**Лекция**

**Тройной интеграл**

1. **Определение тройного интеграла.**

Пусть в пространстве задана область *G*, объем которой равен *V*. Пусть в каждой точке *M* этой области определена функция . Проведем следующие процедуры.

1. Разобьем тело на *n* малых тел с объемами , причем
2. В каждом объемчике выберем точку и найдем произведение .
3. Составим сумму таких произведений Она называется **интегральной суммой**
4. Рассмотрим предел интегральной суммы

**Определение**. Если предел интегральной суммы существует и 1) не зависит от способа разбиения области *G* на *n* малых тел, 2) не зависит от выбора в каждом из них точки , 3) существует при неограниченном увеличении числа разбиений при условии, что каждое из них стягивается в точку, то его называют **тройным интегралом** и обозначают

1. **Свойства тройного интеграла.**

1.

2. .

3. где

4. Если любые (*x, y, z)*ϵ*G*, *h*(*x, y, z*) ≤ *f*(*x, y, z*), то

.

5. Если для любых (*x, y, z)*ϵ*G,* то

6. . (Формула среднего значения).

7. Геометрических смысл тройного интеграла. Если то

 , где *V* - объем тела.

1. **Вычисление тройного интеграла.**

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех интегралов.

Пусть функция определена в области *G*: , – непрерывные функции в квадрируемой области *D*, – точка входа в тело, принадлежит плоскости , плоскость называется **плоскостью входа**. – точка выхода из тела, принадлежит плоскости , плоскость называется **плоскостью выхода**.*D*: (рис. 1).



Рис. 1

**Теорема**. Пусть: 1) существует тройной интеграл , 2) для любой точки существует определенный интеграл

.

Тогда существует двойной интеграл

и справедлива формула

.

Замечания.

1. Если двойной интеграл сводится к повторному интегралу, то тройной интеграл можно записать в виде:
2. Внешний интеграл по переменной *x* всегда берется в числах.

3) Пределы внутренних интегралов по переменным *y* – это линии и *z* – поверхности.

**Пример**. Вычислить тройной интеграл , если областью *G* является пирамида, ограниченная плоскостями:

Решение. Построим указанную область (рис. 2).



Рис. 2

За поверхность входа примем плоскость , за поверхность выхода примем плоскость Тогда за линию входа в область используем линию , а за линию выхода Тройной интеграл сведется к повторному интегралу:

1. Вычислим сначала интеграл по переменной *z*:
2. Вычислим следующий интеграл по переменной *y*:
3. Вычислим внешний интеграл по переменной *x*:

Ссылка: https://vk.com/video/@public216917038?q=21.10.2024%20&to=L3ZpZGVvL0BwdWJsaWMyMTY5MTcwMzg%2525252FcT0xMS4xMC4yMDI0JTIw&z=video-216917038\_456240497%2Fclub216917038