**Лекция 2**

**Определение вероятности**

1. **Классическое определение вероятности**

Под вероятностью события понимается некоторая объективная числовая характеристика, которая показывает меру возможности появления события или степень его достоверности. Существует несколько подходов к определению вероятности случайного события.

Пусть имеется испытание с конечным числом возможных исходов. Предположим, что все испытания симметричны по отношению ко всем своим возможным исходам, т.е. все исходы равно возможны.

Классической вероятностью или вероятностью события *А* называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию (*m*), к числу всех равновозможных исходов испытания (*n*), в котором может появиться это событие

.

Из классического определения вероятности вытекают следующие свойства (аксиомы):

1) вероятность достоверного события равна единице ;

2) вероятность невозможного события равна нулю ;

3) вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы, т.е.

4) вероятность любого события выражается положительным числом, меньшим либо равным единице, т.е.

5) вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если , то

**Пример 1.** В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 3 голубых и 3 зеленых. из урны извлекается один шар. Найдите вероятности следующих событий:

*А* = {взяли голубой шар}, *B* = {взяли красный или зеленый шар}.

Решение: Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 3 благоприятствуют событию *А*. Согласно классическому определению вероятности получаем:

Событию *B* благоприятствуют 7 исходов (это 4 красных и 3 зеленых шара). Согласно классическому определению вероятности получаем:

**Пример 2.** Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

Решение. *A* = {6 рукописей разложили по 5 папкам и 1 папка осталась пустой}.

Используем классическое определение вероятности:

Найдем общее число возможных исходов испытания *n* – это число различных способов разложить 6 рукописей по 5 папкам, причем в каждой папке может быть любое количество рукописей, что соответствует числу сочетаний с повторениями

Найдем число благоприятных исходов испытания *m –* это число способов разложить 6 рукописей по 4 папкам, причем в каждой папке должно быть не менее одной рукописи. При этом нужно полученное число сочетаний умножить на 5, так как папку, которая останется пустой, можно выбрать 5 способами .

Окончательно, получаем:

**Пример 3.** На полке в случайном порядке расставлено 8 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти три тома стоят рядом.

Решение. *A* = {3 тома из 8 стоят рядом}.

Используем классическое определение вероятности: .

Найдем число благоприятных исходов испытания

Найдем общее число возможных исходов испытания

Окончательно, получаем:

**Пример 4.** Из букв слова *ротор*, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *тор*?

Решение. *A* = {появилось слово *тор*}.

Используем классическое определение вероятности: .

Общее число элементарных исходов равно:

Число благоприятных исходов испытания

Окончательно, получаем:

**Пример 5.** На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова *талант* - по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слово *талант*?

Решение. *A* = {появилось слово *талант*}.

Используем классическое определение вероятности и получим:

Эту же задачу можно решить, используя формулу перестановок с повторениями, т.е.

**Пример 6.** В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. *A* = {среди 6 взятых деталей ровно 4 стандартных}.

Составим краткую схему задачи:

Выбор из 10 детале1 6, из 7 деталей 4, из 3 деталей 2 описывается формулой сочетаний, поэтому искомая вероятность принимает вид:

**Пример 7.** В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки: 1) одинаковы, 2) различны.

Решение. *A* = {продано 4 одинаковые открытки}.

Общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 6 открыток по 4 с повторениями, т.е.: , а число благоприятных исходов равно 6 (т.к. мы выбираем 4 одинаковых открытки). Используем классическое определение вероятности:

*B*= {продано 4 различные открытки}.

Число благоприятных исходов испытания соответствует числу сочетаний из 6 открыток по 4 и без повторений: Общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 6 открыток по 4 с повторениями, т.е.: Окончательно, получаем:

1. **Статистическое определение вероятности**

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. О равновозможности исходов опыта заключают в силу соображений симметрии (как в случае монеты или игрального кубика). Задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются редко. Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. Чтобы дать это определение, предварительно введем понятие относительной частоты события.

Относительной частотой события *A* (или частотой, или частостью) в рассматриваемой серии опытов называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие, к числу всех произведенных опытов:

,

где - число опытов, в которых появилось событие *А,* это число еще называют частотой события *A*,- число всех произведенных опытов.

Относительная частота события обладает следующими свойствами:

1. Частота случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей:
2. Частота достоверного события равна единице:
3. Частота невозможного события равна нулю:
4. Частота суммы двух несовместных событий *А* и *В* равна сумме частот этих событий, т.е. если , то

Относительная частота события *A* обладает еще одним фундаментальным свойством, называемым свойством статистической устойчивости: в различных сериях с увеличением числа испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться это событие) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной (говорят «частость стабилизируется»). Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Отметим, что теория вероятностей изучает только те массовые случайные явления с неопределенным исходом, для которых предполагается наличие устойчивости относительной частоты.

