. не выполняется необходимый признак.

Если выполняется необходимый признак, то ряд может расходиться, т.е. это не достаточный признак.

Например, рассмотрим гармонический ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$. Хотя $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, но гармонический ряд расходится.

Признаки сравнения рядов

Пусть имеем два ряда с положительными членами: $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ (2) и $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots$ (3).

Теорема 1. Если члены ряда (2) не больше соответствующих членов ряда (3), т.е. $u_n\le v_n$ и ряд (3) сходится, то сходится и ряд (2).

Теорема 2. Если члены ряда (2) не меньше соответствующих членов ряда (3), т.е. $u_n\ge v_n$, и ряд (3) расходится, то и ряд (2) расходится.

Пример 18. Исследовать сходимость рядов

а) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$; *б*) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

Решение

а. Этот ряд сходится, т.к. его члены меньше соответствующих членов ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$. Последний ряд сходится, т.к. начиная со второго члена — это геометрическая прогрессия с $q=\frac{1}{2}<1$.

б. Ряд расходится, т.к. его члены, начиная со второго, больше соответствующих членов гармонического ряда $\left(u_n=\frac{1}{n}\right)$, который расходится.

Теорема 3. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$, то ряды (2) и (3) сходятся или расходятся одновременно.

Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши

Теорема (*признак*) *Даламбера.* Если в ряде с положительными членами $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n \to \infty$ имеет конечный придел l, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится в случаи $l < 1$, ряд расходится при $l > 1$. При $l = 1$ теорема не даёт ответа о сходимости ряда.

Замечание.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд расходится.
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, но $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, начиная с N_1, то ряд расходится.

Пример 19. Исследовать сходимость рядов

а) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$; *б*) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots$; *в*) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$

Решение

а. Используем признак Даламбера: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ – ряд сходится по признаку Даламбера.

б. Используем признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$ – ряд расходится по признаку Даламбера. Можно было использовать необходимый признак сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$, поэтому ряд расходится.

в. Используем признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}:\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1$, но ряд расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$.

Теорема (*признак*) *Коши*. Если для ряда с положительными членами $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд сходится, а при $l>1$ – расходится. При $l=1$ требуется дополнительное исследование.

Пример 20. Исследовать сходимость рядов

$$a)\,\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots,\quad б)\,\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение

а. Используем признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$ – ряд сходится по признаку Коши.

б. Используем признак Коши: $\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$, но ряд сходится, т.к. члены ряда, начиная со второго, меньше членов сходящего ряда $\frac{1}{n(n+1)}$.

Интегральный признак Коши

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ положительны и не возрастают, т.е. $u_1\le u_2\le u_3\le\ldots$, и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1)=u_1$; $f(2)=u_2$, …, $f(n)=u_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 21. Исследовать на сходимость ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд): $\sum\limits_{n}\dfrac{1}{n^p}$.

Решение

Используем интегральный признак Коши, т.е. рассмотрим сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^p}$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int\limits_1^{\infty}x^{-p}dx=(p\neq 1)=\lim_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}x^{-p}dx=\lim_{a\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^a=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=$$

$$=\begin{cases}1/(p-1),\ \text{если}\ p>1,\\ \infty,\ \text{если}\ p<1.\end{cases}$$

Поскольку при p=1 получаем гармонический ряд (который расходится), то при $p>1$ ряд сходится, а при $p\leq 1$ – расходится.

Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

Члены знакочередующегося ряда имеют чередующиеся знаки: $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$, где члены ряда u_i – положительные числа.

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots\ (u_n>0)$: члены таковы, что $u_1>u_2>u_3>u_4\ldots$ (1) и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ (2), то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит u_1.

Замечание. Теорема Лейбница справедлива, если условие (1) выполняется, начиная с некоторого номера *N*.

Пример 22. Исследовать на сходимость ряд $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$.

Решение

Используем теорему Лейбница: ряд сходится, т.к. $1>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>\ldots$ и

$$\lim u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Знакопеременные ряды – если среди членов есть положительные и отрицательные.

Числа u_i могут быть как положительными так и отрицательными.

Теорема. Если знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ таков, что ряд из модулей $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ сходится, то и данный ряд сходится.

Пример 23. Исследовать на сходимость ряд $\dfrac{\sin k}{1^2}+\dfrac{\sin 2k}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$.

Решение

Рассмотрим ряд из модулей: $\left|\dfrac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\dfrac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\ldots$. Для сравнения выберем ряд $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}+\ldots$, который сходится, исходя из ряда Дирихле. Члены ряда $\left|\dfrac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\dfrac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\ldots$ не больше соответствующих членов ряда $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}+\ldots$, тогда, в силу доказанной теоремы, ряд $\dfrac{\sin k}{1^2}+\dfrac{\sin 2k}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$ сходится.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+$ (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ (2). Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то знакопеременный ряд сходится условно.

Пример 24. Исследовать на сходимость ряды $a)\ 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$; $б)\ 1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+\ldots$.

Решение

а. Ряд сходится условно, т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ (гармонический) расходится.

б. Это абсолютно сходящийся ряд, т.к. ряд, состоящий из модулей, сходится. По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}:\dfrac{1}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$.

Отметим следующие свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

1. Если ряд сходится абсолютно, то он остаётся абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

2. Если ряд сходится условно, то, какое бы ни выбрали число *A*, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась равной *A*. Более того, можно так переставить члены условно

сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, окажется расходящимся.

Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, где a_i – числа (коэффициенты ряда), x – переменная величина.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком значении x , для которого $|x| < |x_0|$. Если ряд расходится при некотором значении x_0' , то он расходится при всяком x , для которого $|x| > |x_0'|$.

Из теоремы Абеля следует, что если x_0 – точка сходимости, то весь интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ заполнен точками абсолютной сходимости, т.е. существует число R , такое что при всех x таких, что $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится.

Теорема. Областью сходимости степенного ряда является интервал с центром в начале координат.

Определение. Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал от $-R$ до R , что для всякой точки x , лежащей внутри интервала, ряд сходится абсолютно, для точек x , лежащих вне него – расходится. Число R – радиус сходимости степенного ряда.

На концах интервала (при $x = R$ и $x = -R$) вопрос о сходимости решается индивидуально для каждого ряда.

Для определения R используем признак Даламбера для *модулей*: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L\cdot|x|$. Если $|x| < \frac{1}{L}$, то ряд сходится, если $|x| > \frac{1}{L}$ – расходится. Поэтому $R = \frac{1}{L} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Аналогично, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ – по признаку Коши.

Пользоваться этими формулами следует осторожно, т.к. пределы часто не существуют. Например, если бесконечное множество коэффициентов a_n обращается в нуль (т.е. ряд содержит члены только с чётными или нечётными степенями x), то пользоваться этими формулами нельзя.

Пример 25. Найти область сходимости степенного ряда $1+x+x^2+...+x^n+...$.

Решение

По признаку Даламбера для модулей: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|$. Тогда при $|x|<1$ – ряд сходится, при $|x|>1$ – расходится. Радиус сходимости $R=1$. При $x=\pm 1$ – ряд расходится.

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

1. Если степенной ряд $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ имеет интервал сходимости $(-R,R)$, то ряд $\varphi(x)=a_1+2a_2x+...+a_nx^{n-1}+...$, полученный почленным дифференцированием исходного ряда, имеет тот же интервал сходимости $(-R,R)$ и $\varphi(x)=S'(x)$ при $|x|<R$, т.е. внутри интервала сходимости производная от суммы ряда равна сумме производных от членов ряда.

Замечание. Полученный ряд снова можно почленно дифференцировать.

2. Пусть дан ряд $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$. Тогда $\int\limits_\alpha^x S(t)dt=\int\limits_\alpha^x a_0dt+\int\limits_\alpha^x a_1tdt+...+\int\limits_\alpha^x a_nt^ndt+...$, если α и x принадлежат интервалу сходимости $(-R,R)$. Т.е. если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда

В качестве *примера* рассмотрим ряд $1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n\cdot x^{2n}+...$. Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q=-x^2$. Если $|x|<1$, то ряд сходится и имеет сумму $\frac{1}{1-x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n\cdot x^{2n}+...$. Почленно интегрируя, получим: $\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}=arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...$. Поскольку ряд в правой части сходится при $x=1$, то $arctg1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$.

Ряды Тейлора и Маклорена

Имеется *формула Тейлора* для функции $f(x)$, имеющий производные до $(n+1)$ включительно, в окрестности точки $x=a$: $f(x)=f(a)+\dfrac{x-a}{1}f'(a)+\dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x)$, где остаточный член $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]$, $0<\theta<1$.

Если $f(x)$ имеет производные *всех* порядков в окрестности точки $x=a$, то в формуле Тейлора число n можно брать сколь угодно большим. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, тогда, переходя в формуле Тейлора к пределу при $n\to\infty$, получим справа бесконечный *ряд Тейлора:* $f(x)=f(a)+\dfrac{x-a}{1}f'(a)+...+\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+...$. Если в формуле ряда Тейлора положить $a=0$, то получим *ряд Маклорена*: $f(x)=f(0)+\dfrac{x}{1}f'(0)+...+\dfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+...$.

Для каждой элементарной функции существуют a и R, такие, что в интервале $(a-R;a+R)$ она разлагается в ряд Тейлора (или Маклорена).

