**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Белгород
2022

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов очной формы обучения всех специальностей

Белгород
2022

УДК 52-17
ББК 22.19
О49

Рецензент:
Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технического университета им. В. Г. Шухова *А. С. Горлов*

О49 Окунева Г.Л., Рябцева С.В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие / Г.Л. Окунева, С.В. Рябцева – Белгород: Изд-во БГТУ, 2022. – 72 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и содержит такие разделы как «Численные методы» и «Задачи линейного программирования». Помимо теоретического материала пособие содержит примеры выполнения лабораторных работ, контрольные вопросы к зачету. Пособие может использоваться для самостоятельного изучения лекционного курса и выполнения практических заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения специальности 23.05.06 – Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей.

Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 52-17
ББК 22.19

2022

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию студентов заочной формы обучения специальности 23.05.06 – «Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей» предлагается данное пособие с изложением основных тем по дисциплине «Математическое моделирование систем и процессов» по разделам «Численные методы» и «Задачи линейного программирования».

В пособии изложен основной теоретический материал для выполнения лабораторных работ, приведены примеры выполнения этих работ и их оформления.

Номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки.

Контрольную работу следует оформить в обычной тетради или на листах формата *А*4 и сдать преподавателю. После проверки во время сессии состоится собеседование студента с преподавателем по работе. В результате собеседования, ответов на предлагаемые вопросы студент получает оценку.

1. Теория моделирования

1. Основные этапы создания математической модели процесса. Принципы построения модели.
2. Виды математических моделей. Их основные характеристики.
3. Требования к математическим моделям.

1. Моделирование – это научный прием, инструмент изучения процессов и явлений реального мира. При моделировании реальный объект, называемый **оригиналом**, замещается моделью – аналогом реального объекта. Над моделью проводятся эксперименты и исследования, на основе которых делаются выводы о свойствах реального объекта.

Почему моделирование так широко применяется в современном мире?

1. Моделирование в некоторых случаях может быть единственной возможностью изучения сложного объекта. Там, где исследование реального объекта невозможно, там используют моделирование поведения такого объекта на основе модели (примеры: экономические процессы, экологические проблемы, процессы в недрах звезд, полеты в космос и т. д.).

2. Моделирование позволяет сэкономить время изучения реального объекта.

3. Моделирование позволяет снизить материальные затраты на изучение реального объекта.

4. Моделирование позволяет довольно существенно повысить эффективность исследований.

Этапы построения модели.

Строго говоря, какой-либо зафиксированной схемы построения модели в общем виде не существует. Но можно выделить следующие условные этапы построения:

1. **Словесно-смысловое описание (содержательное описание)** объекта или явления – это так называемый этап **предмодели**. На этом этапе собираются сведения общего характера о природе объекта, ставится цель такого исследования.

2. **Завершение идеализации объекта (формализация операций)**. Выделяются все основные факторы и эффекты, не самые существенные,

отбрасываются. После этого выделяют управляемые и неуправляемые параметры, проводят их символизацию. Затем определяется система ограничений на значения управляемых параметров. Если они несущественные, ими пренебрегают. По возможности идеализирующие объект предположения записываются в математической форме.

3. **Математическая запись модели**. На этом этапе переходят к выбору и формулировке законов, которым подчиняется объект, и записи их в математической форме. Важным условием решения задачи является формирование целевой функции модели, по которой можно будет судить о эффективности работы модели. Исходя из основной цели постановки задачи, выбираются показатели исхода операций, и определяется вид функции полезности на исходах. Ее возможно определить непосредственно по показателям исхода операций. Если показателей много, то появляется необходимость перейти к одному - обобщен-ному параметру (осуществляется свертка показателей). По этому параметру формируется критерий эффективности и целевая функция.

4. **Оснащение модели**. Формулируются необходимые условия о начальном состоянии объекта, основные требования, которым подчиняются параметры объекта. Окончательно формулируется цель исследования модели.

Построенная модель изучается всеми доступными исследователю приемами. Большинство моделей не поддаются теоретическому анализу, и поэтому их исследуют с широким применением вычислительных методов.

5. **Проверка адекватности модели**. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и устанавливается ее **адекватность** – соответствие реальному объекту и сформулированным предположениям. Проверка такой адекватности проводится на основе различных подходов к анализу модели. Какие моменты следует осветить, решая вопрос об адекватности модели?

- Все ли существенные параметры включены в модель.
- Нет ли несущественных параметров в модели.
- Правильно ли отражены основные функциональные связи между параметрами.
- Правильно ли отражены ограничения на значения параметров.

6. **Реализация модели и проведение исследований**. Полученные результаты моделирования подвергаются анализу на соответствие известным свойствам исследуемого объекта. Для этого возможно:

- сравнение результатов моделирования с известными экспериментальными данными, полученными в похожих условиях;
- использование других похожих моделей;
- сопоставление структуры и функционирования модели с реальным объектом.

7. **Корректировка модели**. При корректировке модели ее существенные параметры могут уточняться, изменяться ограничения, критерии эффективности и другие, поддающиеся изменению параметры. После выполненной корректировки вновь проводятся исследования, и проводится оценка адекватности модели.

8. **Оптимизация модели**. Сущность оптимизации модели сводится к упрощению модели при сохранении заданного уровня адекватности. Как правило, критериями оптимизации служат минимальные затраты времени и затраты средств для проведения исследований по этой модели. Можно предложить более экономичные математические методы вычислений.

Принципы построения модели.

1. Адекватность. Модель должна правильно отражать исследуемый объект, соответствовать реальности, соответствовать целям исследования по уровню сложности и организации. Среди всех возможных вариантов поведения объекта, выбирают те, которые удовлетворяют определенному условию. Как правило, по этому условию некоторая величина, связанная с объектом, достигает своего экстремального значения при переходе из одного состояния в другое. Такой принцип иногда называют **вариационным**.

2. Соответствие модели решаемой задаче. Модель должна создаваться для решения определенного класса задач или для конкретной задачи. Попытки создания универсальных моделей для решения разнообразных задач приводят, как правило, к неоправданному усложнению модели, при этом модель становится непригодной.

3. Абстрагирование от второстепенных деталей - упрощение модели. Модель должна быть проще, чем прототип. В модели умышленно выделяются наиболее существенные свойства и игнорируются менее существенные.

4. Баланс точности и сложности модели. Модель всегда носит приближенный характер. Возникает вопрос, каким должно быть это приближение? С одной стороны, чтобы как-то отобразить существенные признаки объекта, нужна детализация, с другой стороны, строить модель, которая приближается по сложности к реальному объекту, очевидно, не имеет смысла, решение такой задачи порой просто невозможно. Соблюдение баланса точности и сложности, как правило, достигается путем проб и ошибок.

При построении модели две тенденции противоречат друг другу: полнота описания работы системы и получение результатов возможно более простыми средствами.

Достижение компромисса возможно на пути построения ряда моделей от простых к сложным моделям. Простые модели помогают глубже понять принципы работы системы, усложненные модели позволяют анализировать влияние различных факторов на результаты моделирования. Такой подход к построению модели еще называют **иерархическим.**

Как уменьшить сложность модели? Можно придерживаться следующих рекомендаций.

1) **Изменение числа переменных**. Можно исключить несущественные или объединить их, уменьшить число ограничений на них. Такой процесс в моделировании называется **агрегированием**.

2) **Изменение природы переменных параметров**. Например, изменчивые параметры рассматриваются в качестве постоянных параметров, дискретные как непрерывные величины.

3) **Изменение функциональной зависимости между переменными**. Например, нелинейная зависимость заменяется линейной, дискретная функция распределения вероятностей – непрерывной.

4) **Изменение ограничений**. Обычно добавляют новые ограничения, или исключают что-то или модифицируют. При снятии ограничений получают оптимистичное решение, при введении – пессимистичное. Изменение ограничений, как правило, используют для нахождения предварительных оценок эффективности решения задачи еще на этапе постановки задачи.

5) **Ограничение точности модели**. Точность результатов не может

быть выше точности исходных данных.

5. Баланс погрешностей всех видов.

6. Многовариантность реализации элементов модели. Возможность по разному реализовать один и тот же элемент модели, отличающийся по точности, обеспечивает баланс точности и сложности модели.

7. Блочное строение. Такое построение модели облегчает разработку сложных систем, позволяет использовать накопленный опыт и готовые блоки.

Принципы построения модели могут зависеть и от **конкретных ситуаций**. Выделяю при этом такие подходы.

1) **Непосредственный анализ функционирования системы**. Если система позволяет выявить существенные параметры и отношения между ними в процессе работы, то можно применить уже известные модели, либо она модифицируется или предлагается новая в новых условиях.
2) **Проведение ограниченного эксперимента на самой системе**. При таком исследовании большая часть существенных параметров выявляется, можно оценить их влияние на эффективность работы системы. Примером такого исследования могут служить учебные игры, учения.
3) **Использование аналога**. Если метод построения модели неясен, но ее структура понятна, то можно воспользоваться сходством с более простой системой, модель которой уже известна.
4) **Анализ исходных данных**. Такой анализ позволяет сформулировать гипотезу о структуре системы, а затем апробировать ее на новой модели.

2. Виды моделей. Классификация моделей проводится по-разному.

По методам математического моделирования их можно разделить на четыре класса.

1. **Аналитические модели** (analytical models). Сознательно отказываясь от детального описания системы, оставляя лишь наиболее существенные компоненты и связи между ними, исследователь использует достаточно малое число

правдоподобных гипотез о характере взаимодействия компонентов системы, создает математическое описание системы. Математическое описание, анализ и объяснение свойств системы присуще довольно широкому классу задач.

2. **Имитационные модели** (simulation models). Целью такого рода моделирования является максимальное приближение модели к реальному объекту, достижение максимальной точности его описания. Имитационные модели претендуют на выполнение объяснительных и прогнозных функций, реализуются на ЭВМ с использованием блочного принципа, позволяющего разбить всю систему на подсистемы, которые можно развивать самостоятельно с использованием своего математического аппарата. Данные модели очень дорогие, связанны с большими затратами.
3. **Эмпирико-статистические модели.** Эти модели строятся на основе первичной обработки экспериментальных данных. При построении такой модели основная цель может быть следующая:
    - упорядочение информации;
    - поиск, количественная оценка и содержательная интерпретация причинно-следственных отношений между переменными системы;
    - оценка достоверности и продуктивности разных гипотез о сов-местном влиянии переменных друг на друга;
    - идентификация параметров расчетных уравнений разного вида.

Часто эмпирико-статистические модели являются начальными и обоснованием для применения других видов моделей.

4. **Модели искусственного интеллекта** (artificial intelligence). Эти модели обычно берут на себя отдельные функции человека, в их основу заложены принципы обучения, самоорганизации и эволюции при малом участии человека. Исследователь выступает при этом в роли учителя, партнера, участника системы «человек-машина».

3. Математические модели и требования к ним. Основой любого моделирования является построение математической модели изучаемого объекта. Для ее построения необходимо иметь представление о цели функционирования этого объекта, располагать информацией об ограничениях, определяющих область допустимых решений.

Математическая модель – это совокупность формул, уравнений, неравенств, отражающих основные черты объекта. Какого-то общего способа построения такой математической модели нет. Любая модель строится на основе тех целей, которые ставит перед собой исследователь, с учетом имеющейся информации, и исходя из требований точности найденного решения.

