**Геометрические приложения двойных интегралов**

**1. Вычисление площади плоской области**

Если , то двойной интеграл выражает площадь области *D*:

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , .

Решение. Найдем координаты точек пересечения линий (рис. 1)



Рис. 1

, , ,

, , .

**2. Вычисление объемов тел**

Объем тел, ограниченного поверхностью *z* = *f*(*x*, *y*), где функция *f*(*x*, *y*) является неотрицательной, плоскостью *z* = 0 и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области *D*, а образующие параллельны оси *OZ*, равен двойному интегралу от функции *f*(*x*, *y*) по области *D*:

.

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями *х* = 0, *у* = 0, *х* + *у* + *z* = 1,  *z* = 0.

Решение. Объем ограниченный данными поверхностями представляет объем тетраэдра (рис. 2).



Рис. 2

Объем этого тетраэдра вычислим по формуле ,

где *D* – треугольная область в плоскости *OXY*, ограниченная прямыми *х* = 0, *у* = 0, *х* + *у* + *z* = 1.

Расставим пределы интегрирования и вычислим объем:

 .

Замечание. Если тело, объем которого ищется, ограничено сверху поверхностью *z* =, а снизу – поверхностью *z* = , причем проекцией обеих поверхностей на плоскость *OXY* является область *D*, то объем этого тела равен разности объемов двух цилиндрических тел; первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область *D*, а верхним – поверхность *z* = ; второе тело имеет нижним основанием также область *D*, а верхним – поверхность *z* =. Поэтому объем *V* равен разности двух двойных интегралов:

.

**3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах**

**1) Полярные координаты**

Полярная система координат состоит из некоторой точки  называемой полюсом, и исходящего из нее луча  называемой полярной осью (рис. 3).

Задается масштаб для измерения длин отрезков.



Рис. 3

Любая точка  в полярной системе характеризуется расстоянием  (– полярный радиус, ) и углом поворота луча  от оси  ( - полярный угол, ).

Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке.

**2) Связь декартовых и полярных координат**

Пусть начало прямоугольной системы совпадает с полярным полюсом, ось  совпадает с полярной осью  (рис. 4).



Рис. 4

Тогда для точки  справедливо равенство: . Из треугольника получим уравнения связи координат:





Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями ,

.

Решение. Поверхности представляют собой цилиндры, вытянутые вдоль осей *ОZ* и *ОY*. След первого цилиндра на плоскости *XOY* представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом равным *а*, след второго цилиндра на плоскости *XOZ* представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом равным *a*. Рассмотрим восьмую часть этой фигуры (рис. 5).

Тогда объем равен

Ссылка:

https://vk.com/video/@public216917038?q=14.10.2024%20А6&to=L3ZpZGVvL0BwdWJsaWMyMTY5MTcwMzg%2FcT0xMS4xMC4yMDI0JTIw&z=video-216917038\_456240437%2Fclub216917038