Пример 26. Разложить в ряд Маклорена функции. $f(x)=\sin x$.

Решение

$f(0)=\sin 0=0$. Найдем производные и вычислим их значение при *x*=0: $f'(0)=1$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f''(0)=0$, $f'''(x)=-\cos x$, $f'''(0)=-1$ и т.д. Тогда получаем формулу:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...\ (x\in R).$$

Приведём ещё несколько основных разложений:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,\ x\in R.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\cdot(-1)^{n+1}+...(x\in R)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...,\ (|x|<1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ (-1<x\le 1)\ .$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\ (-1\le x\le 1)\ ,$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\quad (|x|<1).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 11. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

Решение

Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда данный ряд запишется: $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$. Частичная сумма n первых членов: $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, тогда $S=\lim S_n=1-$ ряд сходится и его сумма равна: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Задача 12. Исследовать на сходимость ряд $\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{3^2}+\ldots+\frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{4}\right)}{3^n}+\ldots$.

Решение

Рассмотрим ряд $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$. это убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем 1/3, которая сходится. Поскольку $|\cos x|\le 1$, то члены этого ряда не меньше членов исследуемого ряда, поэтому сходится и заданный ряд.

Задача 13. Найти область сходимости степенного ряда $\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n}+\ldots$.

Решение

Используем признак Даламбера для модулей: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|\cdot|2x|=|2x|$. При $|2x|<1$ ряд сходится, т.е. при

$|x| < \frac{1}{2}$, при $|x| > \frac{1}{2}$ – расходится, $R = \frac{1}{2}$, при $x = \frac{1}{2}$ полученный знакочередующийся ряд, который сходится, при $x = -\frac{1}{2}$ – ряд расходится. Область сходимости: $x \in (-0,5; 0,5]$.

Задача 14. Найти сумму ряда $2x + \frac{3}{1!}x^2 + \frac{4}{2!}x^3 + \frac{5}{3!}x^4 + ... = S(x)$.

Решение

Умножим обе части на x и проинтегрируем от 0 до x:

$$\int_0^x x \cdot S(x)dx = \int_0^x (2 + \frac{3}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + ...)dx = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + ... =$$

$$= x^2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) = x^2 \cdot e^x.$$

Дифференцируя, находим $x \cdot S(x) = \left(x^2 \cdot e^x\right)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$, или $S(x) = (2 + x) \cdot e^x$.

Задача 15. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^x$.

Решение

Найдем производные и вычислим их значения при $x = 0$: $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$, $f'(0) = f''(0) = ... = 1$, поэтому получаем разложение : $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,\ x \in R.$

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение числового ряда.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Сформулировать признаки сравнения числовых рядов.
4. Сформулировать признак Даламбера.
5. Сформулировать признак Коши.
6. Сформулировать интегральный признак Коши.
7. Дать определение знакочередующегося ряда.
8. Дать определение знакопеременного ряда.
9. Сформулировать признак Лейбница.
10. Что такое абсолютная и условная сходимость числового ряда?
11. Дать определение степенного ряда.
12. Сформулировать теорему Абеля.
13. Сформулировать свойства степенных рядов.
14. Что такое ряды Тейлора и Маклорена?

7. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Понятие события. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики

Событие называется случайным, если при осуществлении испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Классическое определение вероятности случайного события связано с испытанием, организованным следующим образом:

1. Испытание содержит конечное число исходов.
2. Все исходы испытания равновозможны и несовместимы.

Вероятностью события A называется число $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где n – общее число случаев и m – число случаев, благоприятствующих событию A. При небольших n все случаи могут быть перечислены непосредственно и среди них несложно указать те, которые благоприятствуют событию A. В большинстве же задач используют правила и формулы комбинаторики.

Пусть дано множество из n различных элементов. Подмножества, содержащие m элементов этого множества $(0\le m\le n)$, могут различаться или хотя бы одним элементом, или порядком следования элементов, или и тем и другим. По этим признакам определяются виды подмножеств: размещения, перестановки, сочетания.

Размещениями из n элементов по m называют упорядоченные под множества n - элементного множества, состоящие на m элементов, которые различаются как самими элементами (хотя бы одним элементом), так и порядком этих элементов.

Число всех размещений A_n^m из n элементов по m определяется по формуле $A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Размещения из n элементов по n называют *перестановками* из n элементов. Очевидно, что различные перестановки отличаются между собой только порядком элементов. Число перестановок равно $P_n = n!$. (Заметим, что $0!=1$).

Если из всех размещений из n элементов по m отобрать только те, которые отличаются хотя бы одним элементом (порядок неважен), то получается подмножества, называемые *сочетаниями*. Число C_n^m

сочетаний из n элементов по m вычисляется по формулам $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Размещениями с повторениями называют упорядоченные последовательности, составленные из n элементов по m в каждом, где некоторые элементы (или все) могут быть одинаковы. Число $\hat{A}_n^m$ размещений с повторениями равно $\hat{A}_n^m = n^m$.

Если опыт состоит в выборе с возвращением m элементов множества, содержащего n элементов, но без последующего упорядочения, то различными исходами такого опыта будут всевозможные m - элементные наборы, отличающиеся составом. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Получающиеся в результате данного опыта комбинации называют *сочетаниями с повторениями*. Число их равно: $\hat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

При решении комбинаторных задач используют следующие правила.

Правило сумм. Если некоторый объект *A* может быть выбран из совокупности соответствующих объектов m способами, а другой объект *B* может быть выбран n способами, то выбрать либо *A*, либо *B* можно $n+m$ способами.

Правило произведений. Если объект *A* может быть выбран из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать n способами, то пара объектов (*A, B*) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 27. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что в полученной выборке окажется хотя бы один король.

Решение

Используем классическое определение вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$,

где n – общее число исходов;

m – число исходов, благоприятных появлению события *A*.

Введём обозначения: пусть событие *A* состоит в том, что в выборке из 4 карт из колоды в 52 карты окажется хотя бы один король; противоположное событие $\bar{A}$ – состоит в том, что в выборке из 4 карт не будет ни одного короля.

n – число всех исходов; равно числу способов выбрать 4 карты из 52 карт, т.е. числу сочетаний из 52 по 4:

$$n = C_{52}^{4} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 270725.$$

Определяем вероятность противоположного события, т.е. $\bar{A}$.

m – число благоприятных исходов равно числу способов выбрать 4 карты из 48 карт, которые не содержат королей, т.е. числу сочетаний из 48 по 4:

$$m = C_{48}^{4} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 194580.$$

Тогда $P(\bar{A}) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{194580}{270725} = 0,7187.$

Находим вероятность искомого события $P(A)$ по формуле:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,7187 = 0,2813.$$

Основные теоремы теории вероятностей

Теоремы умножения

Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие C, состоящее в осуществлении и события A, и события B, т.е. $C = A \cdot B$.

Вероятность события A, найденная в предположении, что событие B наступило, называется условной вероятностью события A относительно события B: $P_B(A)$.

Теорема 1. Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого относительно первого: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$

События A и B называются независимыми, если вероятность одного из них не изменяется при наступлении другого, т.е. $P_A(B) = P(B)$. Иначе – зависимые события.

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(A) \cdot P(B)$.

Теоремы сложения

Суммой или объединением событий A и B называется событие C, состоящее в наступлении события A, или события B или событий A и B вместе: $C = A + B.$

События A и B называются несовместными, если их совместное наступление неосуществимо.

Теорема 1. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Теорема 2. Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Два события $\overline{A}$ и A называются противоположными, если одно из них обязательно должно произойти, причем наступление одного исключает возможность появления другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, если события A_i и A_j при $i \neq j$ несовместны и хотя бы одно из событий $A_1, A_2, ..., A_n$ непременно должно произойти. Иначе – события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, если они попарно несовместные и в результате испытания обязательно наступит одно и только одно событие.

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т.е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 28. Два стрелка стреляют по мишени, вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,7, второго стрелка – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень:

а) попадёт один стрелок,

б) оба стрелка попали;

в) оба стрелка не попали;

г) хотя-бы один попал.

Решение

Событие A – попал первый стрелок, событие B – попал второй. События A и B независимые.

а. $P(A)=0,7;\ P(\overline{A})=1-0,7=0,3;\ P(B)=0,8;\ P(\overline{B})=1-0,8=0,2.$

$P(C)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)=0,7\cdot 0,2+0,8\cdot 0,3=0,14+0,24=0,38.$

б. $P(D)=P(A)\cdot P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56.$

в. $P(D_1)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0,3\cdot 0,2=0,06.$

г. $P(D_2)=0,38+0,56=0,94$ или $P(D_2)=1-0,06=0,94.$

Формула полной вероятности и формула Байеса (Бейеса)

Пусть событие A может произойти в результате появления одного и только одного события $H_i (i = 1, 2, ..., n)$ из некоторой полной группы несовместных событий. События H_i обычно называют гипотезами.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить при появлении одной из гипотез H_i, равна сумме парных произведений вероятностей всех гипотез на соответствующие условные вероятности данного события A, т.е. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$.

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$, вероятности которых $P(H_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ известны до опыта. Производится опыт, в результате которого зарегистрировано событие A. Известно, что этому событию гипотезы приписывали определенные вероятности $P_{H_i}(A)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Какими стали вероятности этих гипотез после опыта? Поскольку событие A произошло, следует отбросить гипотезы, отрицающие появление A. По новой информации надо переоценить вероятности гипотез, т.е. определить $P_A(H_i)$.

