**Лекция 5**

**Векторы**

**Определение и начальные сведения о векторах**

Любые две точки *А*, *В* определяют **направленный отрезок**, если точка *А* определяет начало, точка *В* – конец отрезка, направление задается от *А* к *В*.

**Направленный отрезок** называется **вектором**. Обозначается .

Расстояние между началом и концом вектора называется **длинной** или **модулем** вектора, обозначается .

Вектора  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или принадлежат параллельным прямым, при этом при совпадении направления их называют **противоположно направленные**  если направление векторов противоположное, векторы называются **сонаправленные** 

Векторы называются равными , если они коллинеарные,

одинаково направлены и их длинны равны: .

Векторы  называются **противоположными**, если они коллинеарные, противоположно направлены и их длины равны:

.

Три вектора  называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или ей параллельны.

**Линейные операции над векторами**

Пусть даны два вектора .

1. **Сложение векторов.**

**Суммой** двух векторов  называется вектор , который идет из начала вектора  в конец вектора , если вектор  приложен к концу вектора (рис. 1).







Рис. 1

**Разностью** векторов  называется такой вектор , который в сумме с вектором дает вектор :  (рис. 2).







Рис. 2

При вычислении по правилу параллелограмма суммой векторов является диагональ, выходящая из общего начала этих векторов, а разностью векторов является диагональ, не имеющая общего начала с векторами .

Произведением вектора  на число  называется вектор , коллинеарный вектору , имеющий длину равную  и тоже

направление, что и вектор , если , и противоположное направление, если (рис. 3).







Рис. 3

Вектор, модуль которого равен нулю, называется нулевым или нуль вектором: 

Единичным вектором , или ортом, называется вектор, сонаправленный с вектором , координаты которого получены делением координат вектора  на его длину: . Тогда любой вектор можно представить в стандартной форме: 

**Основные свойства линейных операций над векторами**

1.  - переместительный закон;

2. - сочетательный закон сложения;

3.  - сочетательный закон умножения;

4.  - распределительный закон относительно суммы чисел;

5. - распределительный закон относительно суммы векторов;

6. ;

7. .

8. **Теорема о коллинеарных векторах**.

Два ненулевых вектора  коллинеарные тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

.

9. **Теорема о компланарных векторах**.

Три ненулевых вектора  компланарные тогда и только тогда, когда они принадлежат одной плоскости или один из них является линейной комбинацией двух других:

 - числа.

Пример. Пусть заданы вектора . Покажем, что они компланарные:



т.е. вектор  является линейной комбинацией двух других векторов.

**Проекция вектора на ось**

Пусть задан вектор  и некоторая ось . Из начала и конца вектора опустим перпендикуляры на ось, точки пересечения с осью обозначим (рис. 4).

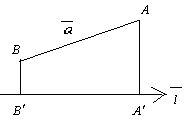


Рис. 4

Проекцией вектора **** на ось  называется длинна  направленного отрезка  со своим знаком: , где знак «» зависит от совпадения направления вектора  и оси  или несовпадения.

Теорема. Проекция вектора  на ось  равна длине вектора  умноженной на косинус угла между вектором  и осью :



Следствие 1: проекция вектора на ось:

1) положительная, если угол - острый;

2) отрицательная, если угол  - тупой;

3) равна нулю, если угол .

Следствие 2: проекции равных векторов на одну и ту же ось, равны:

.

Теорема.Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось:



Теорема.При умножении вектора  на число, его проекция умножается на это же число, т.е.



**Проекции вектора в прямоугольной системе координат**

Пусть в пространстве задана система координат *XYZO* и произвольный вектор .

Проекции *X, Y, Z* вектора  на оси координат называются его координатами, при этом пишут: .

Теорема. Каковы бы ни были точки , координаты вектора  определяются по формулам:



Следствие 1: если  выходит из начала координат, т.е. , то координаты  равны координатам его конца;

Следствие 2: 

Следствие 3: Если  и , то



Следствие 4: Если , то 

Следствие 5: Если , то 

**Направляющиеся косинусы вектора**

Пусть дан произвольный вектор , выходящий из начала координат, не совпадающий с осями координат образующий с ними углы . Найдем длину вектора:

.

В силу определения проекции вектора на ось получим:

,

,

.

Выразим косинусы углов, которые называются направляющими косинусами:

,

,

.

Основное свойство косинусов: .

**Разложение вектора по базису**

Упорядоченная тройка неколлинеарных векторов  называется базисо**м** и любой вектор  может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов :

,

где  - координаты вектора  в базисе векторов ().

В прямоугольной системе координат за базис выбирают единичные вектора осей координат: , .

Тогда справедлива теорема.

Теорема**.** Любой вектор может быть единственным образом представлен в виде

- числа.

Такое представление называется разложением по базису **,** а вектор  имеет координаты .

Пример. Записать разложение вектора по базису****. Вектор будет иметь вид: 

Ссылка: : [https://vk.com/video-216917038\_456240322 (1](https://vk.com/video-216917038_456240322%20(1) пара)