Министерство образования и науки Российской Федерации

Белгородский государственный технологический университет
им В.Г. Шухова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 2-ГО КУРСА ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ БАКАЛАВРИАТА

Белгород
2024

Оглавление

Введение

Числовые расчеты применяются во всех областях деятельности инженеров всевозможных специальностей, физиков, химиков и работников многих других профессий. В связи с развитием науки и техники приходится решать все более сложные задачи, проводить все более и более сложные подсчеты. Все эти расчеты основаны на математике, которая представляет собой значительный отдел в общей сумме человеческих знаний и приспособлена к обслуживанию самых разнообразных областей науки и практической деятельности.

Цель курса математики в системе подготовки бакалавров (инженеров) – освоение необходимого математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать прикладные технические задачи, используя в случае надобности компьютеры.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные технические процессы, в освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач, в овладении основными методами математики.

В данных указаниях рассматриваются темы в объеме второго курса, позволяющие самостоятельно освоить необходимый теоретический материал и выполнить контрольные задания. В пособии рассмотрены темы: функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы, ряды, теория вероятностей. По всем темам приведены подробные решения типовых примеров и задач, что должно способствовать лучшему пониманию и усвоению предмета.

Пособие рассчитано на студентов 2го курса технических направлений бакалавриата.

Разбор типового варианта

Задание 1. Исследовать функцию двух переменных на экстремум.
$z = 5x^2 + 3y^2 + 3x - 4y + 5.$

Решение: Найдём частные производные функции $z(x,y)$:

$$z'_x = 10x + 3; \qquad z'_y = 6y - 4.$$

Приравнивая их к нулю, получим точку $M_0\left(-\frac{3}{10};\frac{2}{3}\right)$. Что бы определить есть ли в этой точке экстремум, вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{yx}(M_0) \\ z''_{xy}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 60$. Так как $\Delta > 0$ и $z''_{xx}(M_0) > 0$, то точка M_0 – точка минимума. Остаётся вычислить значение функции в этой точке

$$z(M_0) = 5 \cdot \frac{9}{100} + 3 \cdot \frac{4}{9} - \frac{9}{10} - \frac{8}{3} + 5 = \frac{193}{60}.$$

Ответ: $z\left(-\frac{3}{10};\frac{2}{3}\right) = \frac{193}{60}$ – минимальное значение функции.

Задание 2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x^2} f(x,y)dy.$$

Решение: Изобразим область интегрирования (Рис. 1). Найдём точку пересечения графиков функций $y = 2x$ и $y = 3 - x^2$. Приравняв функции между собой, получим

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Корень x_2 – посторонний для нашей области интегрирования, значит точка $M(1;2)$ – точка пересечения графиков.

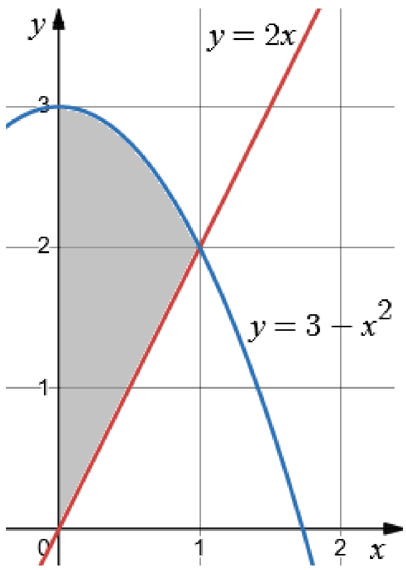

Рис. 1

Преобразуем теперь наши функции относительно переменной x:

$$y = 2x \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{2};$$

$$y = 3 - x^2 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3-y}.$$

В нашей области x не отрицателен, поэтому в $x = \pm\sqrt{3-y}$ будет выбран знак " + ". Имеем:

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x^2} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_0^{\sqrt{3-y}} f(x,y)dx.$$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода, если AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

$$\int_{AB} (4x+7)dx + (3y-8)dy.$$

Решение: Параметризуем дугу AB:
$$\begin{cases} x = t; \\ y = t^2, \end{cases} \quad 1 \le t \le 2.$$
Тогда $dx = dt$, и $dy = 2tdt$. Имеем:
$$\int\limits_{AB} (4x+7)dx + (3y-8)dy = \int_1^2 \big((4t+7) + 2t(3t^2-8)\big)dt =$$
$$= \int_1^2 (-12t + 7 + 6t^3)dt = \left(-6t^2 + 7t + \frac{3}{2}t^4\right)\Big|_1^2 = \frac{23}{2}.$$
Ответ: $\int_{AB} (4x+7)dx + (3y-8)dy = \frac{23}{2}$.

Задание 4. Исследовать на сходимость ряды
$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+2n^2-1}; \qquad \text{б)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}; \qquad \text{в)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Решение: а) Воспользуемся предельным признаком сравнения. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+2n^2-1}$ сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{3n+2}{n^3+2n^2-1}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 3.$$
Так как этот предел существует и отличен от нуля и бесконечности, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно. Остаётся заметить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, а следовательно сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+2n^2-1}$.

б) Сначала исследуем ряд на абсолютную сходимость. Общий член знакочередующегося ряда – $a_n = \frac{2^n}{n!}$. По признаку Даламбера:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$
Таким образом, в силу признака Даламбера, ряд сходится абсолютно.

в) Сначала исследуем ряд на абсолютную сходимость. Общий член знакочередующегося ряда – $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. Воспользуемся интегральным признаком:
$$\int_2^{+\infty} a_n dn = \int_2^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} dn = \int_2^{+\infty} (\ln n)^{-\frac{1}{2}} d(\ln n) = \left(2\sqrt{\ln n}\right)\Big|_2^{+\infty} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{\ln n}\right) - 2\sqrt{\ln 2} = +\infty.$$
Так как интеграл расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, а значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ абсолютно расходится.

Исследуем теперь ряд на условную сходимость. Заметим, что

$$n\sqrt{\ln n} < (n+1)\sqrt{\ln(n+1)}$$

при всех натуральных значениях n, значит $\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$, т.е. общий член ряда $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ убывает с ростом n.

Кроме того

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = 0.$$

Таким образом, знакочередующийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ сходится условно в силу признака Лейбница.

Задание 5. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Решение: Воспользуемся признаком Даламбера:

$$a_n = \frac{n \cdot (x+2)^n}{3^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)\cdot(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{n\cdot(x+2)^n}{3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n} \cdot \frac{x+2}{3}\right| = \left|\frac{x+2}{3}\right|.$$

Решая неравенство $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, получим $x \in (-5;1)$ – область абсолютной сходимости.

Проверим теперь края интервала. Пусть $x = -5$. Имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-3)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3},$$

Который, очевидно, расходится (общий член не стремится к нулю). Аналогично при $x = 1$ получим расходящийся ряд.

Ответ: ряд сходится абсолютно при $x \in (-5;1)$.

Задание 6. На девяти карточках написаны буквы, среди них 2 буквы «К», 3 буквы «О» и 4 буквы «Т». Наудачу извлекают три карточки. Какова вероятность того, что из букв, написанных на этих карточках, можно собрать слово «кот»?

Решение: Обозначим требуемое событие «A». Из двух букв «К» одну можно выбрать C_2^1 способами, букву «О» из трёх можно выбрать C_3^1 способами, наконец, букву «Т» – C_4^1 способами. Всего способов вытащить 3 буквы из девяти – C_9^3. Напомним, что $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Имеем:

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1}{C_9^3} = \frac{\frac{2!}{1!\cdot 1!} \cdot \frac{3!}{1!\cdot 2!} \cdot \frac{4!}{1!\cdot 3!}}{\frac{9!}{3!\cdot 6!}} = \frac{2}{7}.$$