По теореме умножения вероятностей: $P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$. Тогда:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Это – формула Байеса (Бейеса), где $P(A)$ – вероятность появления события A.

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Событие A называется независимым в данной системе испытаний, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исходов других испытаний. Тогда считаем, что вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p. Вероятность противоположного события равна $q = 1 - p$.

Определим вероятность $P_n(k)$ $(0 \le k \le n)$ того, что при n независимых испытаниях событие A, имеющее одну и ту же вероятность p для каждого отдельного испытания, появится ровно k раз, безразлично в какой последовательности. Получим формулу Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Пример 29. Вероятность попадания по мишени при одном выстреле равна 0,8, найти вероятность того, что из десяти выстрелов стрелок попадёт:

а) восемь раз;

б) шесть раз;

в) не менее восьми раз.

Решение

Так как вероятность постоянная, воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

а. $n=10;\ k=8;\ q=1-0,8=0,2$,

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 \approx 0,301.$$

б. $n=10;\ k=6;\ q=1-0,8=0,2.$

$$P_{10}(6) = C_{10}^6 \cdot 0,8^6 \cdot 0,2^4 = \frac{10!}{4!\cdot 6!} \cdot 0,8^6 \cdot 0,2^4 \approx 0,088$$

в. не менее восьми раз означает или восемь, или девять, или десять попаданий.

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2 = 0,268;$$

$$P_{10}(10) = 0,8^{10} = 0,107;$$

$$P(A) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = 0,301 + 0,268 + 0,107 = 0,676.$$

Локальная теорема Лапласа

Если число испытаний n велико ($n > 20$), то вычисления по формуле Бернулли громоздкие. Для определения вероятности $P_n(k)$ $(0 \le k \le n)$ того, что при n независимых испытаниях событие A, имеющее одну и ту же вероятность p для каждого отдельного испытания, появится ровно k раз, безразлично в какой последовательности, Лаплас получил приближенную формулу: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Вероятность противоположного события равна $q = 1 - p$.

Функция $\varphi(x)$ табулированная, т.е. имеется таблица значений функции. Очевидно, что $\varphi(x) = \varphi(-x)$ – функция четная.

Интегральная теорема Лапласа.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приблизительно равна: $P(k_1 \le k \le k_2) = P(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, которая табулированная; $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция Лапласа $\Phi(x)$ – нечетная: ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), возрастающая, для $x > 5$ можно считать, что $\Phi(x) = 0{,}5$.

Следствие. Если вероятность p наступления события A – постоянна ($0 < p < 1$), а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях абсолютная величина отклонения относительной частоты события A от его вероятности p не превзойдет данного $\varepsilon > 0$, находится по формуле $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Число k_0 называется наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях k_0 определяется из двойного неравенства: $np - q \le k_0 < np + p$, причем если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0, если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа: k_0 *и* $k_0 + 1$. Если np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример 30. Вероятность прорастания зерна равна 0,8. Определить наивероятнейшее число зёрен, которые прорастут из 400 зёрен, и вероятность этого события.

Решение

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях k_0 определяется по формуле: $k_0 = np$.

$k_0 = np = 400 \cdot 0,8 = 320.$

Так как n велико, используем локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x)$$

Вычислим значение аргумента: $x = \dfrac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{320 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим, что $\varphi(0) = 0,3989$,

тогда: $P_{100}(80) = \dfrac{0,3989}{8} \approx 0,0495.$

Пример 31. Вероятность попадания по мишени при одном выстреле равна 0,8, стрелок производит сто выстрелов. Найти вероятность того, что среди них окажутся:

а) 80 попаданий;

б) 75 попаданий;

в) не менее 70 и не более 85 попаданий.

Решение

Так как n велико, используем локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x)$$

а. $n = 100;\ k = 80;\ p = 0,8;\ q = 1 - 0,8 = 0,2.$

Вычислим значение аргумента функции $\varphi(x)$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим, что $\varphi(0) = 0,3989$,

тогда: $P_{100}(80) = \dfrac{0,3989}{4} \approx 0,099.$

б. $k = 75$; вычислим значение аргумента функции $\varphi(x)$:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-5}{4} = -1,25.$$

Функция $\varphi(x)$ чётная, поэтому $\varphi(-1,25) = \varphi(1,25) = 0,1826$;

тогда $P_{100}(75) = \dfrac{0,1826}{4} \approx 0,045.$

в. Используем интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$k_1 = 70;\ k_2 = 85;\ p = 0,8;\ q = 0,2.$

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5;\ x_2 = \frac{85 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(1{,}25) = 0,3944$;

$\Phi(-2{,}5) = -0,4938,$ (функция $\Phi(x)$ – нечётная), тогда:

$$P_n = (70 \le k \le 85) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = 0,3944 + 0,4938 = 0,8882.$$

Закон распределения дискретной случайной величины

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать те или иные значения, причем для каждого испытания она принимает единственное значение.

Случайные величины обозначают заглавными буквами X, Y, Z,…, значения случайных величин соответственно малыми буквами с индексами (x_1, x_2, x_3,…).

Случайная величина называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетное. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного (или бесконечного) промежутка.

Пусть X – дискретная случайная величина, возможными и единственными значениями которой являются x_1, x_2, x_3,…, x_n. Обозначим через $p_i = P(X = x_i)\ (i = 1, 2, ..., n)$ вероятности этих значений, т.е. p_i есть вероятность того, что X принимает значения x_i. События $X = x_i$ образует полную группу, поэтому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины – соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями. Обычно его записывают в виде таблицы:

Значение (X)	x_1	x_2	…	x_n
Вероятность значения (p)	p_1	p_2	…	p_n

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако иногда удобнее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно – это числовые характеристики случайных величин. Рассмотрим математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Пусть дискретная случайная величина принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$, тогда математическое ожидание $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

$M(X)$ – неслучайная (постоянная) величина.

Математическое ожидание приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства M(X)

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, т.е. $M(C) = C$, $C = const$.

2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ – константу можно выносить за знак математического ожидания.

3. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, где X, Y – независимые дискретные случайные величины.

4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

5. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании p, то есть $M(X) = np$.

Дисперсия случайной дискретной величины. Среднее квадратичное отклонение

Математическое ожидание не полностью характеризует случайную величину. Необходимо охарактеризовать отклонение случайной величины от $M(X)$ – это величина: $X – M(X)$.

Теорема. Математическое ожидание отклонения равно нулю.

Дисперсией (рассеянием) дискретных случайных величин называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$.

Получаем:

$$D(X)=\left[x_1-M(X)\right]^2\cdot p_1+\left[x_2-M(X)\right]^2\cdot p_2+...+\left[x_n-M(X)\right]^2\cdot p_n.$$

Удобнее использовать формулу: $D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равной нулю: $D(C) = 0$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2\cdot D(X)$.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
4. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.
5. Дисперсия числа появлений событий A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A p постоянна, равна: $D(X)=n\cdot p\cdot q,\ q=1-p.$

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X – это корень квадратный из дисперсии: $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}$.

Размерность дисперсии равна квадрату размерности X, тогда как размерность $\sigma(X)$ равна размерности X. Во многих случаях это оказывается более удобным.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k: $\nu_k=M(X^k)$. Например, $\nu_1=M(X),\ \nu_2=M(X^2),\ \nu_3=M(X^3),\ D(X)=\nu_2-\nu_1^2$.

Центральным моментом порядка k называется математическое ожидание величины $\left[X-M(X)\right]^k:\ \mu_k=M[(X-M(X))^k]$, например, $\mu_1=M\left[X-M(X)\right]=0$, $\mu_2=D(X)$ и т.д.

Модой M_0 случайной величины называется ее наиболее вероятное значение (для дискретных величин) или то значение, для которого плотность вероятности максимальна. Если имеется более одного максимума, то распределение называют полимодальным.

Медианой M_e называют такое значение случайной величины (обычно – непрерывной), для которого $P(X<M_e)=P(X>M_e)$.

Пример 32. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4

p_i	0,0004	0,0104	0,0964	0,3744	0,5184

Вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение

Математическое ожидание находим по формуле:

$M(x)=\sum x_i p_i$, получим:

$$M(x)=0\cdot 0{,}0004+1\cdot 0{,}0104+2\cdot 0{,}0964+3\cdot 0{,}3744+$$
$$+4\cdot 0{,}5184=3{,}4.$$

Дисперсию находим по формуле: $D(x)=M(x^2)-\left[M(x)\right]^2$.

Математическое ожидание $M(x^2)$ находим по формуле:

$M(x^2)=\sum x_i^2\cdot p_i$.

$$M(x^2)=0^2\cdot 0{,}0004+1^2\cdot 0{,}0104+2^2\cdot 0{,}0964+3^2\cdot 0{,}3744+$$
$$+4^2\cdot 0{,}5184=12{,}06.$$

Тогда $D(x)=12{,}06-(3{,}4)^2=0{,}5$.

Функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины

Дискретная случайная величина может быть задана перечислением всех ее возможных значений и их вероятностей – законом распределения. Но его нельзя использовать для задания непрерывных случайных величин. Необходим общий способ задания случайных величин – это функция распределения вероятностей случайных величин.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньше x, т.е. $F(x)=P(X<x)$.