И так, основными требованиями, предъявляемыми к математической модели, являются:

1. Математическая модель учитывает наиболее существенные черты или факты, присущие реальному объекту.
2. Математическая модель должна быть простой.

Математическая модель требует самого пристального внимания к введению параметров, однозначно определяющих функционирование системы.

Обычно параметры делятся на три вида.

1) **Контролируемые** - параметры, являющиеся переменными, чаще всего числовыми, значения которых исследователь задает сам;
2) **Неконтролируемые** – это переменные, значения которых исследователь не может менять по своему усмотрению; часто они неизвестны исследователю. Эти величины могут носить случайный характер с известными или неизвестными вероятностными характеристиками;
3) **Целевые** – параметры, характеризующие эффективность операции.

Цель математической модели – связать контролируемые и неконтролируемые параметры с целевыми параметрами. Это позволяет выделить прямую и обратную задачи исследования.

Прямая задача исследования – это задача нахождения по контролируемым и неконтролируемым параметрам целевых параметров.

Обратная задача исследования – это задача, где требуется найти такие значения контролируемых параметров, при которых целевые параметры удовлетворяют определенным условиям оптимальности. Такие задачи называют **задачами оптимизации**.

По взаимодействию параметров, модели подразделяют на детерминированные, стохастические, адаптивные, компромиссные.

В **детерминированных** моделях неконтролируемые параметры обычно отсутствуют. По значениям контролируемых параметров целевые параметры определяются однозначно. К таким моделям относятся модели:

а) линейного программирования;

б) нелинейного программирования;

в) оптимального управления.

В **стохастических** моделях связь между контролируемыми и целевыми параметрами носит вероятностный характер. К таким моделях относятся:

а) модели теории игр;

б) модели теории статистических решений;

в) модели теории массового обслуживания.

В **адаптивных** моделях распределение неконтролируемых параметров в принципе существует, но на момент решения они не известны. На начальном этапе выбирается какое-то решение, может не самое лучшее, и в процессе работы оно корректируется, что ведет к изменению значений параметров. Примерами могут служить задачи управления системами.

В **компромиссных** решениях или в моделях экспертных оценок у исследователя нет практически никакой информации о неконтролируемых параметрах, но известно, что их влияние существенно.

Существует множество математических моделей, которые используют для исследования различно рода систем. По возможности следует строить разные модели и производить сравнение результатов. Если научные выводы от модели к модели мало меняются, то таким исследованиям можно доверять!

2. Задача линейного программирования

1. Общая форма задачи линейного программирования.
2. Каноническая форма ЗЛП.
3. Стандартная форма ЗЛП.

Рассмотрим пример. На станках трех видов S_1, S_2, S_3 производят два вида продукции P_1 и P_2. Первый станок на производство единицы продукции вида P_1 тратит 2 часа, на производство единицы продукции P_2 тратит 3 часа. Второй станок тратит соответственно 2 часа и 1 час.

Третий станок тратит соответственно 3 часа и 2 часа. Первый станок может работать в сутки не более 12 часов, второй – не более 8 часов, а третий станок не более 10 часов в сутки. Стоимость единицы продукции первого вида составляет C_1 руб., для второго вида продукции – C_2 руб. Требуется определить такие объемы выпуска продукции P_1 и P_2 на всех станках, чтобы выручка от их реализации была **максимальной**. Условие задачи можно представить в виде табл. 1:

Таблица 1

	Продукция P_1	Продукция P_2	Ресурс времени
Станок S_1	2	3	12
Станок S_2	2	1	8
Станок S_3	3	2	10
Стоимость ед. продукции.	C_1	C_2	

Пусть x_1, x_2 – количество выпускаемой продукции первого и второго вида, которое планируется выпустить на станках. Пусть Z – функция стоимости произведенной продукции, запишем ее в виде уравнения:

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 \to \max .$$

Переменные x_1 и x_2 ограничены условиями производства по времени:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Итак, задача заключается в следующем: найти точку максимума функции Z среди точек $(x_1;\, x_2)$, которые удовлетворяют указанным неравенствам. Все уравнения и неравенства задачи линейные, следовательно, мы получили задачу **линейного программирования**.

Общая форма задачи линейного программирования запишется так:

$$Z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\ge; =)\, b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\ge; =)\, b_2; \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\ge; =)\, b_m; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \cdots; x_n \ge 0. \end{cases}$$

Функция Z называется **целевой функцией** задачи, переменные, $(x_1;\, x_2; \cdots; x_n)$ – **аргументами целевой функции**, на которые накладываются ограничения.

Система ограничений обычно имеет бесконечное множество решений. Каждая совокупность аргументов функции Z, удовлетворяющая системе ограничений, называется **допустимым планом задачи**.

Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум целевой функции Z, называется **оптимальным планом**.

Таким образом, под **задачей линейного программирования** понимают выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного, оптимального плана.

Суть линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения целевой функции при определенном наборе линейных ограничений, накладываемых на аргументы целевой функции.

Существуют эквивалентные формы записи задачи линейного программирования. Наиболее важными из них являются **каноническая** форма и **стандартная** форма**.**

1. **Каноническая форма задачи линейного программирования**.

При записи задачи в **канонической форме** для целевой функции находится максимум, система ограничений состоит только из равенств, переменные неотрицательные.

$$Z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \cdots; x_n \ge 0. \end{cases}$$

К канонической форме можно привести любую задачу линейного программирования. Если в системе ограничений имеется неравенство, то его следует обратить в равенство введением в левую часть некоторой неотрицательной величины. После этого система ограничений становится системой уравнений.

Например, систему неравенств в нашей задаче переведем в систему равенств, введя три переменные $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$ получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Если некоторая переменная x_i не подчиняется условию **неотрицательности**, то ее заменяют разностью неотрицательных переменных $x_i^* \; и \; x_i^{**}$:

$$x_i = x_i^* - x_i^{**}, x_i^*, x_i^{**} \geq 0.$$

Если же в задаче исследуется целевая функция на минимум, то вводят новую целевую функцию $Z_1 = -Z.$

2. **Стандартная форма задачи линейного программирования**.

При записи задачи в **стандартной форме** для целевой функции Z определяется максимум, система ограничений состоит из неравенств $(\leq)$, все переменные больше или равны нулю:

$$Z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{2n} \leq b_2; \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме: если $Z \to \max$, то $Z_1 = -Z \to \min$.

Любое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимно противоположных неравенств. Например, равенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ заменим системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} \leq b_1; \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_{2n} \leq -b_1. \end{cases}$$

Лабораторная работа № 1

Записать математическую модель задачи.

1.1. Для издания книг «Кулинария» и «Шью сама» необходимо предусмотреть расходы на бумагу, типографскую краску, фотографии. Расходы на издание одной книги, общая сумма расходов по позициям и цена одной книги заданы в табл. 2.

Таблица 2

	Затраты на издание одной книги (руб.)			Цена книги (руб.)
	Бумага	Краска	Фотографии	
«Кулинария»	0,5	2	100	85
«Шью сама»	0,8	2,4	120	100
Общая сумма расходов	400	200	1000	

Сколько необходимо выпустить книг каждого вида, чтобы прибыль по их реализации была максимальной?

1.2. Школьнику для изготовления трех видов елочных украшений требуется разного цвета бумага: синяя, красная, зеленая, золотистая. Норма каждого вида бумаги на одну елочную игрушку, общее количество бумаги в наличии и общая стоимость игрушки заданы в табл. 3.

Таблица 3

	Количество листов бумаги на 1 игрушку				Цена игрушки (в руб.)
	Синяя	Красная	Зеленая	Золотистая	
Игр. №1	1	2	1	0,5	2
Игр. №2	2	0,5	2	2	4
Игр. №3	1	1	2	3	3
Запас бумаги	15	18	20	15	

Сколько игрушек каждого вида следует изготовить, чтобы их реализация на школьной ярмарке принесла прибыль?

1.3. На некотором заводе, выпускающем прохладительные напитки, имеется 20000 литров минеральной воды. Завод производит квас и коктейль. На выпуск 1 бутылки кваса уходит 0,2 литра минеральной воды, а на 1 банку коктейля 0,05 литра. Стоимость 1 бутылки кваса составляет 24 денежных ед., а 1 банки коктейля 10 денежных ед. Нужно произвести не более 200000 бутылок кваса и не более 400000 банок коктейля. Сколько бутылок кваса и коктейля необходимо изготовить для того, чтобы получить наибольшую прибыль от реализации продукции?

1.4. Стальные прутья длиной 110 см. необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуется изготовить заготовок соответственно 40, 30 и 20 штук. Возможные варианты разреза заготовок и величины отходов при этом заданы в табл. 4.

Таблица 4

Длина заготовок (см)	Варианты разреза заготовок					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Отходы (см)	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимуме отходов.

1.5. После рекламной компании некоторая фирма испытывает повышенный спрос на свою продукцию: детский набор «Юный химик» и набор для ремонта «Все сам». Фирма заключила контракты на поставку этих наборов в магазины по 300 штук в месяц. Производство наборов ограничивается мощностью производства составляющих деталей, мощностями участков сборки и упаковки. Трудозатраты возникающие на каждом участке на каждую единицу наборов и общие трудозатраты заданы в табл. 5.

Таблица 5

Участок работы	Трудозатраты (час.)		Фонд времени (час.)
	«Юный химик»	«Все сам»	
Производство	5	8	2600
Сборка	0,8	1,2	400
Упаковка	0,5	0,5	200

Фирма сама не может выполнить контракт. Поэтому она провела переговоры с другой компанией, которая обладает избыточными мощностями. По договору с фирмой компания готова поставить один набор «Юный химик» за 3 тыс. руб. и один набор «Все сам» за 5 тыс. руб. Эти цены превышают себестоимость наборов фирмы: на 1,5 тыс. руб. за набор «Юный химик», на 2 тыс. руб. за набор «Все сам». Надо найти такой план закупаемых и произведенных наборов, который обеспечит выполнение контракта с минимальными затратами.

1.6. Для изготовления молочной продукции привозят молоко на 3 завода от четырех хозяйств. Хозяйства производят молоко в объеме: Белгородский район – 20000 литров, Прохоровский район – 15000 литров, Новооскольский район – 15800 литров, Шебекинский район – 18000 литров ежедневно. Мощности молочных заводов по переработке молока в городах Белгороде, Шебекино, поселке Томаровка, транспортные расходы на перевозку 1 тысячи литров молока представлены в табл. 6.

Определить план перевозок молока от хозяйств до молочных заводов, который бы обеспечил минимальные совокупные расходы.

Таблица 6

Предприятия	Транспортные расходы за 1тыс. литров в районах				Мощность завода (л)
	Белгородский	Прохоровский	Новооскольский	Шебекинский	
БМК	2	5	3	4	27000
ШМК	3	5	4	2	25000
ТМК	3	7	8	5	23000

1.7. Фирма производит два вида удобрений. На предстоящий месяц она заключила контракт на поставку этих удобрений: калийных не более 100 т, фосфатных ровно 120 т. Каждый вид удобрений проходит термическую обработку в печах 1$^{\underline{ой}}$ и 2$^{\underline{ой}}$. Время обработки ограничено, печи могут в течении месяца работать не более 300 часов первая и не более 350 вторая. Фирма не имеет достаточных мощностей для выполнения контракта. Поэтому она решила закупить часть удобрений у другой фирмы. Время прохождения обработки на печах, затраты на производство и закупку удобрений заданы в табл. 7.