Статистической вероятностью события *A* называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний:

Статистической вероятностью события приписывают свойства 1-4 относительной частоты:

1. Статистическая вероятность любого события есть число, заключенное между нулем и единицей:
2. Статистическая вероятность достоверного события равна единице:
3. Статистическая вероятность невозможного события равна нулю:
4. Статистическая вероятность суммы двух несовместных событий *А* и *В* равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если , то

Недостатком статистического определения вероятности является неоднозначность статистической вероятности (приближенное равенство): Так, например, в случае с бросанием монеты это может быть не только число 0,5 но и 0,49 и 0,51 и т.д. Для надежного определения вероятности нужно проделать большое число испытаний, что не всегда просто (возможно или дешево).

1. **Геометрическое определение вероятности**

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно. Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят геометрические определение вероятности - вероятности попадания точки в область. Например, в качестве Ω можно взять ограниченное множество точек на плоскости или отрезок на прямой. В качестве события A можно рассмотреть любую подобласть области Ω. Заметим, что элементарным событием на таком множестве может быть только точка.

Геометрической вероятностью события *A* называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события *A,* к мере всей области Ω:

где через *mes* обозначена мера области (*S, V, L*).

Геометрическое определение вероятности применимо для несовместных событий, в которых число равновозможных исходов бесконечно.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами, присущему классическому определению вероятности:

1. Геометрическая вероятность любого события есть число, заключенное между нулем и единицей:
2. Геометрическая вероятность достоверного события равна единице:
3. Геометрическая вероятность невозможного события равна нулю:
4. Геометрическая вероятность суммы двух несовместных событий *А* и *В* равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если , то

**Пример 1.** В круг вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

Решение. Введем обозначения: *R* - радиус круга, *а* - сторона вписанного квадрата, *А* = {попадание точки в квадрат}, *S* - площадь круга, - площадь вписанного квадрата (рис. 1).

Рис. 1

Как известно, площадь круга . Сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой

Окончательно, используя формулу

геометрической вероятности, получаем:

**Пример 2.** В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб.

Решение. Введем обозначения: *А* = {попадание точки в куб}, *R* - радиус шара, *а* - ребро куба, *V* - объем шара, - объем вписанного куба.

Как известно,

Используя формулу геометрической вероятности, получаем:

**Пример 3.** В квадрат (рис. 2) с вершинами в точках *0 (0, 0), К (0, 1), L (1,*

*1), М (1,0)* наудачу брошена точка *Q (x, у).* Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству

*K L*

*C N*

*0 M x*

Рис. 2

Решение. Проведем прямую , она пересечет отрезок *ML* в точке *N(1; 1/2)*. Эта прямая рассекает плоскость на две полу­плоскости: для координат точек первой из них (верхней) будет выполняться неравенство , для второй (нижней) – неравенство Все точки, принадлежащие квадрату *OКLM* и координаты которых удовлетворяют неравенству , находятся в многоугольнике *OКLN.* Этот многоугольник состоит из прямоугольника *CKLN* и треугольника *OCN*, его площадь. Площадь *S* квадрата *OКLM* равна единице: *S = 1*. В соответствии с формулой геометрической вероятности, найдем искомую вероятность

**Пример 4.** (задача о встрече, рис. 3) Два человека условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый человек наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

60

15

0 15 60 *x*

Рис. 3

Решение. Обозначим за *х* и *у* времени прихода, 0 *≤ х, у ≤ 60* (минут), за начало отсчета прямоугольной системы координат примем 12.00. В прямоугольной системе координат этому условию удовлетворяют точки, лежащие внутри квадрата *ОАВС*. Точки этого квадрата соответствуют моментам прихода встречающихся. Все исходы равновозможны, т.к. люди приходят «наудачу». Друзья встретятся, если между моментами их прихода пройдет не более 15 минут, то есть .

*A* = {встреча состоялась}= {}.

На рисунке событию *A* соответствуют все точки полосы. Тогда вероятность встречи равна отношению площадей области полосы и квадрата, то есть

.

**4. Аксиоматическое определение вероятности**

Теорию вероятностей, как и всякую математическую науку, можно строить аксиоматическим методом. Аксиомы теории вероятностей вводятся так, чтобы вероятность обладала основными свойствами частоты. Пространством элементарных событий называют произвольное множество, а его элементы - элементарными событиями. Эти понятия являются первоначальными. В реальных опытах элементарным событиям соответствуют взаимно исключающие итоги опыта. Событиями будем называть подмножества множества Ω. Не исключаются случаи, когда такое подмножество содержит лишь один элемент, совпадает со всем множеством Ω или является пустым. Далее вводится понятие алгебры событий и на этом множестве вводится понятие вероятности события.

