**Лекция 3**

**Полная вероятность. Формула Байеса**

1. **Формула полной вероятности**

Формула полной вероятности является следствием обеих основных теорем теории вероятностей. Пусть требуется найти вероятность некоторого события *A*, которое может произойти вместе с одним из событий, образующих полную группу несовместных событий. События, называются гипотезами.

Гипотезы – это события, которые произошли до события *A*, они независимые и исчерпывают все возможные предположения относительно исходов как бы первого этапа опытов, а событие *A* – один из возможных исходов второго этапа.

Так как гипотезы образуют полную группу событий, то причем вероятности называются априорными вероятностями гипотез, т.е. доопытными вероятностями (от латинского *a priori*, что означает "сперва", т.е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Событие *A* может произойти только одновременно с одной из этих гипотез: Т.к. гипотезы несовместны, то и события несовместны. Применяя к последнему равенству теорему сложения, получаем:

Применяя к событиям ⋅теорему умножения, получим:

эта формула называется формулой полной вероятности. Вероятности называются условными вероятностями события

**Пример 1.** Имеются три одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и один черный шар, во второй урне 3 белых и один черный шар, в третьей урне 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад урну и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли белый шар}. Сформулируем гипотезы:

{выбрали *i*-тую урну}, *i*=1, 2, 3. Далее находим вероятности гипотез, учитывая, что гипотезы – равновозможные события, получаем: Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно: По формуле полной вероятности получаем:

**Пример 2.** Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго -0,03, для третьего -0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего в два раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли бракованную деталь}. Сформулируем гипотезы:

{деталь обработана *i*-тым станком}, *i*=1, 2, 3. Далее находим вероятности гипотез, учитывая, что производительности станков связаны вполне определёнными соотношениями, полагаем, что 2*х* -производительность второго станка, тогда 6*х* -производи­тельность первого станка, *x* -производительность третьего станка, то *2x+6x+x=9x –* общая производительность всех станков.

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно: По формуле полной вероятности находим искомую вероятность данного события:

**Пример 3.** Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0,2, 0,3, 0,5. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий соответствен­но равна: 0,9; 0,8; 0;7. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

Решение. Введем обозначения: *А* = {выбранная радиолампа проработает заданное число часов}, {радиолампа принадлежит *i*-той партии}, *i*=1, 2, 3. По условию задачи имеем:

По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

1. **Формулы Байеса**

Теорема Байеса (или формула Байеса) — одна из основных теорем элементарной теории вероятностей, которая позволяет определить вероятность какого-либо события при условии, что произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие. Другими словами, по формуле Байеса можно более точно пересчитать вероятность, взяв в расчёт как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений.

Теорема гипотез или формула Байеса является следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности. Пусть имеется полная группа несовместных гипотез Вероятности этих гипотез до опыта известны и равны соответственно: , причем

Произведен опыт, в результате которого произошло событие *A*. Как изменятся вероятности гипотез с появлением события *A*? Речь идет о том, чтобы найти условную вероятность для каждой гипотезы. По теореме умножения имеем:

Из последнего равенства получаем формулу:

Последняя формула называется формулой Байеса или теоремой гипотез. Вероятность в ней вычисляется по формуле полной вероятности. Вероятности называются апостериорными или послеопытными (от латинского слова *a posteriori*, что означает "после", т.е. в данном случае после опыта), для этих вероятностей сумма также равна 1.

**Пример 1.** В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли бракованное изделие}. Сформулируем гипотезы: {изделие изготовлено *i*-тым автоматом}, *i*=1, 2, 3. Далее находим вероятности гипотез

контроль

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно: . По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

Вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, соответствует формуле Байеса:

**Пример 2.** Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,8; 0,75; 0,7. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

Решение. Введем обозначения:

*А* = {цель поражена двумя выстрелами из трех}. Сформулируем гипотезы: {третий стрелок попал в цель}, {третий стрелок не попал в цель}.

Далее находим вероятности гипотез контроль

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно:

.

По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

Вероятность того, что промахнулся третий стрелок, соответствует второй гипотезе, поэтому формула Байеса принимает вид:

**Пример 3.** Для передачи сообщения путем подачи сигналов «точка» и «тире» используется телеграфная система. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 0,4 сообщений «точка» и 0,3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что сигнал «точка» был принят без искажения.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {получен сигнал «точка»}. Сформулируем гипотезы:

{передан сигнал «точка»}, { передан сигнал «тире»}. Далее находим вероятности гипотез контроль

Условные вероятности события *A* при этих гипотезах равны соответственно:

Используя формулу полной вероятности, получаем:

Чтобы найти вероятность того, что сигнал «точка» был принят без искажения, применяем формулу Байеса для первой гипотезы:

**Ссылка:** https://vk.com/video-216917038\_456240709