Свойства F(x)

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1], т.е. $0\le F(x)\le 1$, т.к. $F(x)$ – вероятность, $0\le P(A)\le 1$.

2. $F(x)$ неубывающая функция, т.е. $F(x_2)\ge F(x_1)$, если $x_2>x_1$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина удовлетворяет неравенству $a\le X\le b$ равна приращению $F(x)$ на этом интервале: $P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$.

Следствие 2. Вероятность того, что случайная величина X примет одно определенное значение, равна 0.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат промежутку (a, b), то:

1) $F(x) = 0$ при $x \le a$;

2) $F(x) = 1$ при $x > b$.

Непрерывную случайную величину можно задать функцией распределения, однако можно использовать и плотность распределения.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a,b), равно $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Функцию распределения можно найти по плотности распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. По известной функции распределения можно найти плотность: $f(x) = F'(x)$.

Свойства f(x):

1. $f(x) \ge 0$, т.к. $F(x)$ – неубывающая функция, поэтому $f(x) = F'(x) \ge 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Этот интеграл выражает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина примет значение $\in (-\infty;\infty)$ – это достоверное событие.

Если возможные значения случайной величины $\in$ промежутку (a,b), то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Пример 33. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ ax^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

Требуется найти: *а*) значение параметра a; *б*) функцию распределения $F(x)$; *в*) математическое ожидание и дисперсию X; *г*) вероятность того, что X примет значение, заключённое в интервале (–1; 1/3).

Решение

а. Воспользуемся свойством плотности распределения вероятности:

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Получаем:

$$\int_0^1 ax^2 dx = 1;\ \ a\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1;\ \frac{a}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = 1;\ \frac{a}{3} = 1,\ a = 3.$$

Тогда плотность распределения вероятностей будет:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 3x^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

б. Функцию распределения находим по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Если $x \le 0$, то $f(x) = 0$, следовательно $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt = 0$.

Если $0 < x \le 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_0^x 3t^2\cdot dt = 3\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^x = x^3.$$

Если $x > 1$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_0^1 3t^2 dt + \int_1^x 0\cdot dt = 0 + 3\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 + 0 = 1^3 + 0^3 = 1.$$

Итак, искомая функция распределения будет иметь вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x^3 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

в. Математическое ожидание находим по формуле

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Получаем: $M(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$

Дисперсию находим по формуле:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Получаем:

$$\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx-(0{,}75)^2=3\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-0{,}5625=0{,}0375=D(X).$$

г. Воспользуемся формулой: $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$.

Тогда $P\left(-1<x<\frac{1}{3}\right)=F\left(\frac{1}{3}\right)-F(-1)$.

Находим: $F\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$; $F(-1)=0$.

Получаем: $P\left(-1<x<\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-0=\frac{1}{27}$.

Пример 34. Задана плотность распределения вероятностей случайной величины *X*: $f(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x\le\pi/6,\\ c\sin 3x \text{ } при \text{ } \pi/6<x\le\pi/3,\\ 0 \text{ } при \text{ } x>\pi/3.\end{cases}$

Найти: значение параметра *c*, функцию распределения *F*(*x*), математическое ожидание.

Решение

1. Используем свойство $f(x)$: $\int_a^b f(x)dx=1$.

$$c\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x dx=1;\ c\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right)=1;$$

$$c\left(-\frac{1}{3}\cos 3\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\cos 3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=1;c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 0\right)=1;\ \frac{c}{3}=1;\ c=3.$$

Итак, $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 3\cdot\sin 3x \text{ } при \text{ } \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 0 \text{ } при \text{ } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Функция распределения: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Если $x \le \dfrac{\pi}{6}$, то $f(x)$ =0 и $F(x)=0$. Пусть $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}$, тогда

$$F(x)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3t dt = -3\cdot\frac{1}{3}\cos 3t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x} = -\cos 3x + \cos\frac{\pi}{2} = -\cos 3x.$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x \text{ при } \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}, \\ 1 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

$$M(X)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\cdot 3\sin 3x dx = \begin{bmatrix} x=u & du=dx \\ 3\sin 3x dx = dv & v=-\cos 3x \end{bmatrix} =$$

$$= -x\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\cos 3\text{x}\, dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sin 3x}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi - 1}{3}.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Распространим определение числовых характеристик дискретных случайных величин на величины непрерывные.

Математическое ожидание: $M(X)=\int\limits_{a}^{b} x\cdot f(x)dx$.

Если возможные значения случайной величины принадлежат R, то $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, предполагаем, что этот интеграл сходится.

Дисперсия непрерывной случайной величины: $D(x)=\int\limits_a^b\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx,\ D(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx$ если $X\in(-\infty;\infty)$.

Часто используется формула: $D(x)=\int\limits_a^b x^2\cdot f(x)dx-\left[M(X)\right]^2$.

Аналогично: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины. Свойства $M(X)$ и $D(X)$ сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Пример 35. Задана плотность распределения вероятностей случайной величины X: $f\left(x\right)=\begin{cases} a\cdot x,\ если\ \ x\in(0,5),\\ 0,\ \ если\ \ x\notin(0,5).\end{cases}$

Найти: значение параметра a, математическое ожидание и дисперсию X.

Решение

Воспользуемся свойством плотности распределения вероятностей:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=1.$$

$$\int\limits_0^5 axdx=a\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5=\frac{25a}{2}=1,\ a=\frac{2}{25}.$$

Плотность распределения вероятности будет:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{25}x, если\, x\in(0;5),\\ 0,\ если\, x\notin(0;5).\end{cases}$$

Математическое ожидание находим по формуле:

$$M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx.$$

$$M(X)=\int\limits_0^5 x\cdot\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int\limits_0^5 x^2dx=\frac{2}{25}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5=\frac{2}{25}\cdot\frac{5^3}{3}=\frac{10}{3}.$$

Дисперсию находим по формуле:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2.$$

$$M(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_0^5 x^2\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^3dx=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^5=$$

$$=\frac{1}{50}(5^4-0^4)=\frac{25}{2}.$$

Тогда: $D(X)=\frac{25}{2}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{25}{2}-\frac{100}{9}=\frac{225-200}{18}=\frac{25}{18}.$

Закон равномерного распределения

При решении практических задач приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Плотности распределения непрерывных случайных величин называют также законами распределения. Часто встречаются законы равномерного, нормального и показательного распределений.

Рассмотрим *равномерное распределение*. Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения постоянная.

Пример. Шкала измерительного прибора. Ошибка при округлении отсчета – случайная величина X, которая можно принимать с одинаковой вероятностью любое значение между двумя соседними целыми значениями, т.е. X имеет равномерное распределение.

Найдем $f(x)$ считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a, b). X принимает все значения, принадлежащие интервалу (a, b), поэтому $f(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$. Тогда

плотность распределения: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$

Функция распределения: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$

Нормальное распределение

Нормальным распределением называется распределение вероятностей непрерывных случайных величин, которые описываются плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Нормальное распределение определяется параметрами a и σ, причем $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$, где *M(X)* – математическое ожидание, *D(X)* – дисперсия.

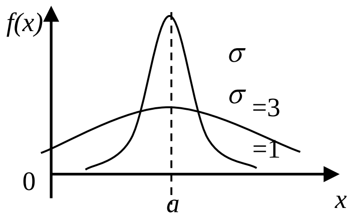


График плотности нормального распределения представлен выше.

Вероятность попадания в заданный интервал

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$ где $\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа (табулирована).

Вероятность заданного отклонения

Часто требуется найти вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от математического ожидания по модулю меньше данного $\Delta > 0$:

$$P\left(|x - a| < \Delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Если $a = 0$, то $P\left(|x| < \Delta\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\Delta}{\sigma}\right)$.

Пример 36. Известно, что вес некоторых плодов, выращиваемых в совхозе, подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 200 г и средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого плода будет не менее 220 г.

Решение

Требуется найти вероятность: $P(x \geq 220)$. Для нормально распределенной случайной величины имеется формула:

$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right]$, $\sigma -$ среднее квадратическое отклонение, где a – математическое ожидание.

По условию: $a = 200\,г$, $\sigma = 20\,г$, $x \geq 220$ или $220 \leq x \leq \infty$, тогда, $\alpha = 250$, $\beta = \infty$ получаем

$$P(x \geq 220) = P(220 \leq x < \infty) = \left[\Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{220 - 200}{20}\right)\right] =$$
$$= \left[\Phi(\infty) - \Phi(1)\right] = (0,5 - 0,3413) = 0,1587.$$

Показательное распределение

Показательным распределением называют распределение вероятностей случайных величин *X*, которое описывается плотностью

$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \end{cases}$, где $\lambda > 0$ – const.

Показательное распределение описывается одним параметром λ, в этом его преимущество.

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & ,x \geq 0. \end{cases}$.

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины *X*, распределенной по показательному закону: $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ (значение e^{-x} можно определить по таблице).

Математическое ожидание: $M(X) = 1/\lambda$, дисперсия: $D(X) = 1/\lambda^2$, среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1/\lambda$.

$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda$, что позволяет определить, является ли закон распределения показательным.

Закон больших чисел. Лемма Маркова

Одной из задач теории вероятностей является установление закономерностей, происходящих с вероятностями, близкими к единице.

