Лекция 2

1. Дифференциал функции

Рассмотрим частное приращение по переменной *x*:

.

Если существует , то на основании теории функции одной переменной это приращение равно

, где .

Линейная относительно  часть этого приращения называется частным дифференциалом функции  по переменной  и обозначается символом . Если , то он будет главной частью приращения, эквивалентной самому приращению. Таким образом,

, где .

Геометрически частный дифференциал есть приращение аппликаты касательной в точке  к линии , , лежащей на поверхности 

Аналогично определяется частное приращение и частный дифференциал по переменной :

, где  и .

Рассмотрим точки  и .

Разность  называется полным приращениемфункции  в точке . Более кратко будем записывать его в виде .

Функция  называется дифференцируемойв точке , если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

,

где *A* и *B* – некоторые выражения, не содержащие Δ*x* и Δ*y*, т. е. постоянные относительно Δ*x* и Δ*y*, а  является бесконечно малой более высокого порядка, чем

, т.е. .

Здесь  – расстояние между точками *P*3 и *P*.

Линейная относительно Δ*x* и Δ*y* часть полного приращения дифференцируемой в точке  функции  называется полным дифференциаломэтой функции в точке  и обозначается символом .

Таким образом, если функция дифференцируема в точке , то , причем

 и .

2. Свойства дифференцируемой функции.

Непрерывность дифференцируемой функции

**Теорема**. Всякая функция , дифференцируемая в точке *P*, непрерывна в этой точке.

**Теорема**. Ели функция  в точке  дифференцируема (т. е. имеет дифференциал ), то она имеет в этой точке и частные производные  и , причем

, .

**Доказательство.**

По условию , где .

Полагая , получим  и

, откуда , т. е. ,

, откуда , т. е. .

Как и в случае одной переменной, приращение аргумента равно его дифференциалу, т.е. , , поэтому полный дифференциал имеет вид

 или .

Сформулированные теоремы выражают только необходимый признак дифференцируемости функции и ни одна из них не содержит достаточного признака дифференцируемости. Так, из существования частных производных не всегда следует дифференцируемость функции. Более того, даже наличие в точке производной по любому направлению еще не влечет дифференцируемости функции в этой точке.

3. Достаточный признак дифференцируемости

Оказывается, чтобы из существования частных производных следовала дифференцируемость функции в данной точке, достаточно потребовать их непрерывность в этой точке.

**Теорема**. Ели функция  имеет частные производные в некоторой окрестности точки , непрерывные в самой точке *P*, то она дифференцируема в этой точке.

Все сказанное легко распространяется на функции трех и большего числа переменных. Так, например, для дифференцируемой функции трех переменных  полное приращение выражается формулой



при условии  (), а ее полный дифференциал имеет вид .

4. Приложение полного дифференциала

Ограничиваясь дифференциалом функции как главной части приращения, получим приближенное равенство , полезное в приближенных вычислениях. В развернутой форме оно будет:



или

.

Для вычисления значения функции в некоторой точке  записывают ,  в виде суммы , , стараясь подобрать ,  возможно меньшими, но так, чтобы в полученной точке  легко вычислялись значения функции и ее производных.

Пример. Дана функция  и две точки , . Требуется

1) Вычислить значения  в точке *B*;

2) Вычислить приближенное значение z функции в точке *B*, исходя из значения  функции в точке *A*, заменяя приращение функции при переходе от точки *A* к точке *B* дифференциалом;

3) Оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение.По условию , , следовательно

; ; ; ;

; .

Тогда

1) .

2) ,

,

,

, ,

, .

Тогда



3) относительная погрешность вычисляется по формуле

.

5. Производная сложной функции

Пусть , причем , , т. е.  зависит от  и  через посредство двух других функций  и . В этом случае функция  называется сложной функцией переменных *х* и *у*. Подставляя  и  в выражение для , получим непосредственную зависимость  от переменных *х* и *у*



Однако и в теории, и в приложениях важно уметь находить частные производные  и , не пользуясь показанным равенством.

**Теорема**. Если функции  и  дифференцируемы в точке , а функция  дифференцируема в соответствующей точке , то сложная функция  дифференцируема в точке , причем



Эти формулы обобщаются на случай любого числа независимых переменных. В частности, если  и , то функция  будет сложной функцией одной переменной *х* и ее полная производная по этой переменной будет



Если здесь положить , т.е. , то получим



Пример. **, ,**. Найти  и 

Решение. ,

.

Пример. . Найти .

Решение. Пусть , . Тогда .

.

Пример. , , . Найти .

Решение.



Пример. ,, . Найти .

Решение.



Пример. Дана функция. Найти .

Решение. , где , .

Пример. , . Найти .

Решение.

.

=.

6. Производная функции, заданной неявно

Будем говорить, что функция  задана неявно, если она определяется некоторым уравнением вида , т.е. уравнением, не разрешенным относительно .