Числовая функция *Р(А),* определенная на алгебре событий *L*, называется вероятностью, если выполнены следующие аксиомы:

1. Каждому событию из *L* ставится в соответствие неотрицательное число *Р(А)* - его вероятность, т.е.
2. Вероятность достоверного события *Ω* равна единице: *P(Ω)=1*.
3. Вероятность невозможного события равна нулю:
4. Вероятность суммы двух несовместных событий *А* и *В* равна сумме вероятностей этих событий, т.е. если , то
5. Для любой убывающей последовательности событий из *L* такой, что справедливо равенство

Тройка ( *Ω, L, Р*), в которой *L* является -алгеброй и *Р* удовлетворяет аксиомам 1-4, называется вероятностным пространством. Таким образом, математической моделью любого случайного явления в современной теории вероятностей служит вероятностное пространство.

Вообще говоря, аксиоматическое определение не дает способа подсчета вероятности событий, но позволяет решать другую основную задачу теории вероятностей: выражать вероятности одних событий через другие некоторым образом связанные с данными, связь между событиями осуществляется через операции над событиями: сложение, умножение, отрицание.

**5. Следствия из аксиом теории вероятностей**

1. Вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью самого события:
2. Если событие *А* влечет за собой событие *В*, то вероятность события *А* не превосходит вероятности события *В*, т.е. , а вероятность разности этих событий равна разности их вероятностей:
3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
4. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:
5. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:
6. Вероятность события *В* при условии, что произошло событие *А*, называется условной вероятностью события *В* и обозначается так: .

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

1. Событие *В* не зависит от события *А*, если , т.е. условная вероятность события равна его безусловной вероятности или вероятность события *В* не зависит от того, произошло ли событие *А*. В этом случае и событие *А* не зависит от события *В*, т.е. свойство независимости событий является взаимным.
2. Вероятность произведения *n* событий равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили: .

События называются независимыми в совокупности, или независимыми, если они попарно-независимы, а также независимы каждое из них и произведение *k* остальных (*k=*1, 2, …, *n*-1). Заметим, что: 1) из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности; 2) если события независимы, то противоположные им события также независимы.

1. Если события независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: . Это равенство выражает необходимое и достаточное условие независимости событий
2. Вероятность появления хотя бы одного из событий независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий :

Если независимые события имеют одинаковую вероятность, равную *р*, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий выражается формулой:

1. **Примеры решения задач**

**Пример 1.** Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число делится на 2 или делится на 7.

Решение. Введем обозначения для события:

*A* = {наудачу взятое двузначное число кратно 2}, *B* = {наудачу взятое число кратно 7}. Необходимо найти Поскольку *A* и *B* – совместные события, то следует пользоваться формулой вероятности суммы двух совместных событий.

Двузначных чисел всего 90 (это числа от 10 до 99) 45 из этих чисел кратны 2 (являются четными), они благоприятствуют событию *A*. 13 из этих чисел кратны 7; 7 чисел кратны 2 и 7 одновременно (благоприятствуют событию *AB*).

Таким образом,

.

**Пример 2.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: . Какова вероятность хотя бы одного попадания в цель (событие A) при одном залпе из всех этих орудий?

Решение. Вероятность попадания в цель каждого из орудий не зависит от результата стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события:

={попадание первого орудия}, {попадание второго орудия} и попадание третьего орудия} независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям (т.е. вероятности промахов) соответственно равны*:*

Искомую вероятность найдем по формуле:

**Пример 3.** В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим события *А* = {кофе закончится в первом автомате},

*В* = {кофе закончится во втором автомате}. Тогда

*A·B* = {кофе закончится в обоих автоматах}, *A + B* = {кофе закончится хотя бы в одном автомате}.

По условию *P(A) = P(B)* = 0,35; *P(A·B)* = 0,2. События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения: *P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A·B)* = 0,35 + 0,35 − 0,2 = 0,5.

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна

**Пример 4.** Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,973. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

Решение. Рассмотрим событие *А* = {событие появится хотя бы 1 раз в трех независимых испытаниях},

**Пример 5.** На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Рассмотрим события *А* = {извлечен жетон с четным номером},

*В* = {извлечен жетон с номером кратным 3}. События *A* и *B* совместные.

Тогда *A·B* = {извлечен жетон с четным номером кратным 3}.

**Пример 6.** В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Рассмотрим событие *А* = {взяли три стандартные детали}. Элементарные вероятности (вероятности появления стандартной детали из *i*-го ящика) соответственно равны: . Появление стандартной детали из i-го ящика – независимые события, поэтому:

Ссылка: https://vk.com/video-216917038\_456240651