Всякое предположение, устанавливающее эти закономерности, называется законом больших чисел. Законом больших чисел следует назвать общий принцип, в силу которого совокупное действие большого числа факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая.

Иначе, при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным. Соответствующие условия указываются в теоремах Чебышева и Бернулли.

Лемма Маркова (лемма Чебышева)

Если среди значений случайной величин X нет отрицательных, то вероятность того, что она примет значение, превосходящее число $A>0$, не больше, чем $M(X)/A$.

$P(x>A)\le M(X)/A$, или $P(x\le A)\ge 1-M(X)/A$.

Пример 37. Среднее количество вызовов наладчика станков, поступающих в течение часа в диспетчерскую, равно 21. Оценить вероятность того, что в течение часа поступит:

а) не более 35 вызовов;

б) больше 60.

Решение

Случайная величина X – количество поступающих вызовов.

По условию $M(X)=21$.

а) По неравенству Маркова вида:

$P(X\le A)\ge 1-\dfrac{M(X)}{A}$, при $A=35$ находим оценку вероятности:

$P(X\le 35)\ge 1-\dfrac{21}{35}=0,4$, т.е. вероятность не менее 0,4.

б) По неравенству Маркова вида

$P(X>A)\le\dfrac{M(X)}{A}$, при $A=60$ находим оценку вероятности:

$P(X>60)\le\dfrac{21}{60}=0,35$, т.е. вероятность такого события не более 0,35.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по модулю меньше числа $\varepsilon>0$, не меньше, чем $1-\dfrac{D(x)}{\varepsilon^2}$, т.е.

$$P\left(\left|X-M(x)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

Иначе: $P\left(\left|X-M(x)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{D(x)}{\varepsilon^2}$. Неравенство для частости: $P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\geq1-\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$, $\left(D=\dfrac{pq}{n},\ M=p\right)$.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа *C*), то, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, вероятность неравенства $\left|\dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\dfrac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$ будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\dfrac{\sum X_i}{n}-\dfrac{\sum M(X_i)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$

Теорема Бернулли. Пусть в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события *A* постоянна. Тогда как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

Или $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|m/n-p\right|<\varepsilon\right)=1$, где m/n – частота появления события *A*.

Пример 38. Электрическая подстанция обслуживает сеть с 10000 ламп, вероятность включения каждой на которых вечером равна 0,6. Оценить и найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет от 5900 до 6100 включительно.

Решение

Случайная величина *X* – число одновременно включенных ламп. При этом вероятность включения каждой из ламп есть величина постоянная и равна $p=0,6$. Случайная величина имеет биноминальное распределение, поэтому её числовые характеристики определяются так:

$M(X)=np=10000\cdot0,6=6000;$

$D(X)=npq=6000\cdot0,4=2400.$

Воспользуемся неравенством Чебышева в виде:

$P\left(\left|X-a\right|\leq\varepsilon\right)\geq1-\dfrac{D(x)}{\varepsilon^2}.$

Преобразуем неравенство:

$5900 \le X \le 6100;\ 5900-6000 \le X-6000 \le 6100-6000;$

$-100 \le X-6000 \le 100; |X-6000| \le 100,$ значит $\varepsilon = 100.$

Получаем:

$P\left(|X-6000| \le 100\right) \ge 1-\dfrac{2400}{100^2} = 0,76,$ т.е. вероятность не менее 0,76.

Вычислим вероятность по интегральной теореме Лапласа:

$P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$ где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$ Находим:

$$x_1 = \frac{5900-10000\cdot 0,6}{\sqrt{10000\cdot 0,6\cdot 0,4}} = -2,04;\ x_2 = \frac{6100-10000\cdot 0,6}{\sqrt{10000\cdot 0,6\cdot 0,4}} = 2,04\ .$$

Получаем по таблице значений функции Лапласа:

$P(5900 \le k \le 6100) = \Phi(2,04) - \Phi(-2,04) = 2\cdot 0,4793 = 0,9586.$

Элементы математической статистики
Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд

Рассмотрим *пример*. Токарь изготавливал в течение 10 дней следующее количество деталей: 5,6,5,7,7,7,8,5,6,5.

Упорядочим эти данные.

Ранжируем эту выборку и разобьем на группы:

5,5,5,5 6,6 7,7,7 8

4 раза 2 раза 3 раза 1 раз.

При ранжировании группы располагаются в порядке возрастания. Значение каждой группы называется вариантой. Число повторений в каждой группе называется частотой варианты. Полученную таблицу называют вариационным рядом.

x_i	5	6	7	8
n_i	4	2	3	1

В общем виде:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

$\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ – объем выборки.

Графическое изображение вариационного ряда – полигон.

Для непрерывного признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны $\frac{W_i}{h}$, где W_i – относительная частота.

Пример 39. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию вариационного ряда

x_i	220	227	234	241	248	255	262
n_i	2	6	20	38	23	8	3

Решение

Объем выборки: n = 2+6+20+38+23+8+3=100.

Выбираем условную варианту(новую) по формуле $u_i = \frac{x_i - 241}{7}$.

Здесь: 241 – середина интервала, 7 – шаг (h=227–220=7).

Получили распределение условных вариант:

u_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
n_i	2	6	20	38	23	8	3

Находим выборочную среднюю для варианты u и затем для x:

$$\bar{u} = \frac{-3\cdot 2 - 2\cdot 6 - 1\cdot 20 + 0 + 1\cdot 23 + 2\cdot 8 + 3\cdot 3}{100} = 0{,}1$$

$$\bar{x} = 7\bar{u} + 241 = 241{,}7.$$

Находим выборочную дисперсию для варианты u и затем для x:

$$S_u^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = \frac{(-3)^2\cdot 2 + (-2)^2\cdot 6 + (-1)^2\cdot 20 + 0 + 1^2\cdot 23 + 2^2\cdot 8 + 3^3\cdot 3}{100} = 1{,}44$$

$$S_x^2 = 7^2\cdot S_u^2 = 49\cdot 1{,}44 = 70{,}56.$$

Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки

Вариационный ряд характеризует случайную величину, но не в полной мере, поэтому используются характеристики, аналогичные теоретическим – $M(X)$, $D(X)$ и т.д. Эти числовые характеристики вычисляются на основании выборки и называются точечными оценками.

Точечной оценкой характеристики θ называется некоторая функция $\theta*$ результатов наблюдений, значение которой принимают за приближение этой характеристики: $\theta \approx \theta^*$. Качество точечной оценки определяется характеристиками:

1. Точечная оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оценивающему параметру: $M(\theta^*) = \theta$, т.е. совпадает с истинным значением.

2. Точечная оценка называется состоятельной, если она при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

3. Точечная оценка считается эффективной, если она имеет (при заданном n) наименьшую дисперсию.

Основные точечные оценки

1. Выборочная средняя: $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$.

Выборочная средняя $\overline{x}$ приближается к $M(X)$, является несмещенной, состоятельной и эффективной.

2. Выборочная дисперсия: $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_i n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

S^2 является состоятельной, но смещенной, поэтому часто используют несмещенную оценку – «исправленную» выборочную дисперсию: $\hat{S}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_i n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

Начальные и центральные моменты k- го порядка.

Начальный момент k-го порядка: $\nu_k^* = \left[M(X^k)\right] = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i^k$. Центральный момент k-го порядка: $\mu_k^* = [M(X - M(X))^k] = \dfrac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^k$.

Интервальные оценки, доверительная вероятность. Доверительные интервалы для генеральной средней, генеральной дисперсии

При выборке малого объема точечная оценка может сильно отличаться от оцениваемого параметра, поэтому широко используют интервальные оценки. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Доверительной вероятностью (надежностью) называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$, т.е. $P = \left(|\theta - \theta^*| < \delta\right) = \gamma$, где

θ^* – найденная характеристика параметра θ. Надежность γ обычно выбирается равной 0,95; 0,99; 0,999 и т.д.

Доверительные интервалы для генеральной средней с известным σ

Пусть известно среднее квадратическое отклонение σ генеральной совокупности с нормальным законом распределения. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание *a* по выборочной средней $\bar{x}$. Получаем: $\bar{x}-\delta \le a \le \bar{x}+\delta$, или $\bar{x}-\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x}+\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ – интервальная оценка для математического ожидания *a*, $\delta=\dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ – точность оценки.

Число t определяем по таблице значений функции Лапласа: $\Phi(t)=\gamma/2$.

Доверительные интервалы для генеральной средней с неизвестным σ

Пусть признак *X* генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание *a* по выборочной средней $\bar{x}$. Для построения интервальной оценки используется статистика $t=\dfrac{\bar{x}-a}{S/\sqrt{n}}$, имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k=n-1$. Получаем: $\bar{x}-\dfrac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}-\dfrac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}$, где n – объем выборки, S – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, $\bar{x}$ – выборочная средняя, $\alpha=1-\gamma$ – уровень значимости, $t_\gamma(\alpha,k)$ находим по распределению Стьюдента (*t* – распределение) для двухсторонней критической области. Точность оценки: $\delta=\dfrac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}$.

Пример 40. По n = 8 измерениям диаметров деталей найдены выборочная средняя $\bar{x}=28{,}3$ мм и «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение $S=20$ мм. Найти с надежностью $\gamma=0{,}99$ точность Δ, с которой выборочная средняя $\bar{x}$ оценивает генеральную среднюю.