Обе части уравнения  продифференцируем по переменной *х*, получим



Откуда



Аналогично



В частности, если дана неявная функция одной переменной уравнением , то из тождества  получим

,

Откуда



Аналогично находятся частные производные от неявной функции любого числа переменных.

Пример. Дана функция . Найти частные производные.

Решение.

, , ,

откуда  и .

7. Частные производные высших порядков

Если функция  имеет непрерывные частные производные

, ,

то они снова являются функциями переменных  и , и если эти функции дифференцируемы в точке , то от каждой из них можно снова находить частные производные по  и . В результате получим вторые частные производные, которые обозначаются так:

;

;

;

.

Производные  и  называются смешанными – они получаются последовательным дифференцированием функции  сначала по *х*, затем по *у* или наоборот. Производные второго порядка можно снова дифференцировать, получим частные производные третьего порядка. Из будет уже восемь:

; ; ; ; ; ; ; .

Вообще, частное производной -ого порядка называется частная производная от какой-либо частной производной -ого порядка.

Например,  есть производная -ого порядка. Здесь  дифференцируется сначала раз по *х*, потом  - по *у*.

Для функций большего числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример. Дана функция . Найти частные производные третьего порядка.

Решение.

, , ,

, , ,

, , ,

, , .

Замечаем, что некоторые результаты дифференцирования не зависят от порядка, в котором происходит это дифференцирование. И это не случайно, о чем говорит следующая теорема.

**Теорема**. Если функция  и ее частные производные , ,  и  определены и непрерывны в точке  и в некоторой ее окрестности, то в этой точке вторые смешанные производные равны между собой, т. е. .

Следствие. При непрерывности соответствующих частных производные результат повторного дифференцирования функции двух независимых переменных не зависит от порядка дифференцирования.

Например,

.

Пример. Дана функция . Найти частные производные первого и второго порядка. Убедиться, что смешанные производные равны.

Решение.

, 

, ,

.

Действительно, .

Пример. Проверить, что функция  удовлетворяет уравнению .

Решение.

 (,  – постоянные),

 (,– постоянные),

 (,– постоянные).

Суммируем найденные производные:

,

что и требовалось доказать.

8. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом -ого порядка  функции  называется дифференциал от дифференциала -ого порядка, как от функции независимых переменных *х* и *у*.

Таким образом,  и  рассматриваются при этом как величины, не зависящие от  и . Поэтому







или, при условии непрерывности смешанных производных:

.

Аналогично



Рассмотрим сложную функцию , где , .

Тогда на основании теоремы об инвариантности формы первого дифференциала получим







Таким образом, в случае, если аргументы  и  являются функциями независимых переменных, форма второго дифференциала изменяется на величину .

Это объясняется тем, что теперь, вообще говоря,  и  отличны от нуля. Если же  и  будут независимыми переменными, то  и  не будут зависеть от  и , поэтому

.

Аналогично, , и мы получим уже известную форму второго дифференциала.

9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением , левая часть которого является функцией, дифференцируемой в некоторой области.

Плоскость в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную точку  называется касательной плоскостью.

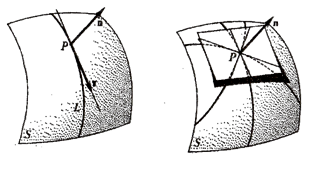


Рис. 1

Прямая, проходящая через точку *P*0 перпендикулярно касательной плоскости, называется нормалью к поверхности  в точке *P*0 (рис. 1).

Так как касательная плоскость перпендикулярна , то вектор  направлен вдоль нормали и, поэтому может быть принят в качестве ее направляющего вектора.

Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности  в точке *P*0 имеет вид

.

+

Канонические управления нормали к поверхности  в точке *P*0:

.

Если поверхность задана уравнением , то уравнение касательной плоскости в точке  запишется в виде

,

а каноническое уравнение нормали – в виде

.

Пример. Cоставить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  в точке .

Решение. Найдем частные производные функции *z* и вычислим их значения в указанной точке:

, ,

, .

Значение .

Запишем управление касательной плоскости к данной поверхности в точке :

.

Запишем уравнение нормали к поверхности в точке :

.

10. Геометрический смысл полного дифференциала

функции двух переменных

Пусть функции  имеет в точке  дифференциал 

или 

Рассмотрим уравнение касательной плоскости



или



Правые части этих выражений совпадают, следовательно, и левые части этих равенств равны , где  – дифференциал функции  в точке , а  – соответствующее приращение аппликаты (координаты ) касательной плоскости.

Таким образом получаем, что дифференциал функции двух переменных равенприращению аппликаты касательной плоскости (рис.2.).

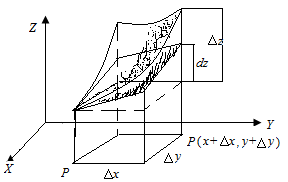


Рис. 2

Ссылка:

https://vk.com/video-216917038\_456240200