**Лекция 4**

**1. Условный экстремум**

Экстремум функции, найденный при условии, что изменения ее аргументов ограничены некоторыми дополнительными уравнениями, называется **условным экстремумом.**

Уравнения, налагающие ограничения (связи) на аргументы данной функции, называются уравнениями связей. Геометрически это будут уравнения некоторых кривых или поверхностей.

Найти экстремум функции  при условии , означает отыскание экстремальных значений функции  вдоль кривой .

Найти экстремум функции  при условии , означает отыскание такой точки *P*0 на поверхности , в которой  имеет наибольшее или наименьшее значение по сравнению с ее значениями в остальных точках поверхности , лежащих в достаточно малой -окрестности точки *P*0.

Значение функции  в точке *P*0 называется условным максимумом, если эта точка удовлетворяет дополнительным уравнениям  и если существует такая ее -окрестность, для всех точек которой, удовлетворяющих тем же уравнениям , будет выполняться неравенство  Сама точка *P*0 называется в этом случае точкой условного максимума.

Аналогично определяется условный минимум и точка условного минимума, в которой . Если уравнения связи  разрешены относительно некоторых переменных, то, подставляя эти переменные в уравнение функции, можно уменьшить число связей либо вовсе избавиться от связей и решать задачу о безусловном экстремуме.

Для нахождения экстремума функции двух переменных  при условии  в уравнение функции, получим задачу на экстремум для функции одной переменной .

Пример. Найти экстремум функции  при условии (рис. 9).

Решение. Из уравнения связи находим . Тогда

.

*,* , *,* .

Так как , то  – точка минимума.

Тогда  ,

т. е. при аргументах, удовлетворяющих уравнению связи , (рис. 1).



Рис. 1

Если уравнение связи не разрешимо ни относительно ни одной из переменных, то для нахождения условного экстремума используют метод множителей Лагранжа.

Решение методом Лагранжа сводится к исследованию функции Лагранжа на обычный экстремум:



где  множитель Лагранжа.

Пример. Найти экстремум функции *z* = *xy* при условии, что *x* и *y* связаны условием 2*x* + 3*y* – 5 = 0.

Решение. Составим функцию Лагранжа



 и найдем частные производные по каждой переменной. Необходимые условия экстремума функции примут вид



  стационарная точка. Проверим достаточные условия экстремума функции. Для этого найдем вторые частные производные и второй дифференциал функции.





 Связь между дифференциалами найдем, продифференцировав уравнение связи





 Это условие означает, что в стационарной точке  находится минимум. Он равен 

**2. Наибольшее и наименьшее значения функции**

**в замкнутой области**

Пусть функция  непрерывна в ограниченной замкнутой области *D* и дифференцируема внутри этой области. Тогда она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе.

Если наибольшее или наименьшее значения функции принимает во внутренних точках области *D*, то эти точки, очевидно, являются точками экстремума функции .

Таким образом, точки, в которых функция имеет наибольшее или наименьшее значения, являются либо точками экстремума, либо граничными точками области *D*.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

1. Находим критические точки функции  в области *D* из условий: , . Вычисляем значения функции  в этих точках.

2. Находим наибольшее и наименьшее значения функции на границе области *D*.

3. Сравнивая все полученные значения функции , выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

 треугольнике 

Решение.

1. Найдем критические точки функции внутри области *D*:

, ,



Получили критическую точку  (рис. 10).

Вычислим значения функции .

2. Исследуем функцию на границе области:

I. рассмотрим участок *OA*: , , ,

, .



Рис. 2

Тогда наибольшее и наименьшее значения функции может принимать на концах отрезка .

Вычислим  .

II. Рассмотрим участок *OB*: , , ,

, .

Получили точку  (рис. 2).

Вычислим значения функции в найденной точке  и на концах отрезка : ,.

III. Рассмотрим участок *AB*: ,

,

, .

Получили точку  (рис. 2).

Вычислим .

Обобщая полученные результаты имеем:

, , , , ,

следовательно ; .

Ссылка: <https://vk.com/video-216917038_456240322> (4 пара)