Решение

Доверительный интервал определяется равенством:

$$\bar{x}-\frac{t_\gamma\cdot\hat{S}}{\sqrt{n}}\le a\le\bar{x}+\frac{t_\gamma\cdot\hat{S}}{\sqrt{n}}.$$

Точность δ, с которой выборочная средняя $\bar{x}$ оценивает генеральную среднюю, будем искать по формуле: $\delta=\dfrac{t_\gamma\cdot\hat{S}}{\sqrt{n}}$.

t_γ находим по таблице распределения Стьюдента на уровне значимости $\alpha=1-\gamma=1-0,99=0,01$ и для числа степеней свободы $k=n-1=8-1=7$ из таблицы находим $t_\gamma=2,90$, тогда $\Delta=\dfrac{t_\gamma\cdot\hat{S}}{\sqrt{n}}=\dfrac{2,90\cdot 22,9}{\sqrt{8}}\approx 23,47$ мм.

Доверительные интервалы для генеральной дисперсии

Пусть из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону $N(a,\sigma)$, взята выборка объема n и вычислена «исправленная» выборочная дисперсия S^2. Требуется определить с надежностью γ интервальные оценки для σ^2 и σ.

Случайная величина $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ имеет *распределение Пирсона* (χ^2) с $k=n-1$ степенями свободы. Имеем: $P\left(\chi_1^2\le\dfrac{nS^2}{\sigma^2}\le\chi_2^2\right)=1-\alpha,\ (1-\alpha=\gamma)$.

По таблице χ^2 – распределения нужно выбрать такие χ_1^2 и χ_2^2, чтобы площадь, заключенная под графиком плотности распределения между χ_1^2 и χ_2^2, была равна $\gamma=1-\alpha$. Обычно полагают: $P(\chi^2<\chi_1^2)=P(\chi^2>\chi_2^2)=\dfrac{\alpha}{2}$.

$P(\chi_1^2\le\dfrac{nS^2}{\sigma^2}\le\chi_2^2)=P(\chi^2>\chi_1^2)-P(\chi^2>\chi_2^2)=\gamma$, т.е. $\gamma=P(\chi_1^2)-P(\chi_2^2)$.

Эта формула используется при решении обратной задачи – нахождение доверительной вероятности по заданному доверительному интервалу генеральной дисперсии. χ_1^2 и χ_2^2 находим из равенств:

$P(\chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}; P(\chi_2^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \dfrac{\alpha}{2}$. Тогда получаем: $\dfrac{nS^2}{\chi_2^2} \le \sigma^2 \le \dfrac{nS^2}{\chi_1^2}$.

Если $n \le 30$, то доверительный интервал для σ: $\dfrac{\sqrt{n}S}{\chi_2} \le \sigma \le \dfrac{\sqrt{n}S}{\chi_1}$.

Если $n > 30$, то $\dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}+t_\gamma} \cdot S \le \sigma \le \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n-3}-t_\gamma} \cdot S$, где t_γ определяется по таблице функции Лапласа: $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$.

Можно использовать упрощенную формулу: $\hat{S}(1-q) < \sigma < \hat{S}(1+q)$, где параметр q находят по заданным n и γ по таблице (например, [2], приложение 4).

Пример 41. В таблице приведены данные о времени, затраченном на выполнение технологической операции 12 рабочими цеха:

Время выполнения операции x_i (с)	40	42	43	45	47
Число рабочих m_i	1	2	3	4	2

Определить доверительные интервалы для оценок неизвестных параметров a и σ^2 нормальной генеральной совокупности с надежностью 0,98.

Решение

Вначале находим выборочную среднюю $\bar{x}$ и «исправленную» выборочную дисперсию S^2 по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \quad S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum m_i - 1}.$$

Составим расчётную таблицу:

x_i	m_i	$x_i m_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 m_i$
40	1	40	15,21	15,21
42	2	84	3,61	7,22
43	3	129	0,81	2,43
45	4	180	1,21	4,84
47	2	94	9,61	19,22
$\sum$	12	527	–	48,92

$\bar{x} = 527/12 = 43{,}9(c)$; $S^2 = 48{,}92/(12-1) = 4{,}44$; $S = \sqrt{4{,}44} = 2{,}11(c)$.

Поскольку параметры a и σ^2 нам неизвестны, то доверительный интервал будем искать по формуле:

$$\bar{x} - t_\gamma \cdot \hat{S} / \sqrt{n} \le a \le \bar{x} + t_\gamma \cdot \hat{S} / \sqrt{n}.$$

$n = 12;\ \bar{x} = 43,9(c);\ S = 2,11(c);\ \gamma = 0,98,$ тогда $\alpha = 1 - \gamma = 0,02$.

Из таблицы t – распределения (Стьюдента) для числа свободы $k = n - 1 = 12 - 1 = 11,$ и $\alpha = 0,02$ найдём $t_\gamma = 2,718.$

Тогда точность оценки $\delta = t_\gamma \cdot s / \sqrt{n} = 2,718 \cdot 2,11 / \sqrt{12} = 1,66(c)$.

Отсюда доверительный интервал равен: $43,9 - 1,66 \le a \le 43,9 + 1,66$ и окончательно $42,24 \le a \le 45,56\ (c)$.

Доверительный интервал для генеральной дисперсии определим по формуле: $\dfrac{ns^2}{\chi_2^2} \le \sigma^2 \le \dfrac{ns^2}{\chi_1^2}$.

Т.к. $n < 30$, то используется $\chi^2 -$распределение Пирсона: $n = 12; S^2 = 4,08;\ \alpha = 0,02; P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \alpha / 2 = 1 - 0,02 / 2 = 0,99$

$P(\chi^2 > \chi_2^2) = \alpha / 2 = 0,02 / 2 = 0,01.$

По таблице $\chi^2 -$распределения для числа степеней свободы $k = n - 1 = 12 - 1 = 11$ и найденных вероятностей 0,99 и 0,01 определяем, что $\chi_1^2 = 3,053,\ \chi_2^2 = 24,725$.

Тогда доверительный интервал равен:

$\dfrac{12 \cdot 4,44}{24,725} \le \sigma^2 \le \dfrac{12 \cdot 4,44}{3,053}$ и окончательно $2,15 \le \sigma^2 \le 17,45.$

Понятие о статистической гипотезе. Критическая область. Статистическая проверка статистических гипотез

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу

$H_0 : M(X) = M(Y),\ H_0 : D(X) = D(Y)$ и т.д..

Конкурирующей называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то принимается конкурирующая гипотеза.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, т.е. ее необходимо проверять. В итоге статистической проверки гипотез в двух случаях может быть принято неправильное решение:
– ошибка 1 рода – будет отвергнута правильная гипотеза;
– ошибка 2 рода – будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки статистической гипотезы используют статистический критерий, т.е. правило, устанавливающее условия, при которых проверяемую гипотезу следует либо принять, либо отвергнуть. Основу критерия составляет специальная случайная величина (статистика) K с известным законом распределения. Задаваясь уровнем значимости α, т.е. вероятностью совершить ошибку 1 рода, критерий позволяет разбить все множество значений статистики на 2 непересекающихся подмножества: область принятия гипотезы и критическую область (область отклонения гипотезы).

Основной принцип проверки гипотезы: если значение статистики, рассчитанное для выборки, попадает в критическую область, то гипотезу отвергают, в противном случае – гипотезу принимают.

В зависимости от вида конкурирующей гипотезы H_1 выбирают:

1. Правостороннюю критическую область $K > K_{\text{КР}}$. Критическое значение статистики $K_{\text{КР}}$ вычисляем из условия $P(K > K_{\text{КР}}) = \alpha$.

2. Левостороннюю критическую область: $K < K_{\text{КР}}$, $P(K < K_{\text{КР}}) = \alpha$.

3. Двухстороннюю критическую область: $K < K_{\text{КР.ЛЕВ}}$; $K > K_{\text{КР.ПР.}}$ Обычно считают, что $P(K > K_{\text{КР.ПР}}) = \alpha/2$, $P(K < K_{\text{КР.ЛЕВ}}) = \alpha/2$ и если критические точки симметричны относительно нуля, то $|K| > K_{\text{КР}}$.

Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Этот вопрос возникает, если требуется сравнить точности приборов, методов измерений и т.д.

Пусть X и Y – нормально распределенные генеральные совокупности. По двум выборкам объемами n_1 и n_2 найдены «исправленные» выборочные дисперсии $\hat{S}_x^2$ и $\hat{S}_y^2$. При уровне значимости α проверяем нулевую гипотезу $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $\left(D(X) = D(Y)\right)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$.

«Исправленные» выборочные дисперсии обычно различные. Требуется установить: различие значимо (существенно) или незначимо, т.е. объясняется случайными причинами. Выбираем F – статистику, распределенную по закону Фишера–Снедекора.

Наблюдаемое значение: $F_{набл} = S^2_Б / S^2_М$ (отношение большой «исправленной» дисперсии к меньшей), число степеней свободы: $k_1 = n_1' - 1$ (где n_1' – объем выборки с большей «исправленной» дисперсией), $k_2' = n_2' - 1$ (где n_2' – объем выборки с меньшей «исправленной» дисперсией). По таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора для уровня значимости α и числе степеней свободы k_1 и k_2 определяем $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$. Если $F_{набл} < F_{кр}$, то гипотеза принимается, если $F_{набл} > F_{кр}$, то гипотеза отвергается.