Таблица 7

Удобрения	Печи (т/час)		Затраты на производство	Затраты на закупку
	1	2		
Калийные	4	2	36	48
Фосфатные	3	6	50	65

Составить план производства и закупки удобрений фирмой, чтобы минимизировать издержки.

1.8. Для изготовления изделий артикула 01 и 02 фабрика использует четыре вида ресурсов: металл, дерево, ткань и энергию. Нормы расхода ресурсов следующие: на изделие артикула 01 требуется 2 ед. металла, 3 ед. дерева, 2 ед. ткани и 900 ед. энергии; на изделие артикула 02 соответственно металла 3 ед., дерева 5 ед., ткани 10 ед., энергии 300 ед. На складе фабрики можно хранить одновременно: металла более 60 ед., дерева не более 150 ед., ткани не более 200 ед.; имеется лимит на электроэнергию – не более 2700 ед. Определить такой план производства изделий, который обеспечит максимум прибыли при их реализации, если изделия артикула 01 продают по цене 200 руб., а изделия артикула 02 – по цене 250 руб.

1.9. На фабрике выпускают изделия четырех видов: А, Б, В, Г. Для их изготовления требуется три типа пластмассы: 1, 2, 3. Нормы расхода каждого типа пластмассы на разные виды изделий, общее количество запасов пластмассы в килограммах на фабрике и цена одного изделия при реализации заданы в табл. 8.

Таблица 8

Пластмасса	Изделия				Запасы пластмассы
	А	Б	В	Г	
1	1	3	5	3	12
2	3	2	1	1	8
3	2	2	1	1	10
Цена одного изделия (руб)	10	12	6	8	

Сколько изделий каждого вида необходимо выпустить за смену, чтобы выручка при реализации этих изделий была наибольшей?

1.10. Предприятие выпускает четыре вида продукции: шкафы, стулья, журнальные и обеденные столы, и продает их по 5, 3, 7 и 6 условных денежных единиц. Для производства используется в основном три вида ресурсов: клей, древесина и отделочные материалы в количестве не более 24, 36 и 40 условных единиц. Расход ресурсов на изготовление единицы продукции зада в табл. 9.

Таблица 9

Продукция / Ресурс	Шкаф	Стул	Журнальный стол	Обеденный стол
Клей	3	1	1	2
Древесина	8	2	3	5
Отделочные материалы	3	1	4	3

Найти максимальную прибыль предприятия.

3. Геометрическое решение задачи в случае двух переменных

1. Допустимый многоугольник.
2. Линия уровня. Градиент целевой функции.
3. Точки экстремумов.
4. Графический метод решения ЗЛП с *N* переменными.

Пусть задача линейного программирования для двух переменных записана в стандартной форме

$$Z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ x_1; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Эти задачи имеют простое геометрическое истолкование. На плоскости построим систему координат с осями OX_1 *и* OX_2. Каждое из ограничений рассмотрим как прямую. Решением неравенств является какая-нибудь полуплоскость. Все решения находятся в первой четверти. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих ограничениям, называются **допустимым многоугольником**. Эта область может быть ограниченной, неограниченной или вовсе пустой (рис. 1).

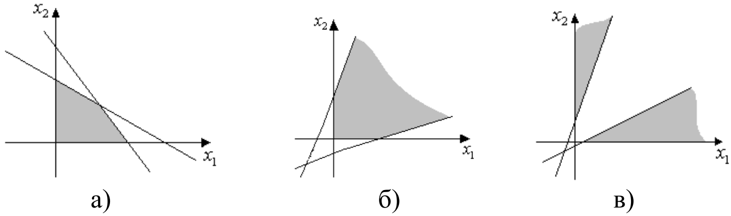

Рис. 1. Примеры допустимых многоугольников: а) ограниченная область; б) неограниченная область; в) пустая область

Целевая функция изображается с помощью **прямой уровня**, т.е. прямой, на которой целевая функция принимает постоянное значение.

Пусть $Z = C$, тогда $C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 = C$.

С увеличением постоянной C прямая уровня перемещается в сторону наискорейшего роста функции Z, то есть в направлении **градиента** функции Z: $grad\vec{Z} = \left\{ \frac{\partial Z}{\partial x_1}; \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right\} = \{C_1; C_2\}$.

На плоскости построим какое-нибудь положение линии уровня целевой функции. Градиент покажет направление роста Z функции.

Точка минимума функции Z – это точка первого касания линии уровня допустимого многоугольника (рис. 2, $(\cdot)B$), **точка максимума** функции Z - это точка отрыва линии уровня от многоугольника (рис. 2, $(\cdot)A$).

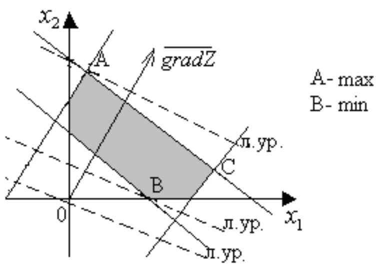

Рис. 2. Точки максимума и минимума в области допустимых решений

Обычно эти точки являются вершинами многоугольника. Но их может быть и бесконечно много, если линия уровня параллельна какой-либо стороне многоугольника, например, AC и BD (рис. 3).

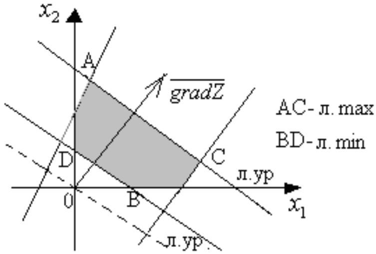

Рис. 3. Множество решений задачи

Пример. Построим допустимый многоугольник и найдем точку максимума функции $Z = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $C_1 = 1, C_2 = 1, C = -2$, $x_1 + x_2 = -2.$ Значение для линии уровня C выбираем произвольно, $grad\vec{Z} = \{\ 1; 1\ \}$ перпендикулярен линии уровня (рис. 4).

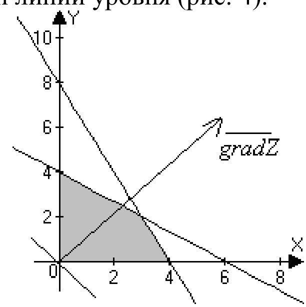

Рис. 4. Область допустимых решений

Максимальное значение функция $Z = x_1 + x_2$ принимает в точке $B(3;\,3)$ и $Z_{\max} = 6$.

В некоторых случаях целевая функция и система ограничений имеет более чем две переменных, но задачу можно свести к графическому методу решения.

Графический метод решения ЗЛП с ***n*** переменными требует записи системы ограничений в **канонической форме** и удовлетворять условию: $n - r \le 2$, где ***n*** – число неизвестных, ***r*** – ранг системы ограничений. Число неизвестных, называемых **базисными**, равно ***r***. Две и менее неизвестных являются **свободными**.

Систему ограничений с помощью метода Гаусса приводят к равносильной разрешенной системе (базисные переменные имеют коэффициент 1 и выражаются через свободные переменные). При этом в целевой функции базисных переменные исключают. Затем в равенствах отбрасывают неотрицательные разрешенные неизвестные (базисные) и заменяют знак равенства «=» на знак «$\le$». Получается вспомогательная задача линейного программирования с двумя переменными. Решают полученную задачу графически. После отыскания промежуточного экстремума находят оптимальное решение исходной задачи.

Пример. Найти решение задачи линейного программирования графическим методом:

$$Z = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 4; \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5. \end{cases}$$

Решение. Запишем коэффициенты переменных и свободные члены системы уравнений ограничений в виде матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -4 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right).$$

Преобразуем матрицу коэффициентов, переводя переменные x_3, x_4, x_5 в базисные, выполняя следующие действия:

1) $C_3 - C_1 \to C_3$; 2) $C_2 - C_3 \to C_2$; 3) $C_1 + C_2 \to C_1$; 4) $-C_2$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -4 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -4 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -4 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & -14 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

Запишем новую систему уравнений ограничений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 14; \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 18. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные x_3, x_4, x_5 через свободные x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_4 = 2 - x_1 + 3x_2, \\ x_3 = 14 - 3x_1 + x_2, \\ x_5 = 18 - x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$Z = 6x_1 + 3(14 - 3x_1 + x_2) - (2 - x_1 + 3x_2) + 3(18 - x_1 - 3x_2) =$$

$$= 6x_1 + 42 - 9x_1 + 3x_2 - 2 + x_1 - 3x_2 + 54 - 3x_1 - 9x_2) = 94 - 5x_1 - 9x_2.$$

Отбросим в уравнениях положительные базисные переменные, получим систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 2; \\ 3x_1 - x_2 \le 14; \\ x_1 + 3x_2 \le 18. \end{cases}$$

Решим ее графически, найдем область допустимых решений (рис. 5).

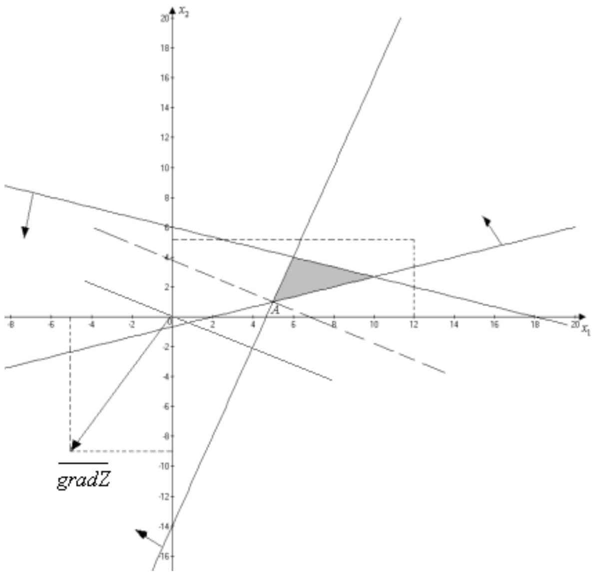

Рис. 5 Область допустимы решений системы неравенств

Построим радиус-вектор $grad\vec{Z} = \{-5; -9\}$. Найдем координаты точки, которая является максимумом задачи, решая первое и второе уравнения системы: $A(5;1)$.

Вычислим максимальное значение целевой функции и оставшиеся переменные:

$$Z_{\max} = 94 - 5 \cdot 5 - 9 \cdot 1 = 60,$$

$$x_3 = 14 - 3 \cdot 51 = 0; \quad x_4 = 2 - 5 + 3 = 0; \quad x_5 = 18 - 5 - 3 = 10.$$

Ответ: $Z(\max) = 60,\ \overline{X}(5;1;0;0;10).$

Лабораторная работа № 2

1. Найти область решения системы ограничений:

1.1 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 5x_2 \le -6, \\ 4x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 3x_1 - 8x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 5y + 4x \le 20; \\ 5y \ge 0; \\ 5x + 4y \ge 20; \\ x \ge 0; \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} 4x + 3y \ge 12; \\ x \le 5; \\ -x + 2y \le 2; \\ x,\ y \ge 0; \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} 3x - y \ge 6; \\ 4x + 2y \le 5; \\ 2x + 7y \le 3; \\ x + y \ge 2; \\ x,\ y \ge 0; \end{cases}$

1.6 $\begin{cases} x - y \ge 10; \\ 5x + 2y \le 5; \\ x + 2y \le 3; \\ 7x + y \ge 14; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 \le 12; \\ x_1 - 4x_2 \le 12; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 5; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.8 $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 \le 3, \\ 5x_1 - x_2 \le 9, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.9 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 9, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 18, \\ -4x_1 + 6x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 - 9x_2 \le 18, \\ -x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

2. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

2.1 $Z = 2x + y \to max,$

$$\begin{cases} 5x + 6y \le 30; \\ 4x + 8y \le 32; \\ 8x + 5y \le 40; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2.2 $Z = 2 + 4x + 2y \to max,$

$$\begin{cases} 4x + 2y \ge 8; \\ 6x + 7y \le 42; \\ x - y \le 5; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2.3 $Z = 2x + y - 1 \to min,$

$$\begin{cases} x + y \ge 2; \\ 3x + 8y \ge 12; \\ x + 2y \le 6; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2.4 $Z = -3 + 2x + y \to max,$

$$\begin{cases} x - y \le 1; \\ x \le 4; \\ x - 2y \ge 1; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2.5 $Z = x + y \to max,$

$$\begin{cases} -4x + 2y \le 8; \\ x - 3y \le 3; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2.6 $Z = 4 + 3x + 3y \to max,$

$$\begin{cases} x - 3y \ge 6; \\ 5x + 11y \le 55; \\ x,\ y \ge 0. \end{cases}$$

2.7 $Z = -2 + 3x - 5y \to max,$

$$\begin{cases} 3x + 2y \ge 3, \\ x - y \le 5, \\ x + y \ge 6, \\ x, y \ge 0. \end{cases}$$

2.8 $Z = x + 3y \to max,$

$$\begin{cases} x - 4y \ge 15, \\ 3x + 5y \le 16, \\ x + y \le 8, \\ x, y \ge 0. \end{cases}$$

2.9 $Z = x - 2y + 3 \to min,$

$$\begin{cases} 2x - y \le 20, \\ x + y \le 15, \\ x + y \ge 2, \\ x, y \ge 0. \end{cases}$$

2.10 $Z = 6x - 2y + 3 \to max,$

$$\begin{cases} 6x - 3y \le 15, \\ x + 3y \le 12, \\ x + y \ge 1, \\ x, y \ge 0. \end{cases}$$

4. Симплекс-метод решения ЗЛП

1. Опорное решение ЗЛП.
2. Примеры применения симплекс-метода.
3. Процедура перехода к новому опорному плану.
4. Алгоритм вычислений по симплекс-методу.

Симплекс-метод является универсальным, применим к любой задаче линейного программирования в канонической форме.

Переменные задачи делятся на **базисные** и **свободные**. Нас будут интересовать такие решения, при которых свободные переменные равны нулю. Такое решение называется **базисным**. Базисных решений у задачи столько, сколько базисных миноров у системы ограничений.

Базисное решение называется **допустимым базисным** (или **опорным**), если все переменные в нем неотрицательны.

Симплекс-метод основан на **фундаментальной теореме** симплекс-метода: среди оптимальных планов задачи линейного программирования в канонической форме обязательно есть опорное решение ее системы ограничений. Если оптимальный план единственный, то он совпадает с некоторым опорным решением.

Разных опорных решений у задачи конечное число. Необходимо выбрать среди них то, для которого целевая функция $Z \to \max$. Просто перебрать все решения невозможно в общем случае. Симплекс-метод представляет собой **процедуру направленного перебора опорных планов**: отталкиваясь от первого опорного решения, находится второе, при котором $Z_2 > \mathrm{Z}_1$, и т. д. до оптимального решения.

Пример. Найти: $Z = x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему ограничений в канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Система ограничений – это система уравнений, где число неизвестных больше числа уравнений. Ранг системы равен двум, следовательно, две переменные базисные и две свободные. Пусть базисными будут x_1 и x_2, свободными x_3 и x_4. Выразим базисные переменные через свободные переменные (ниже под матрицами показаны соответствующие действия):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$C_2 - 2C_1 \to C_2 \qquad C_2\left(-\frac{1}{3}\right) \to C_2 \qquad C_1 - 2C_2 \to C_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

Получим новую систему ограничений: $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 2, \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 4. \end{cases}$

Таким образом, $x_1 = 2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4; \quad x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4.$

Выразим целевую функцию через переменные x_3 и x_4 :

$$Z = 2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 4 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 6 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4.$$

После преобразований получим задачу:

$$Z = 6 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 2, \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем систему в виде, где переменные собраны влево, а свободные члены находятся в правой части.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 2; \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 4; \\ Z + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 6. \end{cases}$$

Оформим симплекс-таблицу (табл. 13):

Таблица 13

Базисные переменные	Свободны члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	0	-1/3	2/3
x_2	4	0	1	2/3	-1/3
Z	6	0	0	1/3	1/3

Переход к новой таблице (новому опорному плану) осуществляется по схеме: в последней строке таблицы, кроме свободного члена, выбирается отрицательное число. Если такого нет, как в данной таблице, то эта таблица является оптимальным решением задачи: $Z_{\max} = 6, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$.

Пример. Найти $Z = x_5 - x_4 \to \max,$ при условии, что преобразования системы ограничений уже проведены:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5; \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5; \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде: $\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1; \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2; \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3; \\ Z - x_5 + x_4 = 0. \end{cases}$

Составим первую симплекс-таблицу (табл. 14) и проанализируем ее:

Таблица 14

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1	-2
x_2	2	0	1	0	-2	1
x_3	3	0	0	1	3	1
Z	0	0	0	0	1	**-1**

а) просмотрим последнюю строку таблицы, выберем отрицательный элемент (-1) в столбце x_5;

б) просмотрим столбец, соответствующий этому элементу, и выберем положительный элемент в этом столбце (например, 1 и соответствующую ему переменную x_2). Если положительных чисел несколько, то выбирается то, для которого отношение соответствующего свободного члена к этому элементу минимально. Этот коэффициент называется **разрешающим** или **генеральным** элементом таблицы. Элемент x_2 переводим в свободные, элемент x_5 переводим в базисные. Строим новую таблицу (табл. 15). Строку с разрешающим элементом делим на разрешающий элемент 1 и записываем на то же место;

Таблица 15

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	2	0	-3	0
x_5	2	0	1	0	-2	1
$\underline{x_3}$	1	0	-1	1	5	0
Z	2	0	1	0	**<u>-1</u>**	0

в) проведем пересчет в столбце разрешающего элемента, получая нули во всех строчках этого столбца подобно методу **Гаусса**:

1) $C_1(T14) + 2C_2(T15);$

2) $C_3(T14) - C_2(T15);$

3) $C_z(T14) + 2C_2(T15).$

Новая таблица соответствует новому базисному решению.

Всю процедуру повторяем снова:

а) в последней строке имеется отрицательный элемент, в столбце x_4;

б) в разрешающем столбце имеется один положительный элемент – 5, соответствующий базисной переменной x_3. Следовательно, x_3 переводим в свободные, а x_4 в базисные переменные. Разделим третью строку на 5 и запишем новую строку переменной x_4 в табл. 11. Получим нули в четвертом столбце:

1) $C_1(T15) + 3C_3(T16);$

2) $C_2(T15) + 2C_3(T16);$

3) $C_z(T15) + C_3(T16).$

Занесем результаты в новую таблицу (табл. 16):

Таблица 6

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	28/5	1	7/5	3/5	0	0
x_5	12/5	0	3/5	2/5	0	1
x_4	1/5	0	-1/5	1/5	1	0
Z	11/5	0	4/5	1/5	0	0

в) все коэффициенты в последней строке таблицы неотрицательные, следовательно, счет окончен, найдено оптимальное решение:

$$Z_{\max} = \frac{11}{5} \text{ при } \vec{x}\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

Пример. Найти $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2; \\ Z - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим первую симплекс-таблицу (табл. 17):

Таблица 17

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	-1	1	1	0
$\underline{x_4}$	2	1	-2	0	1
Z	0	**-1**	-1	0	0

Переведем x_1 в базисные, а x_4 в свободные переменные. Получим новую таблицу (табл. 18):

Таблица18

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	0	-1	1	1
x_1	2	1	-2	0	1
Z	2	0	-3	0	1

В столбце с отрицательным членом в строке целевой функции нет положительных элементов. Следовательно, целевая функция неограниченна в области определения, и задача решения не имеет.

Алгоритм вычислений по симплекс-методу.

1. Осуществить преобразования, при которых система ограничений приводится к допустимому базисному виду, из целевой функции исключаются базисные переменные:

$$Z = \gamma_0 + \gamma_{r+1} x_{r+1} + \cdots + \gamma_n x_n \to \max,$$

r - ранг системы ограничений, $x_1, x_2, ..., x_n -$ базисные переменные,

$b_1^*, b_2^*, ..., b_r^* \geq 0$:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^* + a_{1,r+1}^* x_{r+1} + \cdots + a_{1n}^* x_n; \\ x_2 = b_2^* + a_{2,r+1}^* x_{r+1} + \cdots + a_{2n}^* x_n; \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_r = b_r^* + a_{r,\text{r}+1}^* x_{r+1} + \cdots + a_{rn}^* x_n; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \cdots; x_n \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему:

$$\begin{cases} x_1 - a_{1,r+1}^* x_{r+1} - \cdots - a_{1n}^* x_n = b_1^*; \\ x_2 - a_{2,r+1}^* x_{r+1} - \cdots - a_{2n}^* x_n = b_2^*; \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_r - a_{r,\text{r}+1}^* x_{r+1} - \cdots - a_{rn}^* x_r = b_r^*; \\ Z - \gamma_{r+1} x_{r+1} - \cdots - \gamma_n x_n = \gamma_0. \end{cases}$$

3. Оформим первую симплекс-таблицу (табл. 19):

Таблица 19

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	…	x_r	x_{r+1}	…	x_n
x_1	b_1^*	1	0	…	0	$-a_{1,r+1}^*$	…	$-a_{1n}^*$
x_2	b_2^*	0	1	…	0	$-a_{2,r+1}^*$	…	$-a_{2n}^*$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r^*	0	0	…	1	$-a_{r,r+1}^*$	…	$-a_{rn}^*$
Z	γ_0	0	0	…	0	$-\gamma_{r+1}$	…	$-\gamma_n$

Схема перехода к новому опорному плану.

1. Выбирается последняя строка и отрицательный элемент в ней, кроме γ_0:

а) если отрицательных элементов несколько, то выбирается любой;

б) если отрицательных элементов нет, то полученная таблица последняя, базисное решение – оптимальное;

2. По выбранному отрицательному числу в соответствующем столбце выбирается положительный элемент. Он называется разрешающим или генеральным:

а) если таких элементов нет, то целевая функция неограниченна в области определения и задача решения не имеет;

б) если таких чисел несколько, выбирают то, для которого отношение свободного члена к этому числу минимально;

в) базисная переменная разрешающего элемента переводится в свободную переменную, а свободная в базисную переменную;

3. Заполняется строка новой базисной переменной. Для этого следует старую строку разделить на разрешающий элемент. Остальные строки таблицы заполняются с помощью преобразований Гаусса,

получением нулей в столбце разрешающего элемента. В результате получаем новую таблицу – новое базисное решение;

4. С новой таблицей проводится та же процедура. Окончанием работы с таблицами является отсутствие в строке целевой функции отрицательных элементов. Свободные члены в таблице соответствуют координатам точки максимума (значения базовых переменных, свободные равны нулю) и значение

$$Z_{\max} = \gamma_0 .$$

Лабораторная работа № 3

Решить симплекс-методом следующие задачи:

1.1 $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2 $Z = -3 + x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 - 4x_2 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.3 $Z = 5x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 4, \\ x_1; x_2; x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 $Z = 2 + 3x_1 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2, \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.5 $Z = -3 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

1.6 $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \le 12, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 \le 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 12x_2 + x_3 = 16, \\ x_1 + 8x_2 - x_4 \le 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 22, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

1.7 $Z = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 34, \\ x_1 + 5x_2 \ge 5{,}9, \\ x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.8 $Z = 25x_1 + 30x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2_2 \le 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.9 $Z = 2x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \ge \dfrac{8}{3}, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.10 $Z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_5 = 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. Решение алгебраических нелинейных уравнений

1. Отделение корней уравнения.
2. Метод половинного деления (метод бисекций).

1. Отделение корней уравнения $f(x)=0$.

Отделение корней уравнения $f(x)=0$ – это процедура определения промежутка, на котором имеется один из корней уравнения.

Отделение корня можно осуществить графически, записав уравнение в виде $\varphi(x)=\psi(x)$ и построив графики этих функций $y_1=\varphi(x), y_2=\psi(x)$.

Действительными корнями уравнения $f(x)=0$ являются точки пересечения (абсциссы) графиков функций $\varphi(x),\ \psi(x)$. Найдем отрезок $[a;b]$, на который попадает абсцисса пересечения графиков, и проверим условие теоремы Больцано–Коши: если функция $f(x)=0$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a;b]$ и принимает на концах отрезка значения противоположных знаков, т. е. выполняется условие $f(a)\cdot f(b)<0$, то на этом отрезке существует единственная точка c такая, что $f(c)=0$.

Пример. Отделить корни уравнения $2x^2-4x+e^{3x}-3=0$.

Представим уравнение в виде: $e^{3x}=-2x^2+4x+3$

Введем две функции: $\varphi(x)=-2x^2+4x+3,\ \psi(x)=e^{3x}$.

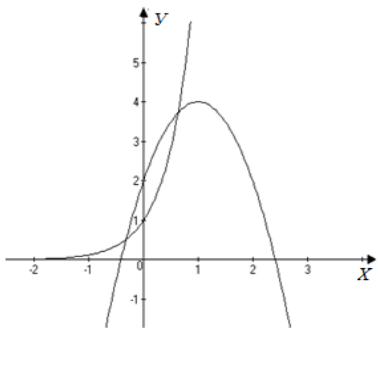

Рис. 6. Графическое решение уравнения

Построим графики этих функций (рис. 6).

Имеется два корня на отрезках [-1; 0] и [0; 1].

Проверим значение функции на концах первого отрезка [-1; 0]:

$$f(-1) = 2 + 4 + \frac{1}{e^3} - 2 > 0, \quad f(0) = -2 < 0.$$

Функция на концах отрезка имеет разные знаки, следовательно на отрезке [-1; 0] есть корень уравнения.

Пример. Отделить корни уравнения $x^3 + 3x + 1 = 0.$

Единственный корень этого уравнения можно найти и по формуле Кардано: $x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$ Но практическое значение этой формулы невелико. Во-первых, ее удобно применять, когда уравнение имеет единственный корень. Во-вторых, для практических расчетов этот корень все равно придется представить в виде десятичной дроби, что можно сделать лишь приближенно: $x \approx -0{,}322185354..$ или с точностью до 0,001 $x \approx -0{,}322.$

Отделим корни уравнения графически.

Представим уравнение в виде $x^3 + 1 = -3x$ и изобразим эскизы графиков функций: $y = x^3 + 1,\ y = -3x$ (рис. 7).

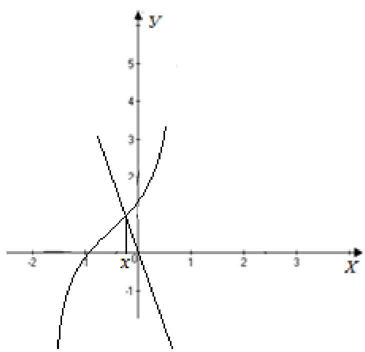

Рис. 7. Графическое решение уравнения $x^3 + 3x + 1 = 0.$

Уравнение имеет единственный корень $x \in [-0{,}5;\ 0]$.

Проанализируем поведение производной функции $y = x^3 + 3x + 1$.

Производная функции $y' = 3x^2 + 3$ положительная при всех x, т. е. функция монотонно возрастет на всей области определения. Так как $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$, то уравнение имеет единственный корень, и он уже локализован: $x \in [-0{,}5;\ 0]$.

2. Определение корней уравнения методом половинного деления.

Необходимо построить последовательность вложенных отрезков, на концах которых функция принимает значения разных знаков.

Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего.

Рассмотрим функцию $f(x)$ на $[a;b]$. Разобьем отрезок пополам точкой $c = \dfrac{b+a}{2}$ (рис. 8). Определим знак функции $f(c)$, выбираем отрезок $[a;\ c]$ или $[c;\ b]$, где функции $f(a)$, $f(c)$, $f(b)$ имеют разные знаки (проверяем условие $f(a)f(c) < 0$ или $f(b)f(c) < 0$).

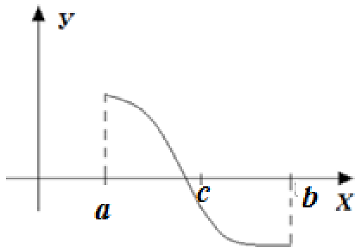

Рис. 8. Определение корней уравнения методом половинного деления

Пусть выбрали отрезок $[a;\ c]$. Присвоим $b = c$.

С новым отрезком $[a;\ b]$ поступаем аналогично.

Если корень находится с точностью ε, то деление продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда координата середины отрезка является значением корня уравнения с точностью ε.

Метод **деления пополам** – простой и надежный способ. Он сходится Для любых непрерывных функций. Скорость сходимости невелика. Число итераций можно определить по формуле $N = \log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon}$.

Пример. Найдем корни уравнения $x^3+3x+1=0$ с заданной точностью $\varepsilon=0{,}001$

Решение.

1. Корни локализованы: $x\in[-0{,}5;\,0]$.

2. Найдем координату середины отрезка: $c=\dfrac{-0{,}5+0}{2}=-\ 0{,}25.$

3. Оценим знак на концах отрезка: $f(-0{,}5)\cdot f(-0{,}25)<0,$ $-\ 0{,}625\cdot 0{,}2344<0,$

следовательно, корень находится на отрезке $[-\ 0{,}5;-0{,}25]$ и $b=-\,0{,}25.$

4. Найдем середину нового отрезка $[-\ 0{,}5;-\ 0{,}25]$ и его длину:

$$c=\frac{-0{,}5-0{,}25}{2}=-0{,}375,\quad |0{,}5-0{,}25|=0{,}25.$$

5. $f(-0{,}375)=-0{,}1777<0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0{,}375;-0{,}25]$ и $a=-\,0{,}375.$

6. Найдем середину нового отрезка $[-0{,}375;-0{,}25]$ и его длину:

$$c=\frac{-0{,}375-0{,}25}{2}=-\ 0{,}3125,\quad |0{,}375-0{,}25\,|=\ 0{,}125.$$

7. $f(c)>0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0{,}375;-0{,}3125]$ и $b=-0{,}3125.$

8. Найдем середину нового отрезка $[-0{,}375;-0{,}3125]$ и его длину:

$$c=\frac{-0{,}375-0{,}3125}{2}=-0{,}3435,\quad |0{,}375-0{,}3125|=0{,}0625.$$

9. $f(c)<0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0{,}3435;-0{,}3125]$ и $a=-0{,}3435.$

10. Найдем середину нового отрезка $[-0,3435; -0,3125]$ и его длину:

$$c = \frac{-0,3435 - 0,3125}{2} = -0,3282, \quad |0,3435 - 0,3125| = 0,031.$$

11. $f(c) < 0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0,3282; -0,3125]$ и $a = -0,3282.$

12. Найдем середину нового отрезка $[-0,3282; -0,3125]$ и его длину:

$$c = \frac{-0,3282 - 0,3125}{2} = -0,3204, \quad |0,3282 - 0,3125| = 0,0157.$$

13. $f(c) > 0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0,3282; -0,3204]$ и $b = -0,3204.$

14. Найдем середину нового отрезка $[-0,3282; -0,3204]$ и его длину:

$$c = \frac{-0,3282 - 0,3204}{2} = -0,3243, \quad |0,3282 - 0,3204| = 0,0078.$$

15. $f(c) < 0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0,3243; -0,3204]$ и $a = -0,3243.$

16. Найдем середину нового отрезка $[-0,3243; -0,3204]$ и его длину:

$$c = \frac{-0,3243 - 0,3204}{2} = -0,3224, \quad |0,3243 - 0,3204| = 0,0039.$$

17. $f(c) < 0,$ следовательно, корень находится на отрезке $[-0,3243; -0,3204]$ и $b = -0,3224.$

18. Оценим длину последнего отрезка

$$|0,3243 - 0,3224| = 0,0019 \approx 0,002 = 2\varepsilon.$$

Поэтому корень уравнения $x \approx -0,322$ с точностью до 0,001.

Лабораторная работа № 4

Отделить корни уравнения $f(x)=0,$ т. е. определить промежуток, на котором имеется один из корней уравнения. определить корень уравнения методом половинного деления (бисекций) с точностью ε = 0,07.

1. $x^4-2x-4=0$
2. $x^3+x^2-11=0$
3. $x^3+2x-7=0$
4. $x^3-9x^2+18x-1=0$
5. $x^3-12x+1=0$
6. $x^4+3x-20=0$
7. $x^3-2x-5=0$
8. $x^4-3x+1=0$
9. $x^3+3x+5=0$
10. $x^4+5x-7=0$

6. Решение систем нелинейных уравнений

1. Выбор начального приближения решения системы графическим методом или с помощью табулирования функции.

2. Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона.

3. Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации.

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f(x,y)=0; \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

Метод Ньютона. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x,y), являющейся решением системы. Пусть известно некоторое приближение (x_n, y_n) к решению системы (x,y) Представим точное решение в виде: $\begin{cases} x = x_n + \Delta x_n; \\ y = y_n + \Delta y_n. \end{cases}$

Разложим функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ по формуле Тейлора как функции двух переменных в ряд, оставив только линейные члены разложения относительно малых приращений $\Delta x_n, \Delta y_n$:

$$f(x,y) = f(x_n + \Delta x_n, y_n + \Delta y_n) = f(x_n, y_n) + f_x'(x_n, y_n)\Delta x_n + f_y'(x_n, y_n)\Delta y_n$$

$$g(x,y) = g(x_n + \Delta x_n, y_n + \Delta y_n) = g(x_n, y_n) + g_x'(x_n, y_n)\Delta x_n + g_y'(x_n, y_n)\Delta y_n.$$

Левые части равенств равны нулю. Для определения значений приращений получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f_x'(x_n, y_n)\Delta x_n + f_y'(x_n, y_n)\Delta y_n = -f(x,y); \\ g_x'(x_n, y_n)\Delta x_n + g_y'(x_n, y_n)\Delta y_n = -g(x,y). \end{cases}$$

Матрица, составленная из производных функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$, называется матрицей Якоби:

$$I = \begin{pmatrix} f_x'(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы не равен нулю, решить данную систему можно методом Крамера:

$$\Delta x_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ -g(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x'(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}}; \ \Delta y_n = \frac{\begin{vmatrix} f_x'(x_n, y_n) & -f(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & -g(x_n, y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x'(x_n, y_n) & f_y'(x_n, y_n) \\ g_x'(x_n, y_n) & g_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}}.$$

Дальнейшее новое приближение системы находится по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta x_n; \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y_n. \end{cases}$$

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к точному решению системы, то метод Ньютона очень быстро (по квадратичному закону) сходится. Условием окончания счета можно выбрать одно из условий:

$$|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$$

или

$$|\Delta x_n| + |\Delta y_n| < \varepsilon.$$

Пример. Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}01.$

$$\begin{cases} y(x-1) = 1; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Решение. Пусть $f(x,y) = y(x-1) - 1$ и $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4.$

Найдем производные функций системы:

$$f'_x(x,y) = y,\ f'_y(x,y) = x-1,\ g'_x(x,y) = 2x,\ g'_y(x,y) = 2y.$$

Составим систему уравнений для нахождения приращений малых приращений $\Delta x_n, \Delta y_n$:

$$\begin{cases} y \cdot \Delta x_n + (x-1) \cdot \Delta y_n = 1 - y(x-1); \\ 2x \cdot \Delta x_n + 2y \cdot \Delta y_n = 4 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Выберем начальное приближение из геометрических соображений (рис. 9).

