**Лекция №**

**Тройной интеграл (продолжение)**

1. **Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.**

Пусть точка – произвольная точка пространства. Точка – проекция точки на плоскости *XOY*. Положение точки можно определить через полярные координаты и и аппликату *z*:

**Определение**. Тройка чисел , , *z*) называется **цилиндрическими координатами** точки

Пусть задана поверхность . В цилиндрических координатах она запишется так: .

Представим, что необходимо вычислить интеграл в области *G*, ограниченной поверхностями: , , (рис. 1). Заменим

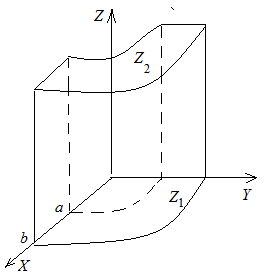
****

Рис. 1

**Пример**. Вычислить тройной интеграл

1. **Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.**

Пусть в декартовой системе координат задана точка . Точка – проекция точки на плоскости *XOY*. Положение точки можно определить с помощью трех чисел: *r* – радиус-вектор, расстояние от начала координат до точки , – угол поворота проекции радиус-вектора на плоскости *XOY* от оси *OX*, – угол между радиус-вектором и осью *Z* (по часовой стрелке).

**Определение**. Тройка чисел называется **сферическими координатами точки** *M* (рис. 2).

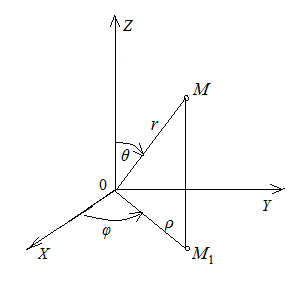
****

Рис. 2

Связь между декартовыми и сферическими координатами определяется формулами:

.

Представим, что необходимо вычислить интеграл в области *G*, ограниченной поверхностями: , , .

Заменим

**Пример**. Вычислить интеграл

, где область ограничена поверхностью .

Решение. Область представляет собой шар со смещенным центром и радиусом: .

Перейдем к сферическим координатам:

)

Пределы интегрирования переменных: .

1. **Приложения тройного интеграла.**
2. Вычисление объема: .
3. Определение массы тела переменной плотности: .
4. Вычисление статических моментов тела относительно плоскостей *XOY*, *XOZ*, *YOZ*: , ,
5. Вычисление координат центра тяжести тела: , ,

**Пример**. Определить массу кругового цилиндра высотой *H*, радиуса *R*, если плотность в любой точке равна расстоянию от этой точки до оси цилиндра:

Решение.

Ссылка: