**Лекция 3**

**Полная вероятность. Формула Байеса**

1. **Формула полной вероятности**

Формула полной вероятности является следствием обеих основных теорем теории вероятностей. Пусть требуется найти вероятность некоторого события *A*, которое может произойти вместе с одним из событий, $H\_{1}, H\_{2}, \cdots , H\_{n}, $образующих полную группу несовместных событий. События, $H\_{1}, H\_{2}, \cdots , H\_{n}, $называются гипотезами.

Гипотезы – это события, которые произошли до события *A*, они независимые и исчерпывают все возможные предположения относительно исходов как бы первого этапа опытов, а событие *A* – один из возможных исходов второго этапа.

Так как гипотезы $ H\_{1}, H\_{2}, \cdots , H\_{n}$ образуют полную группу событий, то $\sum\_{i=1}^{n}P(H\_{i})=1,$ причем вероятности $P(H\_{i})$ называются априорными вероятностями гипотез, т.е. доопытными вероятностями (от латинского *a priori*, что означает "сперва", т.е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Событие *A* может произойти только одновременно с одной из этих гипотез: $A=A∙H\_{1}+A∙H\_{2}+\cdots +A∙H\_{n}.$ Т.к. гипотезы $H\_{1}, H\_{2}, \cdots , H\_{n}$ несовместны, то и события $A∙H\_{1}, A∙H\_{2}, \cdots ,A∙H\_{n}$ несовместны. Применяя к последнему равенству теорему сложения, получаем:

$$P\left(A\right)=P\left(A∙H\_{1}\right)+P\left(A∙H\_{2}\right)+\cdots +P\left(A∙H\_{n}\right)=\sum\_{i=1}^{n}P\left(A∙H\_{i}\right).$$

Применяя к событиям $A∙H\_{i}$⋅теорему умножения, получим:

$$P\left(A\right)=P(H\_{1})∙P\left(H\_{1}\right)+P(H\_{2})∙P\left(H\_{2}\right)+\cdots +P(H\_{i})∙P\left(H\_{n}\right)=\sum\_{i=1}^{n}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right).$$

эта формула называется формулой полной вероятности. Вероятности $P\left(H\_{n}\right) $называются условными вероятностями события $A.$

**Пример 1.** Имеются три одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и один черный шар, во второй урне 3 белых и один черный шар, в третьей урне 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад урну и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли белый шар}. Сформулируем гипотезы:

$H\_{i}=${выбрали *i*-тую урну}, *i*=1, 2, 3. Далее находим вероятности гипотез, учитывая, что гипотезы – равновозможные события, получаем: $P\left(H\_{i}\right)=\frac{1}{3}.$ Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно: $P\left(H\_{1}\right)=\frac{2}{3}, P\left(H\_{2}\right)=\frac{3}{4}, P\left(H\_{3}\right)=\frac{1}{2}.$ По формуле полной вероятности получаем:

$$P\left(A\right)=\sum\_{i=1}^{3}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right)=\frac{1}{3}∙\frac{2}{3}+\frac{1}{3}∙\frac{3}{4}+\frac{1}{3}∙\frac{1}{2}=\frac{23}{36}=0,639.$$

**Пример 2.** Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго -0,03, для третьего -0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего в два раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли бракованную деталь}. Сформулируем гипотезы:

$H\_{i}=${деталь обработана *i*-тым станком}, *i*=1, 2, 3. Далее находим вероятности гипотез, учитывая, что производительности станков связаны вполне определёнными соотношениями, полагаем, что 2*х* -производительность второго станка, тогда 6*х* -производи­тельность первого станка, *x* -производительность третьего станка, то *2x+6x+x=9x –* общая производительность всех станков.

$$P\left(H\_{1}\right)=\frac{6x}{9x}=\frac{2}{3}, P\left(H\_{2}\right)=\frac{2x}{9x}=\frac{2}{9}, P\left(H\_{3}\right)=\frac{x}{9x}=\frac{1}{9}=> \sum\_{i=1}^{n}P(H\_{i})=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=1.$$

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно: $P\left(H\_{1}\right)=0,02, P\left(H\_{2}\right)=0,03, P\left(H\_{3}\right)=0,04.$ По формуле полной вероятности находим искомую вероятность данного события:

$$P\left(A\right)=\sum\_{i=1}^{3}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right)=\frac{2}{3}∙0,02+\frac{2}{9}∙0,03+\frac{1}{9}∙0,04=\frac{22}{900}=0,024.$$

**Пример 3.** Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0,2, 0,3, 0,5. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий соответствен­но равна: 0,9; 0,8; 0;7. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

Решение. Введем обозначения: *А* = {выбранная радиолампа проработает заданное число часов}, $H\_{i}=${радиолампа принадлежит *i*-той партии}, *i*=1, 2, 3. По условию задачи имеем:

$$P\left(H\_{1}\right)=0,2, P\left(H\_{2}\right)=0,3, P\left(H\_{3}\right)=0,5, => \sum\_{i=1}^{n}P(H\_{i})=0,2+0,3+0,5=1,$$

$$P\left(H\_{1}\right)=0,9, P\left(H\_{2}\right)=0,8, P\left(H\_{3}\right)=0,7.$$

По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

$$P\left(A\right)=\sum\_{i=1}^{3}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right)=0,2∙0,9+0,3∙0,8+0,5∙0,7=0,77.$$

1. **Формулы Байеса**

Теорема Байеса (или формула Байеса) — одна из основных теорем элементарной теории вероятностей, которая позволяет определить вероятность какого-либо события при условии, что произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие. Другими словами, по формуле Байеса можно более точно пересчитать вероятность, взяв в расчёт как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений.

Теорема гипотез или формула Байеса является следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности. Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H\_{1}, H\_{2}, \cdots , H\_{n}.$ Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны соответственно: $P\left(H\_{1}\right), P\left(H\_{2}\right), \cdots ,P(H\_{n})$, причем

$$\sum\_{i=1}^{n}P(H\_{i})=1.$$

Произведен опыт, в результате которого произошло событие *A*. Как изменятся вероятности гипотез с появлением события *A*? Речь идет о том, чтобы найти условную вероятность $P\left(A\right)$ для каждой гипотезы. По теореме умножения имеем:

$$P\left(A∙H\_{i}\right)=P\left(H\_{i}\right)∙P\left(H\_{i}\right)=P\left(A\right)∙P\left(A\right), i=1, 2,\cdots , n.$$

Из последнего равенства получаем формулу:

$$P\left(A\right)=\frac{P\left(H\_{i}\right)∙P\left(H\_{i}\right)}{P\left(A\right)}.$$

Последняя формула называется формулой Байеса или теоремой гипотез. Вероятность $P\left(A\right) $в ней вычисляется по формуле полной вероятности. Вероятности $P\left(A\right)$ называются апостериорными или послеопытными (от латинского слова *a posteriori*, что означает "после", т.е. в данном случае после опыта), для этих вероятностей сумма также равна 1.

**Пример 1.** В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли бракованное изделие}. Сформулируем гипотезы: $H\_{i}=${изделие изготовлено *i*-тым автоматом}, *i*=1, 2, 3. Далее находим вероятности гипотез

$P\left(H\_{1}\right)=\frac{40}{100}=0,4;$ $P\left(H\_{2}\right)=\frac{60}{100}=0,6; => $контроль

$$\sum\_{i=1}^{2}P\left(H\_{i}\right)=0,4+0,6=1$$

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно: $P\left(H\_{1}\right)=0,03, P\left(H\_{2}\right)=0,02$. По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

$$P\left(A\right)=\sum\_{i=1}^{2}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right)=0,4∙0,03+0,6∙0,02=0,024.$$

Вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, соответствует формуле Байеса:

$$P\left(A\right)=\frac{P\left(H\_{1}\right)∙P\left(H\_{1}\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,4∙0,03}{0,024}=0,5.$$

 **Пример 2.** Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,8; 0,75; 0,7. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

Решение. Введем обозначения:$ p\_{1}=0,8; p\_{2}=0,75; p\_{3}=0,7; \overbar{p\_{1}}=q\_{1}=1-0,8=0,2; $

$\overbar{p\_{2}}=q\_{2}=1-0,75=0,25; \overbar{p\_{3}}=q\_{3}=1-0,7=0,3; $ *А* = {цель поражена двумя выстрелами из трех}. Сформулируем гипотезы: $H\_{1}=${третий стрелок попал в цель}, $H\_{2}=${третий стрелок не попал в цель}.

Далее находим вероятности гипотез $P\left(H\_{1}\right)=0,7;$ $P\left(H\_{2}\right)=0,3; => $контроль

$$\sum\_{i=2}^{2}P\left(H\_{i}\right)=0,7+0,3=1.$$

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно:

 $P\left(H\_{1}\right)=p\_{1}∙q\_{2}+q\_{1}∙p\_{2}=0,8∙0,25+0,2∙0,75=0,35, P\left(H\_{2}\right)=p\_{1}∙p\_{2}=0,8∙0,75=0,6$.

По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

$$P\left(A\right)=\sum\_{i=1}^{2}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right)=0,7∙0,35+0,3∙0,6=0,425.$$

Вероятность того, что промахнулся третий стрелок, соответствует второй гипотезе, поэтому формула Байеса принимает вид:

$$P\left(A\right)=\frac{P\left(H\_{2}\right)∙P\left(H\_{2}\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,3∙0,6}{0,425}=0,424.$$

**Пример 3.** Для передачи сообщения путем подачи сигналов «точка» и «тире» используется телеграфная система. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 0,4 сообщений «точка» и 0,3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что сигнал «точка» был принят без искажения.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {получен сигнал «точка»}. Сформулируем гипотезы:

$H\_{1}=${передан сигнал «точка»}, $H\_{2}=${ передан сигнал «тире»}. Далее находим вероятности гипотез $P\left(H\_{1}\right)=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}=0,625;$ $P\left(H\_{2}\right)=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}=0,375; => $контроль $\sum\_{i}^{}P\left(H\_{i}\right)=0,625+0,375=1.$

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно:

 $P\left(H\_{1}\right)=1-0,4=0,6, P\left(H\_{2}\right)=0,3.$

Используя формулу полной вероятности, получаем:

$$P\left(A\right)=\sum\_{i=1}^{2}P(H\_{i})∙P\left(H\_{i}\right)=0,625∙0,6+0,375∙0,3=0,4875.$$

Чтобы найти вероятность того, что сигнал «точка» был принят без искажения, применяем формулу Байеса для первой гипотезы:

$$P\left(A\right)=\frac{P\left(H\_{1}\right)∙P\left(H\_{1}\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,625∙0,6}{0,4875}=0,769.$$

**Ссылка:** https://vk.com/video-216917038\_456240709