Система имеет два решения в областях:

$D_1: -2 < x < -1, -1 < y < 0; \quad D_2: 0 < x < 1, -2 < y < -1.$

Выберем начальное приближение из второй области. Пусть $x_0 = 0{,}5;\ y_0 = -1{,}8.$ Подставим нулевое приближение в систему уравнений и решим ее методом Крамера.

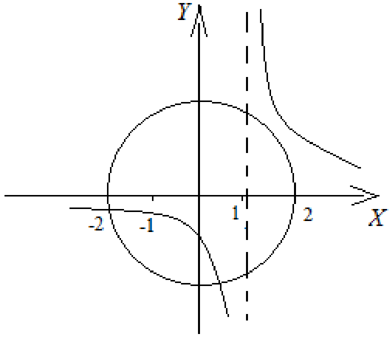

Рис. 9. Начальное приближение решения системы уравнений

$$\begin{cases} -1{,}8\cdot\Delta x_0 + (0{,}5-1)\cdot\Delta y_0 = 1+1{,}8(0{,}5-1); \\ \Delta x_0 + 2(-1{,}8)\cdot\Delta y_0 = 4-0.5^2-(-1{,}8)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}8\Delta x_0 - 0{,}5\cdot\Delta y_0 = 0{,}1; \\ \Delta x_0 - 3{,}6\Delta y_0 = 0{,}51. \end{cases}$$

$$\Delta x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}51 & -3{,}6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1{,}8 & -0{,}5 \\ 1 & -3{,}6 \end{vmatrix}} = -0{,}02; \quad \Delta y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -1{,}81 & 0{,}1 \\ 1 & -0{,}51 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1{,}8 & -0{,}5 \\ 1 & -3{,}6 \end{vmatrix}} = -0{,}14.$$

Найдем следующее приближение:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0{,}5 - 0{,}02 = 0{,}48; \\ y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -1{,}8 - 0{,}14 = -1{,}94. \end{cases}$$

Оценим точность вычислений:

$$|\Delta x_n| + |\Delta y_n| = 0{,}02 + 0{,}14 = 0{,}16 > \varepsilon.$$

Точность не достигнута. Осуществим еще одну итерацию.

$$\begin{cases} -1{,}94\cdot\Delta x_1+(0{,}48-1)\cdot\Delta y_1=1+1{,}94(0{,}48-1); \\ 2\cdot 0{,}48\cdot\Delta x_1+2\cdot(-1.94)\cdot\Delta y_1=4-0{,}48^2-(-1{,}94)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}94\Delta x_1-0{,}52\Delta y_1=0{,}0088; \\ 0{,}96\Delta x_0-3{,}88\Delta y_0=0{,}006. \end{cases}$$

$$\Delta x_1=\frac{\begin{vmatrix} 0{,}0088 & -0{,}52 \\ 0{,}006 & -3{,}88 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1{,}94 & -0{,}52 \\ 0{,}96 & -3{,}88 \end{vmatrix}}=-0{,}00495; \quad \Delta y_1=\frac{\begin{vmatrix} -1{,}94 & 0{,}0088 \\ 0{,}96 & -0{,}006 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1{,}94 & -0{,}52 \\ 0{,}96 & -3{,}88 \end{vmatrix}}=-0{,}00267.$$

Найдем второе приближение:

$$\begin{cases} x_2=x_1+\Delta x_1=0{,}48-0{,}00495=0{,}47505; \\ y_2=y_1+\Delta y_1=-1{,}94-0{,}00267=-1{,}94267. \end{cases}$$

Оценим точность вычислений:

$$|\Delta x_n|+|\Delta y_n|=0{,}00495+0{,}00267=0{,}00762<\varepsilon.$$

Точность достигнута. Решением системы является пара чисел:

$$\begin{cases} x=0{,}47505; \\ y=-1{,}94267. \end{cases}$$

2. **Метод простой итерации**. Пусть задана система двух нелинейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} f(x,y)=0; \\ g(x,y)=0. \end{cases}$

Представим каждую переменную в виде функции: $\begin{cases} x=\varphi(x,y); \\ y=\psi(x,y). \end{cases}$

Допустим, что она имеет единственный корень в некоторой области

$$D: a<x<-b,\ c<y<d.$$

На функции накладываются определенные условия сходимости к точному решению:

1) функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – непрерывные и дифференцируемые в области *D*;

2) начальное приближение $\varphi(x_0, y_0)$, $\psi(x_0, y_0)$ и последующие приближения принадлежат области *D*;

3) области *D* выполняются условия:

$$\text{а)} \begin{cases} |\varphi'_x| + |\varphi'_y| \le q_1 < 1; \\ |\psi'_x| + |\psi'_y| \le q_2 < 1; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} |\varphi'_x| + |\psi'_x| \le q_3 < 1; \\ |\varphi'_y| + |\psi'_y| \le q_4 < 1. \end{cases}$$

При выполнении всех условий решение системы уравнений проводится по формулам: $\begin{cases} x_{n+1} = \varphi(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = \psi(x_n, y_n). \end{cases}$

Это решение сходится к точному решению: $\begin{cases} x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}; \\ y = \lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1}. \end{cases}$

Итерационный процесс продолжается, пока не выполнится условие:

$$|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$$

Пример. Решить систему нелинейных уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

$$\begin{cases} y(x-1) = 1; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varphi(x, y) = 1 + \dfrac{1}{y}; \\ y = \psi(x, y) = -\sqrt{4 - x^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 0; \quad \varphi'_y = -\dfrac{1}{y^2}; \\ \psi'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad \psi'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} = q_1 < 1; \\ \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = q_2 < 1. \end{cases}$$

Выберем начальное приближение из второй области (рис. 9), как в методе Ньютона: $x_0 = 0{,}5;\ y_0 = -1{,}8.$ Вычисления будем проводить по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{y_n}; \\ y_{n+1} = -\sqrt{4 - x_n^2}; \end{cases}$$

Выполним несколько шагов и проверим выполнение условия окончания итерационного процесса.

$$1)\begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{1}{-1{,}8} = 0{,}444; \\ y_1 = -\sqrt{4 - 0{,}5^2} = -1{,}936; \end{cases} \qquad \left| 0{,}444 - 0{,}5 \right| + \left| -1{,}936 + 1{,}8 \right| = 0{,}136 ;$$

$$2)\begin{cases} x_2 = 1 + \dfrac{1}{-1{,}936} = 0{,}483; \\ y_2 = -\sqrt{4 - 0{,}444^2} = -1{,}95; \end{cases} \qquad \left| 0{,}483 - 0{,}444 \right| + \left| -1{,}936 + 1{,}95 \right| = 0{,}053.$$

$$3)\begin{cases} x_3 = 1 + \dfrac{1}{-1{,}95} = 0{,}487; \\ y_3 = -\sqrt{4 - 0{,}483^2} = -1{,}941; \end{cases} \qquad \left| 0{,}487 - 0{,}483 \right| + \left| -1{,}95 + 1{,}941 \right| = 0{,}013.$$

$$4)\begin{cases} x_3 = 1 + \dfrac{1}{-1{,}941} = 0{,}485; \\ y_3 = -\sqrt{4 - 0{,}487^2} = -1{,}940; \end{cases} \qquad \left| 0{,}485 - 0{,}487 \right| + \left| -1{,}941 + 1{,}940 \right| = 0{,}003.$$

Предложенная точность достигнута. Подставим полученные значения неизвестных в систему уравнений. Получим приблизительные равенства:

$$\begin{cases} 0{,}9991 \approx 1; \\ 3{,}9988 \approx 4. \end{cases} \qquad \text{Ответ: } \begin{cases} x = 0{,}485; \\ y = -1{,}94. \end{cases}$$

Лабораторная работа № 5

Выбрать начальное приближение графическим методом и решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона и методом простой итерации (табл. 20)

Таблица 20

№ вар.	Метод Ньютона	Метод простой итерации
1	$\begin{cases} 2x^2+3y^2-6y-4=0; \\ x^2-3y^2+4x-2=0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sin(x-0{,}6)-y-1{,}6=0; \\ 3x-\cos y-0{,}9=0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x^2+y^2-6y-4=0; \\ x^2-y^2+4x-5=0. \end{cases}$	$\begin{cases} \cos(x-0{,}4)-y-1{,}5=0; \\ 4x+\sin y-0{,}93=0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-2=0; \\ e^x-y=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+4y^2-4=0; \\ x^2+36y^2-4x-24y+4=0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x^2+2y^2+2x-4y-2=0; \\ e^x-0{,}5y=0. \end{cases}$	$\begin{cases} \cos(x-0{,}8)-y-1=0; \\ 4x-3\sin y=0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} y-0{,}5\sin x-1=0; \\ y+2x-1=0. \end{cases}$	$\begin{cases} y-0{,}8\cos(x-1)=0; \\ e^{-y}-x=0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4x^2+2y^2-6y-2=0; \\ x^2-y^2+4x-5=0. \end{cases}$	$\begin{cases} y-2\sin x+3=0; \\ y+x-1=0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sqrt{x}-y=0; \\ 9x^2+4y^2-36=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2y+x-1=0; \\ 0{,}2y^2+x-1=0. \end{cases}$

8	$\begin{cases} \sqrt{x} - 3y = 0; \\ y - \sin x = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} y - 3\ln x - 1 = 0; \\ y^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 0; \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} y - 0{,}5tgx - 1 = 0; \\ y^2 + 10x - 10 = 0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} y^2 - tgx = 0; \\ 4y - \sqrt{8 - x^2} = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} y - 2\sin 2x + 0{,}2 = 0; \\ y^2 + x^2 - 1 = 0. \end{cases}$

7. Численное интегрирование

1. Формула прямоугольников.
2. Формула трапеции.
3. Формула Симпсона.

Пусть функция $y = f(x)$ – непрерывная и дифференцируемая *n* раз на отрезок $[a;b]$. Разобьем отрезок на *n* частей с шагом *h*: $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Для приближенного вычисления интеграла можно использовать формулы прямоугольников, трапеции и Симпсона.