Если конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : \sigma^2_x \neq \sigma^2_y$, то значение $F_{кр}$ определяется для уровня значимости $\alpha / 2$, поскольку необходимо построить двухстороннюю критическую область $(P(F < F_{кр.лев}) = \alpha / 2$ и $P(F > F_{кр.пр.}) = \alpha / 2)$.

Задача 42. Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две выборки объёмом $n_1 = 10$ и $n_2 = 9$. По результатам измерения контролируемого размера вычислены выборочные дисперсии $S_1^2 = 0{,}95,\ S_2^2 = 2{,}75$. На уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2_x = \sigma^2_y$ против конкурирующей гипотезы $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2.$

Решение

Наблюдаемое значение статистики рассчитываем, как отношение большей «исправленной» дисперсии к меньшей по формуле: $F_{набл.} = \dfrac{\hat{S}^2_б}{\hat{S}^2_м}$.

Найдём «исправленные» выборочные дисперсии по формуле: $\hat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2.$ $n_1 = 10;\ S_1^2 = 0{,}95;\ n_2 = 9;\ S_2^2 = 2{,}75,$ тогда:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{10}{10-1} \cdot 0{,}95 = 1{,}06;\quad \hat{S}_2^2 = \frac{9}{9-1} \cdot 2{,}75 = 3{,}09.\quad F_{набл.} = \frac{3{,}09}{1{,}06} = 2{,}92\,.$$

По таблице Фишера-Снедекора по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k_1 = n_2 - 1 = 9 - 1 = 8;\ k_2 = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ находим: $F_{kp.}(0,01;8;9) = 5,47.$

Так как $F_{набл.} < F_{kp.}(0,01;8;9),$ то нулевая гипотеза не противоречит опытным данным, поэтому принимаем, что $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 16. Из шести карточек с буквами Л, И, Т, Е, Р, А выбираются наугад в определенном порядке четыре. Найти вероятность того, что при этом получится слово ТИРЕ.

Решение

Используем классическое определение вероятности: $P(A)=\dfrac{m}{n}$,

где n – общее число исходов;

m – число исходов, благоприятных появлению события A.

Пусть событие A состоит в том, что получилось слово ТИРЕ.

Находим общее число исходов n – это будут размещения, т.к. из 6 элементов образуются упорядоченные комбинации по 4 в каждой, следовательно, $n=A_6^4$.

Число размещений находим по формуле:

$N=A_n^m=n(n-1)...(n-(m-1))$.

Получаем: $n=A_6^4=6\cdot(6-1)\cdot(6-2)\cdot(6-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$.

Благоприятных исходов m = 1.

Тогда: $P(A)=\dfrac{1}{360}=0{,}0028$.

Задача 17. Две машинистки печатали рукопись. Первая напечатала 1/3 всей рукописи, вторая – остальную часть рукописи. Вероятность того, что первая машинистка сделает ошибку, равна 0,15, для второй эта вероятность равна 0,1. При проверке были обнаружены ошибки. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка.

Решение

Введем события:

H_1 – рукопись печатает первая машинистка;

H_2 – рукопись печатает вторая машинистка;

A – в рукописи сделана ошибка.

Событие A наступило, применяем формулу Байеса:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}.$$

Требуется найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка, т.е. i = 1, формула будет иметь вид:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}$$

По условию задачи $P(H_1)=\frac{1}{3}$; гипотезы H_1 и H_2 составляют полную группу событий, т.е. $P(H_1)+P(H_2)=1$, откуда $P(H_2)=1-P(H_1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Условные вероятности $P_{H_1}(A)$ и $P_{H_2}(A)$ даны по условию: $P_{H_1}(A)=0{,}15$; $P_{H_2}(A)=0{,}1$, тогда искомая вероятность будет:

$$P_A(H_1)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}15}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}15+\frac{2}{3}\cdot 0{,}1}=0{,}4286\ .$$

Задача 18. Вероятности того, что саженцы груши и яблони приживаются, равны 0,8 и 0,9 соответственно. Куплено два саженца груши и один яблони. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев среди них. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение

Пусть X – число прижившихся саженцев. Случайная величина X может принимать значения: 0,1,2,3.

Вероятность того, что не приживается яблоня: $q_1=1-0{,}9=0{,}1$;

груша: $q_2=1-0{,}8=0{,}2$.

$P(X=0)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}004-$ни один из саженцев не прижился.

$x=1$, в случае если принялась одна яблоня или одна из груш:

$P(X=1)=0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 2\cdot 0{,}1+0{,}2^2\cdot 0{,}9=0{,}068$

$x=2$ в случае, если приживутся обе груши или одна груша и одна яблоня:

$p=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 2=0{,}352$

x = 3 в случае, если приживутся все три дерева:

$p=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}576$

Составим закон распределения X:

x	0	1	2	3
p	0,004	0,068	0,352	0,576

Проверка: $\sum p_i=1$.

Математическое ожидание определяем по формуле: $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{u} x_i\cdot p_i$,

$M(X)=0\cdot 0{,}004+1\cdot 0{,}068+2\cdot 0{,}352+3\cdot 0{,}576=2{,}5.$

Дисперсию определяем по формуле:

$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - (M(x))^2,$$

$$D(X) = 1^2 \cdot 0,068 + 2^2 \cdot 0,352 + 3^2 \cdot 0,576 - 2,5^2 = 6,66 - 6,25 = 0,41.$$

Задача 19. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что при $x=0$ производная $F'(x)$ не существует.

Задача 20. На автомате изготавливают заклепки. Диаметр их головок представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону и имеет среднее значение, равное 2 мм, и дисперсию, равную 0,01 мм^2. Какие размеры диаметра головок заклепки можно гарантировать с вероятностью 0,95?

Решение

По следствию из интегральной теоремы Лапласа:

$P(|X - a| < \Delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\Delta}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$ функция Лапласа.

По условию:

X – случайная величина (диаметр заклёпок);

a – среднее значение;

σ – среднеквадратическое отклонение;

Δ – наибольшее изменение случайной величины;

D – дисперсия;

$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0,01} = 0,1.$

Подставляем эти значения, получаем, что,

$$P(|X-2|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{0,1}\right)=0,95,\ \Phi\left(\frac{\Delta}{0,1}\right)=\frac{0,95}{2}=0,475.$$

Значение функции Лапласа находим по таблице и получаем, что

$$\Phi(1,96)=0,475;\ \frac{\Delta}{0,1}=1,96;\ \Delta=1,96\cdot 0,1=0,196.$$

Тогда размеры диаметра головок заклёпки лежат в пределах
(2 – 0,196; 2 + 0,196) или (1,804; 2,196).

Задача 21. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию вариационного ряда:

x_i	10	20	30	40	50	60	70
n_i	4	14	21	31	18	10	2

Решение

Объем выборки: $n=4+14+21+31+18+10+2=100$.

Поскольку варианты равностоящие, т.е. $20-10=30-20=...=10=h$, перейдем к новым вариантам: $u_i=(x_i-40)/10$ (40 – среднее значение варианты), тогда получим:

u_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	4	14	21	31	18	10	2

Выборочная средняя:

$$\bar{u}=\frac{-3\cdot 4-2\cdot 14-1\cdot 21+0\cdot 31+1\cdot 18+2\cdot 10+3\cdot 2}{100}=-0,17.$$

Выборочная дисперсия:

$$S_u^2=\frac{(-3)^2\cdot 4+(-2)^2\cdot 14+(-1)^2\cdot 21+1^2\cdot 18+2^2\cdot 10+3^2\cdot 2}{100}-$$

$$-(-0,17)^2=\frac{189}{100}-0,0289=1,8611.$$

Из формулы $u_i=(x_i-40)/10$ получаем, что выборочная средняя:

$$\bar{x}=10\bar{u}+40=10\cdot(-0,17)+40=38,3.$$

Выборочная дисперсия: $S_x^2=h^2\cdot S_u^2=10^2\cdot 1,8611=186,11.$

Задача 22. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma=40$ произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния до цели с надежностью $\gamma=0,95$, зная среднее арифметическое результатов измерения $\bar{x}$ =2000 м. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Решение

Требуется найти доверительный интервал $\bar{x} - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \dfrac{0,95}{2} = 0,475,$ по таблице значений функции Лапласа находим: t = 1,96 $(\Phi(1,96) = 0,475)$. Подставим значения:
$2000 - 1,96\dfrac{40}{\sqrt{5}} < a < 2000 + 1,96\dfrac{40}{\sqrt{5}}$; $2000 - 35,1 < a < 2000 + 35,1;$
$1964,9 < a < 2035,1.$

Округляя, получим ответ: $1965 < a < 2035.$

Вопросы для самопроверки

1. Написать формулу классического определения вероятности события.
2. Дать определение размещений, перестановок и сочетаний.
3. Записать теоремы сложения совместных и несовместных событий.
4. Записать теоремы умножения зависимых и независимых событий.
5. Записать формулу полной вероятности и формулу Байеса.
6. Записать формулу Бернулли.
7. Записать локальную и интегральную теоремы Лапласа.
8. Дать определение дискретной и непрерывной случайных величин.
9. Что такое закон распределения вероятностей дискретной случайной величины?
10. Написать формулы для математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.
11. Дать определение функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
12. Дать определение равномерного, нормального и показательного распределений.
13. Записать неравенства Маркова и Чебышева.
14. Сформулировать теорему Чебышева.
15. Что такое выборка?
16. Указать способы отбора.
17. Что такое вариационный ряд?
18. Что такое полигон и гистограмма?
19. Несмещенность, эффективность и состоятельность статистической оценки.
20. Основные точечные оценки.
21. Понятие доверительного интервала.
22. Записать интервальные оценки для генеральной средней.
23. Записать интервальные оценки для генеральной дисперсии.
24. Что такое статистическая гипотеза?
25. Что такое критическая область?
26. Как осуществляется проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий?

8. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил:

1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачётной книжки.

Последняя цифра номера зачетки	Задачи для решения							
0	1.10;	2.10;	3.10;	4.10;	5.10;	6.10;	7.10;	8.10.
1	1.1;	2.1;	3.1;	4.1;	5.1;	6.1;	7.1;	8.1.
2	1.2;	2.2;	3.2;	4.2;	5.2;	6.2;	7.2;	8.2.
3	1.3;	2.3;	3.3;	4.3;	5.3;	6.3;	7.3;	8.3.
4	1.4;	2.4;	3.4;	4.4;	5.4;	6.4;	7.4;	8.4.
5	1.5;	2.5;	3.5;	4.5;	5.5;	6.5;	7.5;	8.5.
6	1.6;	2.6;	3.6;	4.6;	5.6;	6.6;	7.6;	8.6.
7	1.7;	2.7;	3.7;	4.7;	5.7;	6.7;	7.7;	8.7.
8	1.8;	2.8;	3.8;	4.8;	5.8;	6.8;	7.8;	8.8.
9	1.9;	2.9;	3.9;	4.9;	5.9;	6.9;	7.9;	8.9.

2. Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. На обложке тетради должны быть четко написаны группа, фамилия и инициалы студента.
4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.
6. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Исследовать функцию двух переменных на экстремум.

1.1. $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5.$

1.2. $z = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 7.$

1.3. $z = 2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3.$

1.4. $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3.$

1.5. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 6y - 5.$

1.6. $z = 3x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2.$

1.7. $z = x^2 + 3y^2 + 4x + 6y + 4.$

1.8. $z = 2x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1.$

1.9. $z = x^2 - y^2 - 8x - 6y - 3.$

1.10. $z = x^2 - 4y^2 - 4x - 8y + 2.$

Задание 2. Изменить порядок интегрирования

2.1. $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x,y)dy.$

2.2. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x^2} f(x,y)dy.$

2.3. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy.$

2.4. $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy.$

2.5. $\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy.$

2.6. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy.$

2.7. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)dy.$

2.8. $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

2.9. $\int_0^1 dx \int_{x^2-2}^{-x} f(x,y)dy.$

2.10. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy.$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл 2- го рода, если AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

3.1. $\int_{AB} (3x+1)dx + (2y-1)dy$ **.**

3.2. $\int_{AB} (2x+3)dx + (y-4)dy$ **.**

3.3. $\int_{AB} (1-x^2)dx + (3y+2)dy$ **.**

3.4. $\int_{AB} (2y+2)dx + (3x-1)dy$ **.**

3.5. $\int_{AB} (x^2+1)dx + (y-4)dy$ **.**

3.6. $\int_{AB} (3x+5)dx + (y+x)dy$ **.**

3.7. $\int\limits_{AB}(3x+y)dx+(2y-x)dy$ **.**

3.8. $\int\limits_{AB}(x+4)dx+(y-2x)dy$ **.**

3.9. $\int\limits_{AB}(2y+5)dx+(3y-1)dy$ **.**

3.10. $\int\limits_{AB}(x^2+3y)dx+(2y-5)dy$ **.**

Задание 4. Исследовать на сходимость ряды

4.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ **.**

4.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}$ **.**

4.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln n}{2n}$ **.**

4.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n!}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+3}$ **.**

4.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\cdot\ln^2 n}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n!)^2}{(3n)!}$ **.**

4.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$ **.**

4.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$ **.**

4.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot\ln n}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8n}{2n^3+1}$ **.**

4.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$**;** **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n\cdot\ln^2 n}$ **.**

4.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **;** **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$ **.**

Задание 5. Найти область сходимости степенного ряда

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3n\cdot 2^n}$.

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n}$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2n\cdot 2^{2n}}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x-4)^n}{5^n}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2\cdot 2^{2n}}$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(x+2)^n}{2^{3n}}$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3n\cdot 4^2}$.

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x-2)^n}{3^{2n}}$.

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2n^2\cdot 9^{2n}}$.

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(x-1)^n}{7^n}$.

Задание 6. Вычислить вероятности указанных событий

6.1. За круглым столом сидят 5 мужчин и 5 женщин. Какова вероятность того, что два лица одинакового пола не сидят рядом, если места занимались случайно?

6.2. На столе лежат 20 экзаменационных билетов с номерами 1,2,...,20. Преподаватель берет 3 любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырех?

6.3. Имеется 6 отрезков, длины которых равны соответственно 2,4,6,8,10,12 единицам. Найти вероятность того, что с помощью взятых наугад трех отрезков можно построить треугольник.

6.4. Пять студентов из групп изучают английский язык, шесть студентов - немецкий и семь студентов - французский язык. Случайным образом выбрано четыре студента. Какова вероятность того, что двое из них изучают английский язык, один изучает французский и один - немецкий?

6.5. На семи карточках написаны цифры от 1 до 7. Наудачу извлекают две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет четной?

6.6. В мастерскую для ремонта поступило 10 телевизоров, из которых 3 нуждаются в общем ремонте. Мастер берет первые попавшие 5 штук. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в общем ремонте?

6.7. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет одинаковое число очков на обеих костях, и вероятность того, что на обеих костях выпадет четное число очков.

6.8. Из полной колоды карт (52 карты) вынимается наугад три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут тройка, семерка и туз.

6.9. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что номер телефона случайно выбранного абонента не содержит одинаковых цифр.

6.10. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые разбиваются на две группы по 10 человек. Определить вероятность того, что четыре наиболее сильных игрока разделятся между группами поровну.

Задание 7. Дискретная случайная величина X задана таблично. Найти математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения случайной величины.

	X_i	2	3	4	5
7.1.	p_i	0,2	0,3	0,1	0,4
7.2.	p_i	0,2	0,2	0,3	0,3
7.3.	p_i	0,3	0,1	0,4	0,2
7.4.	p_i	0,2	0,3	0,3	0,2
7.5.	p_i	0,1	0,3	0,1	0,5
7.6.	p_i	0,2	0,3	0,3	0,2
7.7.	p_i	0,4	0,4	0,1	0,1
7.8.	p_i	0,2	0,4	0,3	0,1
7.9.	p_i	0,5	0,2	0,2	0,1
7.10.	p_i	0,4	0,2	0,2	0,2

Задание 8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, построить графики функций распределения и плотности распределения вероятностей.

8.1. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{при} \quad 0\le x\le 2, \\ 1, & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

8.2. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<1, \\ 2-\dfrac{2}{x}, & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \\ 1, & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

8.3. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<1, \\ e^x-1, & \text{при} \quad 1\le x\le \ln 2, \\ 1, & \text{при} \quad x>\ln 2. \end{cases}$

8.4. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<\dfrac{\pi}{4}, \\ -\cos 2x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

8.5. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<0, \\ \dfrac{x^3}{8}, & \text{при} \quad 0\le x\le 2, \\ 1, & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

8.6. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le -2, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{x^2}, & \text{при} \quad -2< x\le 2, \\ 1, & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$

8.7. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<0, \\ 2\sin x, & \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

8.8. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<0, \\ \sqrt{x}, & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ 1, & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

8.9. $F(x) \quad \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{9}, & \text{при} \quad 3<x\le 6, \\ 1, & \text{при} \quad x>6. \end{cases}$

8.10. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x<0, \\ \ln x, & \text{при} \quad 0\le x\le e, \\ 1, & \text{при} \quad x>e. \end{cases}$

Библиографический список

Основной

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2015. – 288 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2010. – 479 с.
3. Дифференциальные уравнения в приложениях: учеб. пособие для студентов всех техн. специальностей и направлений бакалавриата / А. С. Горлов, В. Б. Никуличев. – Белгород: Изд-во БГТУ 2016. – 139 с.
4. Математика: практикум: учебное пособие / Ю. А. Феоктистов. – Белгород: Изд-во БГТУ 2017. – 86 с.
5. Математический анализ: учебное пособие для студентов младших курсов технических направлений и специальностей. Ч.1 / Г. М. Редькин, А. С. Горлов, Е. И. Красюкова. – Белгород: Изд-во БГТУ 2019. – 128 с.

Дополнительный

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/Под ред . проф. Н.Ш. Кремера, –4-е изд., М.: ЮНИТИ, 2006. – 479 с.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б. П. Демидовича . – М.: Астрель, 2004. – 495 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 – М.: Интеграл-Пресс, 2010.

Учебное издание

Феоктистов Юрий Александрович
Горлов Александр Семенович

Высшая математика

Учебное пособие

Подписано в печать 24.06.24. Формат 60х84/16. Усл.печ.л. 5,8. Уч.-изд. л. 6,3.
Тираж 100 экз. Заказ 104. Цена 160 р. 63 к.
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.