**Лекция 3**

**1. Скалярное поле**

Если в каждой точке  определено значение скалярной величины , то говорят, что в области *D* задано скалярное поле.

Обозначают  для любых *P* ϵ *D*, например, неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, можно рассматривать как скалярное поле.

Если в пространстве ввести систему координат *OXYZ*, то точка *P* в этой системе координат будет иметь определенные координаты ,  и , и скалярная величина  станет функцией этих координат:

.

Верно и обратное утверждение: всякая функция трех переменных  задает некоторое скалярное поле. Наряду со скалярными полями в пространстве рассматриваются также плоские скалярные поля. Функция плоского скалярного поля зависит от двух переменных: .

**2. Производная по направлению**

Пусть отрезок  длины  направлен по вектору

, ,

Тогда его проекция на оси координат будет:

, , .

Если существует предел отношения , то он называется производной функции  в точке *P* по направлению и обозначается символом , т. е.

 или .

**Теорема**. Если функция  дифференцируема в точке *P*, то она имеет в этой точке производную по любому направлению , причем

.

Аналогично  при , и  при .

В случае функции двух переменных  вектор  будет лежать в плоскости *OXY*, поэтому формула для производной по направлению  будет иметь следующий вид:

.

Так как в плоскости *OXY* , , то справедлива также формула

.

Если частные производные  и  представляют собой скорость изменения функции вдоль соответствующей оси координат, то производная по направлению выражает скорость изменения функции по отношению к величине перемещения точки в направлении вектора .

В частности, если , то плоскость, проходящая через точку *P* и вектор  параллельно оси *OZ*, пересечет поверхность  по некоторой кривой *L*. В этом случае скорость изменения функции в направлении вектора  будет численно равна тангенсу угла , образованного касательной к кривой *L* в точке *Q*, соответствующей точке *P*, и вектором . При  она будет выражать крутизну возрастания функции в направлении вектора , а при  – крутизну убывания.

Таким образом, производная по направлению оказывается весьма полезной при исследовании поведения функции в окрестности заданной точки.

Пример. Найти производную функции  в точке  по направлению от точки  в точке .

Решение. Найдем вектор  и соответствующий ему единичный вектор :

.

Таким образом, вектор  имеет следующие направляющие косинусы , .

Теперь найдем частные производные функции :

,

,

и их значения в точке :

,

.

Подставляя в формулу  найденные значения частных производных и направляющих косинусов, получим искомую производную функции  по направлению вектора :

.

**3. Градиент функции**

При изучении скалярных полей наряду с функций  рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией, – градиент скалярного поля.

Градиентом в точке  скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией , называется вектор, равный

.

Таким образом, каждой точке  скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией , соответствует не только значение этой функции, но и вполне определенный вектор .

Между градиентом функции в данной точке и производной по направлению в той же точке имеется связь, которая устанавливается следующей теоремой.

**Теорема**. Проекция вектора  на единичный вектор  равна производной функции  по направлению :

.

**Доказательство.** Пусть . Из векторной алгебры известно, что проекция какого-либо вектора на другой вектор равна скалярному произведению этих векторов. Так как

, ,

то

.

Учитывая, что производная по направлению  выражает скорость изменения скалярного поля  в этом направлении, можно сказать, что проекция  на вектор  равна скорости изменения поля  в направлении вектора .

Обозначим через  угол между единичным вектором  и .

Тогда .

Поэтому .

Если направления векторов  и  совпадают (), то производная по направлению  имеет, очевидно, наибольшее значение, равное .

Вектор  есть, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль равный скорости этого возрастания.

Рассмотрим кривую *L*, которая лежит на поверхности уровня  и проходит через точку *P*. Градиент функции  в точке *P* обладает следующими свойствами:  перпендикулярен к вектору , направленному по касательной к кривой *L* в точке *P*.

В случае плоского скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией двух переменных , градиент определяется формулой

.

Его связь с производной по направлению  выражается равенством

,

где  – угол между единичным вектором  и . Вектор  перпендикулярен к касательной, проведенной к линии уровня в точке *P*.

Пример. Найти наибольшую скорость возрастания функции

 в точке .

Решение. Наибольшая скорость возрастания функции равна модулю градиента этой функции. Найдем градиент функции :

, 

.

В точке  имеем  *gradz* = (4; –11).

Тогда наибольшая скорость возрастания функции равна

.

Пример. Найти скорость изменения скалярного поля, определяемого функцией  в точке  в направлении касательной, проведенной к параболе  в этой точке в сторону возрастания координаты , и наибольшую скорость изменения поля в этой точке.

Решение. Скорость изменения скалярного поля в заданном направлении есть производная скалярного поля  по направлению вектора , задающего направление.

,

где ;  – направляющие косинусы вектора , . Вектор  возьмем на касательной к параболе  в , для чего составим уравнение касательной

,

, 

  – уравнение касательной.

На найденной касательной возьмем точку  с любой координатой  (), например (3; 6). Тогда

. .

Найдем значения производной по направлению в точке :

,

.

Тогда

.

Наибольшая скорость изменения поля в точке  есть . Так как , то

.

Величина наибольшей скорости

.

**4. Экстремум функции двух переменных**

**Необходимые и достаточные условия существования экстремума**

Пусть функция двух переменных  задана в некоторой области *D*.

Точка  называется точкой максимума функции , если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек  этой окрестности, отличных от *P*0, выполняется неравенство  (рис. 1).

Точка  называется точкой минимума функции , если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек  этой окрестности, отличных от *P*0, выполняется неравенство  (рис. 2).



 Рис. 1 Рис. 2

Как и в случае функции одной переменной, точка максимума (или минимума) не следует смешивать с точкой, в которой функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение в области *D*. Значение функции  в точке максимума (точке минимума) называют максимумом (минимумом) функции или экстремумом.

**Теорема** **(необходимый признак существования экстремума)**.

Если  есть точка экстремума функции , то

, 

В предположении, что указанные частные производные существуют в точке . Таким образом, обращение в нуль в точке *P*0 частных производных первого порядка функции  (если они существуют) является необходимым условием существования в точке *P*0 экстремума этой функции.

Функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция , очевидно, имеет минимум в точке , но в этой точке частные производные

 и 

не существуют.

Точки, в которых частные производные первого порядка ,  обращаются в ноль или не существуют, называются критическими точками этой функции. Из изложенного выше следует, что точка экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако не всякая критическая точка будет точкой экстремума функции.

**Теорема (достаточный признак существования экстремума)**.

Пусть  – критическая точка функции .

Обозначим , ,  и составим

.

Тогда,

1) если , то  – точка экстремума, причем  – точка максимума в случае ,  –точка минимума в случае 

 2) если , то в точке  – экстремума нет,

 3) если , то требуется дополнительные исследования (сомнительный случай).

Пример. Найти экстремумы функции .

Решение.Найдем частные производные первого порядка:

, .

Приравнивая эти производные к нулю, после элементарных преобразований получим систему уравнений:



Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим:

 или  или 

Решая эту систему уравнений (равносильную данной), находим четыре критические точки: , , , .

Теперь найдем частные производные второго порядка:

, , ,

составим выражение .

Так как

1)  – точка минимума;

2) в точке экстремума нет;

3) в точке экстремума нет;

4)  – точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке  – минимум –72, в точке  – максимум 72.

Ссылка: https://vk.com/video-216917038\_456240263