Альтернативный способ: Шанс достать первой карточкой букву «К» – $P(\text{К}_1) = \frac{2}{9}$, букву «О» – $P(\text{О}_1) = \frac{3}{9}$, букву «Т» – $P(\text{Т}_1) = \frac{4}{9}$. Шанс достать второй карточкой букву «К» – $P(\text{К}_2) = \frac{2}{8}$, букву «О» – $P(\text{О}_2) = \frac{3}{8}$, букву «Т» – $P(\text{Т}_2) = \frac{4}{8}$. Наконец для третьей карточки имеем: $P(\text{К}_3) = \frac{2}{7}$, $P(\text{О}_3) = \frac{3}{7}$ и $P(\text{Т}_3) = \frac{4}{7}$.

Для того, что бы можно было собрать слово «кот», карточки можно вытащить шестью способами: КОТ, КТО, ТОК, ТКО, ОТК, ОКТ. Найдём вероятности соответствующих событий:

$$P(\text{КОТ}) = P(\text{К}_1) \cdot P(\text{О}_2) \cdot P(\text{Т}_3) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{21};$$
$$P(\text{КТО}) = P(\text{К}_1) \cdot P(\text{Т}_2) \cdot P(\text{О}_3) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{21};$$
$$P(\text{ТОК}) = P(\text{Т}_1) \cdot P(\text{О}_2) \cdot P(\text{К}_3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21};$$
$$P(\text{ТКО}) = P(\text{К}_1) \cdot P(\text{О}_2) \cdot P(\text{Т}_3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{21};$$
$$P(\text{ОТК}) = P(\text{К}_1) \cdot P(\text{О}_2) \cdot P(\text{Т}_3) = \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21};$$
$$P(\text{ОКТ}) = P(\text{К}_1) \cdot P(\text{О}_2) \cdot P(\text{Т}_3) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{21};$$

Если обозначить требуемое событие «А» то:

$$P(A) = P(\text{КОТ}) + P(\text{КТО}) + P(\text{ТОК}) + P(\text{ТКО}) + P(\text{ОТК}) + P(\text{ОКТ}) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Ответ: $\frac{2}{7}$.

Задание 7. Дискретная случайная величина X задана таблично. Найти математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения случайной величины.

X_i	2	3	4	5
p_i	*0,5*	*0,3*	*0,1*	*0,1*

Решение: Математическое ожидание может быть вычислено по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i p_i$. В нашем случае:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}1 = 2{,}8.$$

Дисперсию случайной величины можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Имеем:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}1 =$$
$$= 4 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}1 = 8{,}8;$$
$$D(X) = 8{,}8 - 2{,}8^2 = 8{,}8 - 7{,}84 = 0{,}96.$$

Построим функцию распределения случайной величины. Напомним, что $F(x) = p(X \leq x)$, т.е. для любого действительного числа x значение функции распределения равно вероятности того, что случайная величина X меньше числа x.

Так как минимальное значение случайной величины $X_1 = 2$, то $F(x) = 0$ при $x < 2$.

Если же $x \in [2;3)$, то условию $X \leq x$ удовлетворяет единственное значение случайной величины – $X_1 = 2$, вероятность которого $p_1 = 0{,}5$, а значит и $F(x) = 0{,}5$.

Для $x \in [3;4)$ нас устраивает уже два значения случайной величины: $X_1 = 2$ и $X_2 = 3$. Тогда $F(x) = p_1 + p_2 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$.

При $x \in [4;5)$ случайная величина может принимать три значения: $X_1 = 2$, $X_2 = 3$ и $X_3 = 4$. Тогда $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}9$.

Наконец при $x \geq 5$ подойдёт любое значение случайной величины, значит $F(x) = 1$.

