Контрольная работа № 1

$$N = 3$$

1. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -N \\ N & x+5 & 2-x \\ 3 & -N & 2 \end{vmatrix} \le 4$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & x+5 & 2-x \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \le 4$$

$$4(x+5) + 27 + 9(x+5) + 6(2-x) \le 4$$

$$4x + 20 + 27 + 9x + 45 + 12 - 6x \le 4$$

$$7x + 104 \le 4$$

$$7x \le 4 - 104$$

$$7x \le -100$$

$$x \le -\frac{100}{7}$$

Ответ: $x \le -\frac{100}{7}$

2. Исследовать систему на совместность, найти общее решение и одно частное

$$\begin{cases} (N+1)x - y + 2z = 2 \\ 4x - (N+1)y + (N+1)z = N+1 \\ x + (N+1)y = 0 \\ 5x + (N+1)z = N+1 \end{cases}.$$

Решение:

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 2 \\ 4x - 4y + 4z = 4 \\ x + 4y = 0 \\ 5x + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -17 & 2 & 2 \\ 0 & -20 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & -17 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & -1{,}4 & -1{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)}$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) Разделили вторую строку на 4.
(2) Поменяли местами первую и третью строки
(3) Умножили первую строку на -1 и сложили со второй строкой. Умножили первую строку на -4 и сложили с третьей строкой. Умножили первую строку на -5 и сложили с четвертой строкой.
(4) Разделили вторую строку на -5, а четвертую строку разделили на -20
(5) Умножили вторую строку на 17 и сложили с третьей строкой. Умножили вторую строку на -1 и сложили с четвертой строкой.
(6) Разделили третью строку на -1,4.

Получили систему в которой число неизвестных равно числу уравнений. Система совместна и определена.

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ y - 0{,}2z = -0{,}2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы

$$y - 0{,}2 = -0{,}2$$

$$y = 0$$

Из первого уравнения системы

$$x + 0 = 0$$

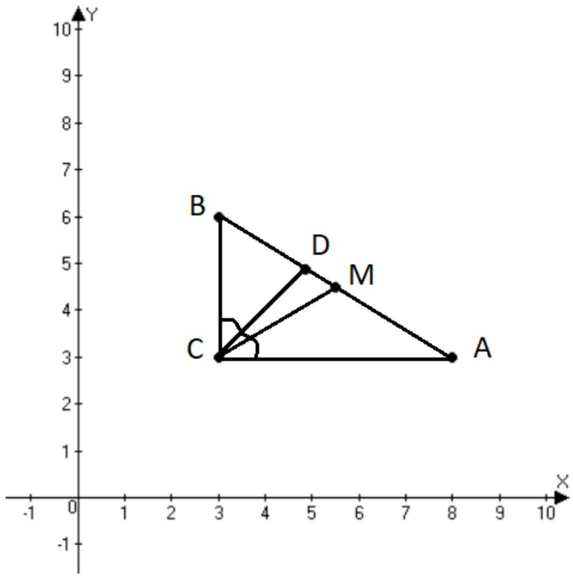
$$x = 0$$

Ответ: Система имеет единственное решение $(0, 0, 1)$

3. В треугольнике с вершинами $C(N, N), A(8, N), B(N, 6)$ определить длину медианы CM и биссектрисы CD.

$$A(8,3), B(3,6), C(3,3)$$

Решение:



Найдем координаты точки M как середины отрезка AB

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8+3}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$M(5{,}5; 4{,}5)$$

$$|CM| = \sqrt{(5{,}5-3)^2 + (4{,}5-3)^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}25 + 2{,}25} = \sqrt{8{,}5}$$

Биссектриса треугольника делит третью сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$$

Найдем длины сторон треугольника

$$|BC| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|AC| = \sqrt{(3-8)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|AB| = \sqrt{(3-8)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Пусть $|BD| = x$, тогда $|AD| = \sqrt{34} - x$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{\sqrt{34} - x}$$

$$5x = 3\sqrt{34} - 3x$$

$$8x = 3\sqrt{34}$$

$$x = \frac{3\sqrt{34}}{8}$$

$$|BD| = \frac{3\sqrt{34}}{8}$$

Найдем косинус угла B из треугольника ABC

$$\cos B = \frac{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right|}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{0; -3\}$$

$$\overrightarrow{BA} = \{5; -3\}$$

$$\cos B = \frac{0 \cdot 5 - 3 \cdot (-3)}{3 \cdot \sqrt{34}} = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Тогда по теореме косинусов для треугольника CBD

$$CD^2 = CB^2 + BD^2 - 2 \cdot CB \cdot BD \cdot \cos B$$

$$CD^2 = 3^2 + \left(\frac{3\sqrt{34}}{8}\right)^2 - 2\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{34}}{8}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = 9 + \frac{9\cdot 34}{64} - \frac{54}{8} =$$

$$= 9 + \frac{153}{32} - \frac{54}{8} = \frac{288 + 153 - 216}{32} = \frac{225}{32}$$

$$|CD| = \sqrt{\frac{225}{32}} = \frac{15}{4\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

Ответ: $|CM| = \sqrt{8{,}5},\ |CD| = \frac{15\sqrt{2}}{8}$

4. Найти расстояние между центрами окружностей $(x^2+y^2)=(N+1)^2, \quad x^2+y^2-8x-4(N+1)^2=0$

Решение:

$$x^2 + y^2 = 4^2,\ \ x^2 + y^2 - 8x - 4\cdot 4^2 = 0$$

Приведем уравнение второй окружности к каноническому виду

$$x^2 + y^2 - 8x - 4\cdot 4^2 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + y^2 - 64 = 0$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 80$$

Центр окружности $x^2 + y^2 = 4^2$ точка с координатами $O_1(0{,}0)$

Центр окружности $(x-4)^2 + y^2 = 80$ точка с координатами $O_2(4{,}0)$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \{4{,}0\}$$

$$\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

Ответ: $d = 4$

5. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(N+1,-4\sqrt{3}), M_2(-1,(N+1)\sqrt{5})$.

$$M_1\left(4,-4\sqrt{3}\right),\qquad M_2\left(-1;4\sqrt{5}\right)$$

Решение:

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Подставляем координаты точек

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{80}{b^2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{80}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения, первое уравнение

$$\frac{77}{b^2} = \frac{15}{16}$$

$$b^2 = \frac{77 \cdot 16}{15} = \frac{1232}{15}$$

Подставим во второе уравнение системы найденное значение

$$\frac{1}{a^2} + \frac{80}{\frac{1232}{15}} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{80 \cdot 15}{1232} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{5 \cdot 15}{77} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{75}{77} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} = 1 - \frac{75}{77}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2}{77}$$

$$a^2 = \frac{77}{2}$$

$$\frac{x^2}{\frac{77}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1232}{15}} = 1$$

Ответ: $\frac{x^2}{\frac{77}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1232}{15}} = 1$

6. Определить, принадлежат ли заданные точки $A(1;\,3;\,–5)$, $B(3;\,–2;\,4)$, $C(N+1;\,4;\,N\text{-}3)$, $D(N;\,6;\,4–N)$ одной плоскости.

$$A(1;3;-5), B(3;-2;4), C(4;4;0), D(3;6;1)$$

Решение:

Через три точки проходит плоскость и только одна. Запишем уравнение плоскости проходящей через точки A, B, C.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+5 \\ 3-1 & -2-3 & 4+5 \\ 4-1 & 4-3 & 0+5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+5 \\ 2 & -5 & 9 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$-25(x-1)+2(z+5)+27(y-3)+15(z+5)-9(x-1)-10(y-3)=0$$

$$-34(x-1)+17(z+5)+17(y-3)=0$$

$$2(x-1)-(z+5)-(y-3)=0$$

$$2x-2-z-5-y+3=0$$

$$2x-y-z-4=0$$

Проверим принадлежит ли точка D данной плоскости.

$$2\cdot 3-6-1-4\neq 0$$

$$-5\neq 0$$

Координаты точки D не удовлетворяют уравнению плоскости. Значит точка D не лежит в данной плоскости.

Ответ: точки не лежат в одной плоскости.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-(N+1);3)$ и линию пересечения плоскостей $(N+1)x-y+(N+1)z-6=0$ и $3x+(N+1)y-z+3=0$.

$$M(1;-4;3) \quad \begin{cases} 4x-y+4z-6=0 \\ 3x+4y-z+3=0 \end{cases}$$

Решение:

Найдем две точки лежащие на линии пересечения плоскостей. Для этого z возьмем произвольно, а x и y вычислим из системы.

Пусть $z=0$

$$\begin{cases} 4x-y-6=0 \\ 3x+4y+3=0 \end{cases}; \begin{cases} 4x-y=6 \\ 3x+4y=-3 \end{cases}; \begin{cases} 16x-4y=24 \\ 3x+4y=-3 \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем

$$19x=21$$

$$x=\frac{21}{19}$$

Из первого уравнения системы

$$4\cdot\frac{21}{19}-y=6$$

$$y=\frac{84}{19}-6=-\frac{30}{19}$$

Получили точку

$$M_1\left(\frac{21}{19};\ -\frac{30}{19};0\right)$$

Пусть $z = 3$

$$\begin{cases}4x - y + 6 = 0\\ 3x + 4y = 0\end{cases};\ \begin{cases}4x - y = -6\\ 3x + 4y = 0\end{cases};\ \begin{cases}16x - 4y = -24\\ 3x + 4y = 0\end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем

$$19x = -24$$

$$x = -\frac{24}{19}$$

Из первого уравнения системы

$$4 \cdot \left(-\frac{24}{19}\right) - y = -6$$

$$y = -\frac{96}{19} + 6 = \frac{18}{19}$$

Получили точку

$$M_2\left(-\frac{24}{19};\ \frac{18}{19};3\right)$$

Запишем уравнение плоскости по трем точкам M, M_1, M_2

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-3 \\ \frac{21}{19}-1 & -\frac{30}{19}+4 & 0-3 \\ -\frac{24}{19}-1 & \frac{18}{19}+4 & 3-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-3 \\ \frac{2}{19} & \frac{46}{19} & -3 \\ -\frac{43}{19} & \frac{94}{19} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{2}{19} \cdot \frac{94}{19} \cdot (z-3) + \frac{129}{19}(y+4) + \frac{46}{19} \cdot \frac{43}{19} \cdot (z-3) + \frac{282}{19}(x-1) = 0$$

$$188(z-3) + 2451(y+4) + 1978(z-3) + 5358(x-1) = 0$$

$$5358(x-1) + 2451(y+4) + 2166(z-3) = 0$$

$$1786(x-1) + 817(y+4) + 722(z-3) = 0$$

$$1786x - 1786 + 817y + 3268 + 722z - 2166 = 0$$

$$94x + 43y + 38z - 36 = 0$$

Ответ: $94x + 43y + 38z - 36 = 0$

8. Вычислить производные: а) $y=\frac{\sin^2(x(N+1))}{ctgx+1}+\frac{\cos^{(N+1)}x}{tgx+1}$, б) $y=(tgx)^{\sin^{(N+1)}x}$,

в) $y=\frac{\ln(x^2+N)}{2}+\frac{N-x}{4(x^2+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Решение:

а)

$$y'=\left(\frac{\sin^2 4x}{ctgx+1}+\frac{\cos^4 x}{tgx+1}\right)'=\left(\frac{\sin^2 4x}{ctgx+1}\right)'+\left(\frac{\cos^4 x}{tgx+1}\right)'=$$

$$=\frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot 4\cdot(ctgx+1)-\sin^2 4x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{(ctgx+1)^2}+$$

$$+\frac{4\cos^3 x\cdot(-\sin x)\cdot(tgx+1)-\cos^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{(tgx+1)^2}=\frac{8\sin 4x\cos 4x(ctgx+1)+\frac{\sin^2 4x}{\sin^2 x}}{(ctgx+1)^2}-$$

$$-\frac{4\cos^3 x\sin x\,(tgx+1)+\cos^2 x}{(tgx+1)^2}=\frac{8\sin 4x\cos 4x\sin^2 x\,(ctgx+1)+\sin^2 4x}{\sin^2 x\,(ctgx+1)^2}-$$

$$-\frac{4\cos^3 x\sin x\,(tgx+1)+\cos^2 x}{(tgx+1)^2}$$

б)

$$y=(tgx)^{\sin^4 x}$$

$$\ln y=\ln(tgx)^{\sin^4 x}=\sin^4 x\cdot\ln(tgx)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\sin^4 x)'\cdot\ln(tgx)+\sin^4 x\cdot(\ln(tgx))'=4\sin^3 x\cos x\ln(tgx)+\sin^4 x\cdot\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=4\sin^3 x\cos x\ln(tgx)+\frac{\sin^4 x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}=4\sin^3 x\cos x\ln(tgx)+\frac{\sin^3 x}{\cos x}$$

$$y'=y\left(4\sin^3 x\cos x\ln(tgx)+\frac{\sin^3 x}{\cos x}\right)=(tgx)^{\sin^4 x}\left(4\sin^3 x\cos x\ln(tgx)+\frac{\sin^3 x}{\cos x}\right)$$

в)

$$y=\frac{\ln(x^2+3)}{2}+\frac{3-x}{4(x^2+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$y'=\left(\frac{\ln(x^2+3)}{2}+\frac{3-x}{4(x^2+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'=\left(\frac{\ln(x^2+3)}{2}\right)'+\left(\frac{3-x}{4(x^2+2)}\right)'-$$

$$-\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{-(x^2+2)-(3-x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{x}{x^2+3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{-x^2-2-6x+2x^2}{(x^2+2)^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{2+x^2}=\frac{x}{x^2+3}+\frac{x^2-6x-2}{4(x^2+2)^2}-\frac{1}{4(x^2+2)}=$$

$$= \frac{x}{x^2+3} + \frac{x^2-6x-2}{4(x^2+2)^2} - \frac{x^2+2}{4(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+3} + \frac{-6x-4}{4(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+3} - \frac{3x+2}{2(x^2+2)^2}$$

9. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = e^{x^2-4x+N}$.

$$y = e^{x^2-4x+3}$$

Решение:

Найдем точки экстремума функции.

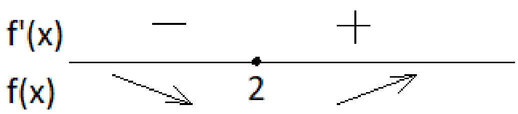
$$y' = \left(e^{x^2-4x+3}\right)' = e^{x^2-4x+3}(2x-4)$$

$$e^{x^2-4x+3}(2x-4) = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

Определим знаки производной.



$(-\infty; 2)$ – функция убывает

$(2; +\infty)$ – функция возрастает

10. Провести полное исследование и построить график функции $y = \ln(2(N+1) - x^2)$.

$$y = \ln(8 - x^2)$$

Решение:

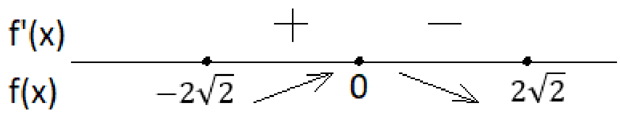
1. Область определения
$$8 - x^2 > 0$$
$$x^2 < 8$$
$$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$
$$x \in \left(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$$
2. Функция четная
$$f(-x) = \ln(8 - (-x)^2) = \ln(8 - x^2) = f(x)$$
3. Пересечение с осями:
$x = 0 \Rightarrow y = \ln 8 = 3\ln 2$
График пересекает ось Oy в точке $\left(0; 2\sqrt{2}\right)$
$y = 0 \Rightarrow \ln(8 - x^2) = 0 \Rightarrow 8 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$
График пересекает ось Ox в точках $\left(-\sqrt{7}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{7}; 0\right)$
4. Функция непериодическая.
5. Точки экстремума

$$f'(x) = \frac{-2x}{8 - x^2} = -\frac{2x}{8 - x^2}$$

$$-\frac{2x}{8 - x^2} = 0$$

$$x = 0$$

Знаки производной



$\left(-2\sqrt{2}; 0\right)$ – функция возрастает

$\left(0; 2\sqrt{2}\right)$ – функция убывает

$(0; \ln 8)$ – точка максимума

6. Точки перегиба

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{1 \cdot (8 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(8 - x^2)^2} = -2 \cdot \frac{8 - x^2 + 2x^2}{(8 - x^2)^2} = -2 \cdot \frac{x^2 + 8}{(8 - x^2)^2}$$

$$\frac{x^2 + 8}{(8 - x^2)^2} = 0$$

$$x^2 + 8 = 0$$

Данное уравнение корней не имеет. Это означает, что точек перегиба нет. Вторая производная отрицательна на всей области определения. Следовательно, график функции выпукл вверх.

$\left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ – функция выпукла вверх

7. Асимптоты

Так как x не стремится к бесконечности, функция задана на интервале, то вертикальных и наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x \to 2\sqrt{2} - 0} \ln(8 - x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2\sqrt{2} + 0} \ln(8 - x^2) = -\infty$$

Прямые $x = -2\sqrt{2}$ и $x = 2\sqrt{2}$ – вертикальные асимптоты

8. График: