Лекция 2

1. Матрицы
   1. **Определение**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов. Размер матрицы – . Обозначаются матрицы большими латинскими буквами. Элементы матриц обозначаются маленькими буквами: , где *i* – номер строки, *j* – номер столбца.

Например, задана матрица :

.

* 1. **Виды матриц**

1. Матрица размером  называется матрицей-строкой.
2. Матрица размером  называется матрицей-столбцом.
3. Матрица размером  называется квадратной порядка *m*. Для такой матрицы можно составить определитель, состоящий из элементов матрицы.

Если определитель такой матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной, в противном случае – невырожденной.

Например, для матрицы  найти определитель.

Определитель матрицы равен: .

1. Матрица, у которой число строк и столбцов не равны, называется прямоугольной.
2. Матрица, элементами которой являются нули, называется нуль-матрицей *О*.
3. Матрица, элементы которой задаются по формуле

, называется диагональной.

1. Диагональная матрица размером , элементы которой

задаются по формуле , называется единичной и

обозначается *Е*.

1. Матрицы одного размера  и  называются равными, если их соответствующие элементы равны ( ).
2. Противоположной для матрицы *А* называется матрица тех же размеров , определенная следующим образом: .
   1. **Операции над матрицами**
3. Сложение матриц.

Суммой матриц *Аmn* и *Bmn*называется матрица *Сmn*, элементы которой вычисляются по формуле:

. (1)

Свойства:

1. ;
2. ;
3. ;  - нулевая матрица;
4. .
5. Умножение матриц на число.

При умножении матрицы *А* на число α получается матрица

*С = α·А*, элементы которой определяются по формуле:

. (2)

Свойства:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. .
7. Умножение матриц.

Произведением матрицы на  называется матрица , элементы которой определяются по формуле:

 (3)

то есть определяется сумма произведений соответствующих элементов *i* – строки матрицы *А* на соответствующие элементы *j* – столбца матрицы *В*. Матрицы можно умножать, если внутренние размерности совпадают.

Свойства:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

Если выполняется условие , то матрицы  и  называются перестановочными.

Пример. Выполнить действия с матрицами ; , если

; .

Решение. Умножим матрицы на числа:

, .

Найдем сумму матриц

.

Найдем произведение матриц :

.

Найдем разность матриц

.

* 1. **Транспонированная матрица**

Матрица *АТ* называется транспонированной к матрице *А*, если в матрице *А* строчки и столбцы поменять местами.

Свойства транспонированных матриц:

1. 
2. 
3. 
4. 

Пример. Для матрицы  построить транспонированную матрицу.

Решение: транспонированной является матрица: .

* 1. **Обратная матрица**

Матрица  называется обратной матрицей для матрицы , если справедливо следующее условие:

. (11)

Необходимые условия существования обратной матрицы:

1) матрица должна быть квадратной;

2) определитель матрицы  не равен нулю, т.е. матрица должна быть невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. составить определитель матрицы  и вычислить его;
2. если , то обратная матрица не существует;
3. если , составить присоединенную матрицу , состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы *А*;
4. транспонировать присоединенную матрицу ;
5. записать обратную матрицу: 

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы *А*:.

Найдем определитель матрицы *А*: 

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы *А*:

; ; ;

; ; ;

; ; .

Составим присоединенную матрицу:

**

Транспонируем матрицу :

.

Обратная матрица имеет вид:

.

Для проверки правильности вычислений следует выполнить умножение: .

* 1. **Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований**

Элементарные преобразования матриц можно использовать для получения обратных матриц, присоединяя к данной матрице единичную матрицу: .

Например, для матрицы  найти обратную матрицу.

Используем метод элементарных преобразований, получим:

~~  ~

~~  ~

~~  ~

~ 

Протокол действий:

1) элементы второй строки умножим на (-1) и поменяем местами с первой строкой;

2) от второй строки отнимем две первых строки (*С*2*-*2*С*1);

3) поделим вторую строку на 9 и третью строку на 2;

4) от третьей строки отнимем вторую строку (*С*3*-С*2);

5) поделим третью строку на 4/3;

6) из второй строки вычтем третью, умноженную на 2/3 (*С*2*-*2/3*С*3);

7) к первой строке прибавим три вторых строки и одну третью (*С*1*+*3*С*2*+С*3).

В результате получили обратную матрицу

.