1) **Формула прямоугольников** (рис. 10):

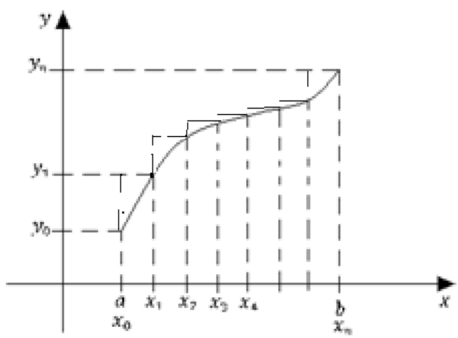

Рис. 10. Численное интегрирование по формуле прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + R_n$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + R_n,$$

где остаток $R_n \le \frac{h}{2}(b-a)M$, $M = \max\left|f'(x)\right|$ на отрезке $[a;b]$ – погрешность вычислений. Можно погрешность вычислений вычислять по формуле:

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), \quad \xi \in [a;b].$$

2) **Формула трапеций** (рис. 11):

$$\int_b^a f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n$$

или

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right) + R_{n.},$$

где остаток $R_n \le \frac{h^2}{12}(b-a)M$, $M = \max\left|f''(x)\right|$ на отрезке $[a,b]$.

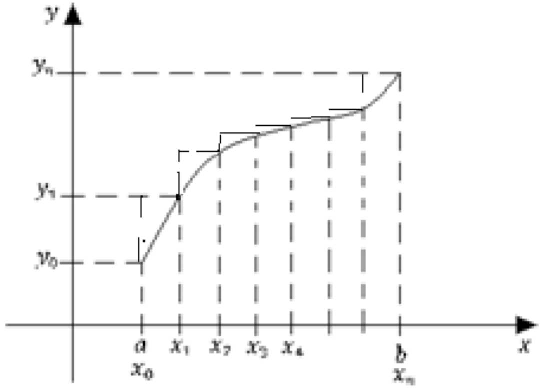

Рис. 11. Численное интегрирование по формуле трапеций

Можно погрешность вычислений вычислять по формуле:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12} n f''(\xi), \quad \xi \in [a;b].$$

3. **Формула Симпсона** (рис. 12):

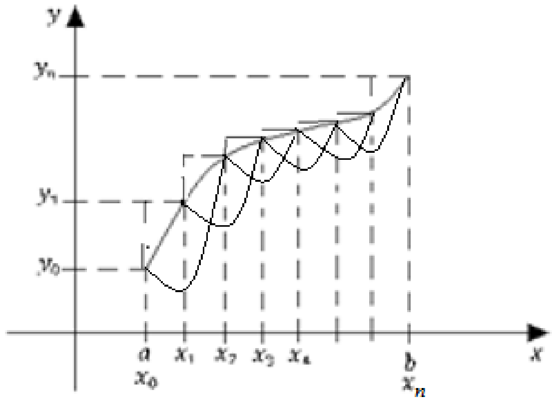

Рис. 12. Численное интегрирование по формуле Симпсона

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1})\right) + R_n,$$

где остаток $R_n = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b].$

Пример. Вычислить интеграл и оценить погрешность вычислений (разбить отрезок на 10 частей): $I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$

1. Вычислим интеграл аналитически:

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right) \approx 1,219$$

2. Найдем шаг разбиения отрезка: $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$

3. Вычислим значения абсцисс:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = x_0 + h = 1 + 0,1 = 1,1; \quad x_2 = x_1 + h = 1,2, ..., x_{i+1} = x_i + h.$$

4. Найдем значения функции $y = \sqrt{x}$ в точках x_i:

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 1$$

$$x_1 = 1,1 \qquad y_1 = \sqrt{1,1} = 1,049$$

$$x_2 = 1,2 \qquad y_2 = \sqrt{1,2} = 1,095$$

$$x_3 = 1,3 \qquad y_3 = \sqrt{1,3} = 1,140$$

$$x_4 = 1,4 \qquad y_4 = \sqrt{1,4} = 1,183$$

$$x_5 = 1,5 \qquad y_5 = \sqrt{1,5} = 1,225$$

$$x_6 = 1,6 \qquad y_6 = \sqrt{1,6} = 1,265$$

$$x_7 = 1,7 \qquad y_7 = \sqrt{1,7} = 1,304$$

$$x_8 = 1,8 \qquad y_8 = \sqrt{1,8} = 1,342$$

$$x_9 = 1,9 \qquad y_9 = \sqrt{1,9} = 1,378$$

$$x_{10} = 2 \qquad y_{10} = \sqrt{2} = 1,414$$

5. Используем формулу прямоугольников:

$$I = \int_1^2 \sqrt{x}dx = 0{,}1(1 + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265 +$$

$$+ 1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378) = 0{,}1 \cdot 11{,}981 \approx 1{,}20$$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ на } [1; 2]$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \quad f'(2) = \frac{1}{4} \quad M = \frac{1}{2}$$

$$R_n \le \frac{0{,}1}{2}(2-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025$$

Ответ: $I \approx 1{,}20 \pm 0{,}025.$

6. Используем формулу трапеций:

$$I = \int_1^2 \sqrt{x}dx = 0{,}1(0{,}5 + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265 + 1{,}225 + 1{,}265 +$$

$$= 1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378 + 1{,}414/2) = 1{,}218$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$f''(1) = -\frac{1}{4}, \quad f''(2) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}, \quad M = \frac{1}{4},$$

$$R_n = -\frac{0.1^2}{12}(2-1)\frac{1}{4} = -\frac{0.01}{48} = -0.0002.$$

Ответ: $I = 1{,}218 \pm 0{,}0002.$

7. Используем формулу Симпсона:

$$I=\int_1^2 \sqrt{x}dx=\frac{0.1}{3}(1+1{,}414+2(1{,}095+1{,}183+1{,}265+1{,}342)+$$

$$+4(1{,}049+1{,}140+1{,}225+1{,}304+1{,}378))=\frac{0{,}1}{3}\cdot 36{,}568=1{,}21893.$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},\quad f^{(4)}(x)=\frac{3}{8}\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)'=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}.$$

$$f^{(4)}(1)=-\frac{15}{16}=0{,}9375,\quad f^{(4)}(2)=-\frac{15}{16\sqrt{2^7}}=-\frac{15}{128\sqrt{2}}=0{,}083.$$

$$M=0{,}9375,\quad R_n=\frac{0.1^4}{180}(2-1)0{,}9375=0{,}0000005.$$

Ответ: $I=1.21893\pm 0.0000005.$

Лабораторная работа № 6

1. Вычислить заданный интеграл аналитически.
2. Вычислить заданный интеграл по формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона, сравнить результаты.

Варианты заданий приведены в табл. 21.

Таблица 21

№ вар.	Интеграл	№ вар.	Интеграл
1	$\int_1^3 x^3dx$	2	$\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

3	$\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$	4	$\int_0^2 (x-2)\,dx$
5	$\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$	6	$\int_1^2 \sqrt[3]{x}dx$
7	$\int_1^2 \left(x^2-1\right)dx$	8	$\int_0^1 \left(x^2-x\right)dx$
9	$\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$	10	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

8. Численное аппроксимирование функций

Аппроксимация функции. Пусть задана таблица чисел $(x; y)$ (табл. 22).

Таблица 82

x_i	x_1	x_2	….	x_n
y_i	y_1	y_2	….	y_n

4.

По этим данным подберем вид эмпирической формулы по виду графика. Построим точки на плоскости. Проведем аппроксимирующую кривую по возможности близко к полученным точкам (рис. 13). Оценим отклонения значений экспериментальных данных и полученных по выбранной формуле:

$$\Delta = y_{Э} - y_{Т},\ \ y_{Т} = f(x, a_1, a_2, ..., a_k).$$

Используем метод наименьших квадратов для оценки минимума квадратов отклонений: $F = \sum_{i=1}^{n}\left(y_{Э_i} - y_{T_i}\right)^2 \rightarrow \min \cdot$

Экстремум функции находим при условии, что частные производные функции F по всем неизвестным равны нулю: $\dfrac{\partial F}{\partial a_i} = 0.$

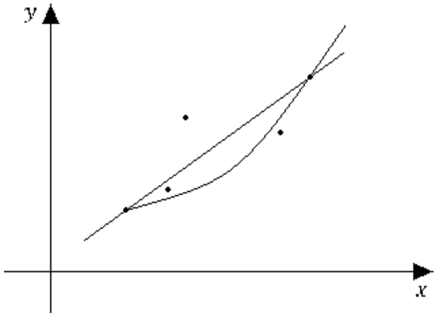

Рис. 13. Аппроксимирующая кривая

Допустим наши экспериментальные данные аппроксимируются линейной функцией, графиком которой является прямая:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i.$$

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)(-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)(-x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Пример. Пусть таблица данных (табл. 23) аппроксимируется линейной функцией: $y_i = a_0 + a_1 x_i$.

Таблица 23

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

Построим точки $(x_i; y_i)$ на плоскости. Данные точки хорошо укладываются на прямую (рис. 14). Выберем линейную аппроксимацию:

$$y_T = a_0 + a_1 x$$

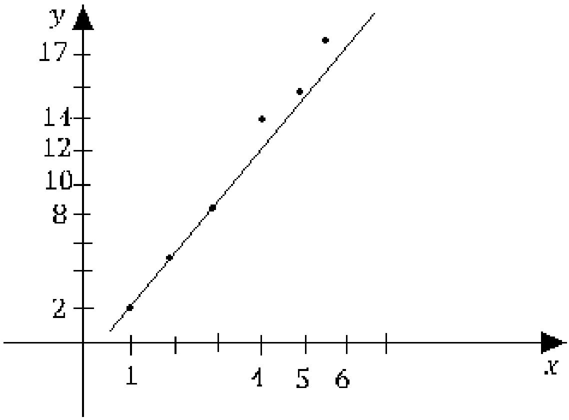

Рис. 14. Экспериментальные данные

Составим необходимые суммы:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 1+2+3+4+5+6 = 21$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 2+4,9+7,9+11,1+14,1+17 = 57$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 2+2\cdot 4,9+3\cdot 7,9+4\cdot 11,1+5\cdot 14,1+6\cdot 17 = 252,4$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6a_0 + 21a_1 = 57 \\ 21a_0 + 91a_1 = 252,4 \end{cases}$$

Найдем решение системы уравнений:

$$a_0 = \frac{57-21a_1}{6}$$

$$\frac{21(57-21a_1)}{6} + 91a_1 = 252,4$$

$$1197 - 441a_1 + 546a_1 = 1514,4$$

$$105a_1 = 317,4$$

$$a_1 = \frac{317,4}{105} = 3,0229$$

$$a_0 = \frac{57-21\cdot 3,0229}{6} = \frac{57-63,4809}{6} = -\frac{6,4809}{6} = -1,0802$$

Прямая, которая описывает экспериментальные данные, имеет вид:

$$y_T = -1,0802 + 3,0229x\ .$$

Найдем значения $y_{\text{Т}}$ в точках x_i и сравним значения $y_{\text{Э}}$ и $y_{\text{Т}}$ (табл. 24).

Ошибку вычислений найдем по формуле:

$$\Delta = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(y_{\text{Э}} - y_{\text{Т}}\right)^2 = \frac{0,0314}{6} = 0,0053.$$

Таблица 24

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$y_э$	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17	
y_T	1,943	4,966	7,989	11,01	14,03	17,06	
$y_э - y_T$	0,057	0,066	0,089	-0,089	-0,066	0,057	
$(y_э - y_T)^2$	0,0033	0,004	0,008	0,008	0,004	0,003	0,031

Допустим, наши экспериментальные данные аппроксимируются квадратичной функцией, графиком которой является парабола:

$$y_i = a_0 + a_1x_i. + a_2x_i^2.$$

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2\right)^2 \to \min$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2\right)(-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)\left(-x_i\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)\left(-x_i^2\right)$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum x_i y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Лабораторная работа № 7

1. Найти коэффициенты a_0, a_1, a_2 аппроксимирующей функции $y = a_0 + a_1\varphi(x_i) + a_2\varphi(x_i)$ (табл. 25) и методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры для предложенной зависимости переменных.

2. Построить график полученной функции $y = a_0 + a_1\varphi(x_i) + a_2\varphi(x_i)$. Сравнить кривые, построенные по экспериментальным данным и по полученной функции.

Оценить погрешность вычислений.

Таблица 25

№ вар.	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	x_i	y_i	№ вар.	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	x_i	y_i
1	x	$\frac{1}{x+1}$	0 0,2 0,4 0,6 0,8	5,51 4,75 4,53 4,40 4,46	2	$\sqrt{x}$	$\ln x$	1 1,2 1,4 1,6 1,8	11,9 12,3 12,5 13,1 13,3
3	$\frac{1}{x}$	x^2	0,1 0,2 0,4 0,6 0,8	10,1 5,2 2,53 1,4 1,32	4	x^2	$\cos x$	0 0,2 0,4 0,6 0,8	2,1 2,01 2,3 2,74 3,25
5	x	$\sqrt{x}$	0,1 0,2 0,3 0,4 0,5	11,4 1,63 1,82 2,1 3,19	6	x	x^2	0,2 0,4 0,6 0,8 1	6,3 3,2 1,62 1,3 0,9
7	e^x	$\ln x$	0,1 0,2 0,3 0,4 0,5	-7,7 -5,6 -4,4 -3,6 -2,9	8	$\sin x$	$\cos x$	1 2 3 4 5	1,3 1,4 1,32 1,2 1,08
9	$\sqrt{x}$	x	1 2 3 4 5	4,02 5,31 6,7 8,4 9,0	10	$\ln x$	x	0,1 0,2 0,3 0,4 0,5	-10 -6,8 -4,8 -3,2 -2

9. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений Методом Эйлера

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (ОДУ) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ при начальных условиях: $y(x_0) = y_0$.

Зададим небольшой шаг $x = x_0 + h.$. Запишем аналог ОДУ, заменив

$$dy \approx y - y_0, \quad dx \approx x - x_0$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f(x_0; y_0); \; y - y_0 = f(x_0; y_0)(x - x_0)$$

Пусть $h = x - x_0$. Тогда $y - y_0 = f(x_0; y_0)h$

$$y = y_0 + f(x_0; y_0)h$$

Полученное уравнение является основой для метода Эйлера.

Метод Эйлера является методом первого порядка, точность метода зависит от шага *h*. На практике оценка погрешности проводится по правилу Рунге:

$$\max_i \left| y_i^h - y_i^{0,5h} \right| = \Delta,$$

где Δ - оценка погрешности с шагом 0,5*h*.

Пример. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера:

$$y' - \frac{3y}{x} = 4x^3; \quad y(-1) = 3.$$

1. Найдем точное решение дифференциального уравнения. Рассмотрим соответствующее неоднородному уравнению однородное ОДУ:

$$y' - \frac{3y}{x} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} \qquad \ln|y| = 3\ln|x| + \ln|C| \qquad y = Cx^3.$$

1. Найдем решение ОДУ, используя метод Эйлера. Пусть

$$h = 0,1$$

$$x_0 = -1; \quad y_0 = 3$$

$$x_1 = x_0 + h = -1 + 0,1 = -0,9$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0).$$

Переписываем исходное ОДУ в виде $y' = f(x; y)$. В нашем случае:

$$y' - \frac{3y}{x} = 4x^3, \quad f(x,\ y) = \frac{3y}{x} + 4x^3.$$

$$f(x_0,\ y_0) = f(-1;\ 3) = \frac{3 \cdot 3}{-1} + 4(-1)^3 = -9 - 4 = -13$$

$$y_1 = 3 + 0,1 \cdot (-13) = 3 - 1,3 = 1,7$$

$$x_2 = x_1 + h = -0,9 + 0,1 = -0,8$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1,\ y_1)h$$

$$f(x_1,\ y_1) = f(-0,9;\ 1,7) = \frac{3 \cdot 1,7}{-0,9} + 4(-0,9)^3 = -8,583$$

$$y_2 = 1,7 + 0,1 \cdot (-8,583) = 0,842$$

$$x_3 = x_2 + h = -0,8 + 0,1 = -0,7$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2,\ y_2)h$$

$$f(x_3,\ y_3) = f(-0,8;\ 0,842) = \frac{3 \cdot 0,842}{-0,8} + 4\,(-0,8)^3 = -5,206$$

$$y_3 = 0{,}842 + 0{,}1 \cdot (-5{,}206) = 0{,}321$$

$$x_4 = x_3 + h = -0{,}7 + 0{,}1 = -0{,}6$$

$$y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h$$

$$f(x_4, y_4) = f(-0{,}7;\ 0{,}321) = \frac{3 \cdot 0{,}321}{-0{,}7} + 4(-0{,}7)^3 = -2{,}75$$

$$y_4 = 0{,}321 + 0{,}1 \cdot (-2{,}75) = 0{,}046$$

$$x_5 = x_4 + h = -0{,}6 + 0{,}1 = -0{,}5$$

$$y_5 = y_4 + f(x_4, y_4)h$$

$$f(x_5, y_5) = f(-0{,}6;\ 0{,}046) = \frac{3 \cdot 0{,}046}{-0{,}6} + 4(-0{,}6)^3 = -0{,}634$$

$$y_5 = 0{,}046 + 0{,}1 \cdot (-0{,}634) = 0{,}017.$$

Соберем полученные данные в таблицу (табл. 26):

Таблица 26

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5
y	3	1,7	0,842	0,321	0,046	0,017

Общее решение исходного ОДУ будем искать, используя метод вариации:

$$y = x^3 \cdot c(x)$$

$$y' = 3x^2 \cdot c(x) + x^3 \cdot c'(x)$$

$$3x^2 \cdot c(x) + x^3 \cdot c'(x) - \frac{3 \cdot x^3 \cdot c(x)}{x} = 4x^3$$

$$x^3 \cdot c'(x) = 4x^3$$

$$c'(x) = 4$$

$$c(x) = 4x + c$$

$$y = (4x + c) \cdot x^3$$

$$y = 4x^4 + cx^3 - \textit{общее решение}$$

$$c - ? \qquad x = -1; \qquad y = 3$$

$$3 = 4 \cdot (-1)^4 + c(-1)^3$$

$$3 = 4 - c \Rightarrow c = 1$$

$$y = 4x^4 + x^3 - \textit{частное решение}$$

Найдем несколько значений функции по найденной формуле (табл. 27).

Таблица 27

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5
y	3	1,8954	1,1264	0,6174	0,3024	0,125

Построим кривые по данным табл. 26, 27 (рис. 15).

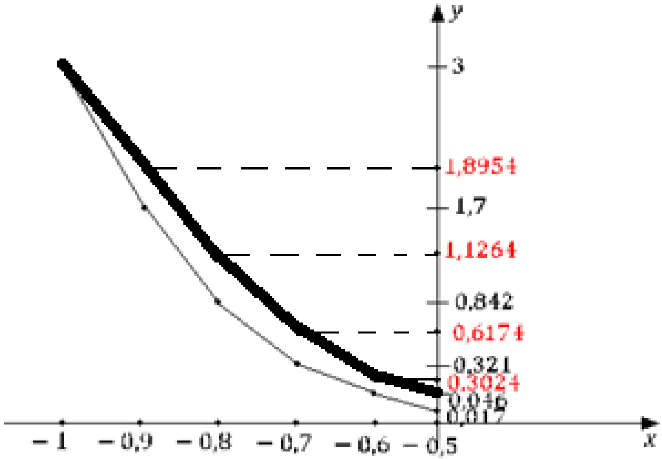

Рис.15. Экспериментальная и теоретическая кривые

«Жирная» кривая соответствует аналитическим данным табл. 26, «тонкая» кривая соответствует данным табл. 27, данным, полученным по методу Эйлера.

Лабораторная работа № 8

1. Решить дифференциальное уравнение аналитически.
2. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера.
3. Сравнить полученные результаты. Построить графики полученных решений на плоскости.
4. Найти аппроксимирующую полученное решение функцию. Построить график функции.

Варианты заданий предложены в табл. 28:

Таблица 28

№ вар.	Дифференциальное уравнение	Начальное условие	Ответ
1	$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$	$y(1) = 0$	$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$

2	$\left(e^x+1\right)y' = ye^x$	$y(0)=2$	$y=1+e^x.$
3	$\left(x+2y\right)dx-xdy=0$	$y(2)=2$	$y=x^2-x.$
4	$xy'+y=4x^3+3x^2$	$y(1)=2$	$y=x^3+x^2.$
5	$y'-\frac{3y}{x}=-x$	$y(-1)=2$	$y=x^2-x^3.$
6	$y'-\frac{y}{x}=y$	$y(2)=2$	$y=x^2-x.$
7	$\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x$	$y\left(\sqrt{2}\right)=1$	$y=x^2-1.$
8	$x^2y'=2xy+3$	$y(1)=-1$	$y=-\frac{1}{x}.$
9	$xy'+y=\ln x+1$	$y(1)=0$	$y=\ln x.$
10	$y'-\frac{3y}{x}=x^3$	$y(0)=0$	$y=x^4.$

10. Вопросы к зачету

1. Что такое моделирование?
2. Основные этапы создания моделей.
3. Виды математических моделей.
4. Требования к математическим моделям.
5. Задача линейного программирования. Общая форма. Суть задачи.
6. Каноническая и стандартная формы ЗЛП.
7. Оптимальный план задачи. Целевая функция.
8. Геометрическое решение ЗЛП. Допустимый многоугольник.
9. Линия уровня. Градиент целевой функции. Точки экстремумов.

10. Графическое решение ЗЛП. Понятие базисных и свободных переменных.
11. Симплекс-метод решения ЗЛП. Опорное решение.
12. Процедура перехода к новому опорному плану.
13. Алгоритм вычислений по симплекс-методу.
14. Решение нелинейных алгебраических уравнений методом половинного сечения.
15. Графическое отделение корней уравнения.
16. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона.
17. Решение систем нелинейных уравнений методом простой итерации.
18. Численное интегрирование по формуле прямоугольников.
19. Численное интегрирование по формуле трапеции.
20. Численное интегрирование по формуле Симпсона.
21. Численное аппроксимирование функции. Аппроксимация прямой и квадратичной функциями.
22. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера.
23. Сравнение результатов вычислений.

11. Библиографический список

1. *Амосов, А. А.* Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, М. В. Конченова. – М.: Лань, 2014. – 672 с.
2. *Демидович, Б. П.* Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Высшая школа, 1966. – 664 с.
3. *Воробьева Г. Н., Данилова А. Н.* Практикум по вычислительной математике / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
4. *Каханер, Д.* Численные методы и программное обеспечение / Д. Канахер, К. Моулер, С. Неш. – М.: Мир, 1998. – 575 с.

Содержание

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Окунева Галина Леонидовна
Рябцева Светлана Васильевна