Ответ: $M(X) = 2{,}8$; $D(X) = 0{,}96$; $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2; \\ 0{,}5, & \text{при } 2 \leq x < 3; \\ 0{,}8, & \text{при } 3 \leq x < 4; \\ 0{,}9, & \text{при } 4 \leq x < 5; \\ 1, & \text{при } x \geq 5. \end{cases}$

Задание 8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, построить графики функций распределения и плотности распределения вероятностей.

Решение: Напомним, что функция плотности распределения есть производная функции распределения – $f(x) = F'(x)$. Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ и при } x > 3; \\ \dfrac{2x}{9}, & \text{при } 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины может быть вычислено по формуле $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$. Имеем:

$$M(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{2x}{9} dx = \int_0^3 \frac{2x^2}{9} dx = \frac{2x^3}{27}\bigg|_0^3 = 2.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины может быть вычислена по формуле $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(X)\big)^2 f(x) dx$. Имеем:

$$D(X) = \int_0^3 (x-2)^2 \cdot \frac{2x}{9} dx = \int_0^3 (x^2 - 4x + 4)\frac{2x}{9} dx = \int_0^3 \frac{2x^3}{9} - \frac{8x^2}{9} + \frac{8x}{9} dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{18} - \frac{8x^3}{27} + \frac{4x^2}{9}\right)\bigg|_0^3 = \frac{1}{2}.$$

Графики функции распределения и плотности распределения вероятностей представлены на рис.2.

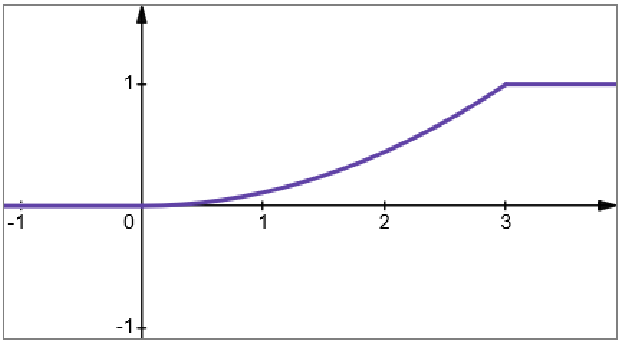

Рис. 2. а) $F(x)$

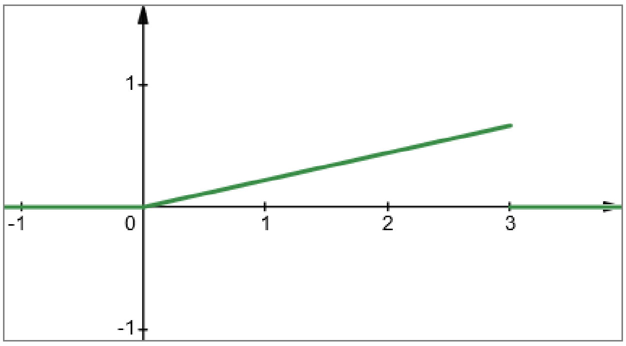

Рис. 2. б) $f(x)$

Ответ: $M(X) = 2$; $D(X) = \frac{1}{2}$; $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ и при } x > 3; \\ \frac{2x}{9}, & \text{при } 0 \le x \le 3. \end{cases}$

Правила выполнения и оформления контрольной работы №3.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил:

1. Студент должен выполнять контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера его зачётной книжки.

Последняя цифра номера зачётки	Задачи для решения
0	1.10; 2.10; 3.10; 4.10; 5.10; 6.10; 7.10; 8.10.
1	1.1; 2.1; 3.1; 4.1; 5.1; 6.1; 7.1; 8.1.
2	1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2; 7.2; 8.2.
3	1.3; 2.3; 3.3; 4.3; 5.3; 6.3; 7.3; 8.3.
4	1.4; 2.4; 3.4; 4.4; 5.4; 6.4; 7.4; 8.4.
5	1.5; 2.5; 3.5; 4.5; 5.5; 6.5; 7.5; 8.5.
6	1.6; 2.6; 3.6; 4.6; 5.6; 6.6; 7.6; 8.6.
7	1.7; 2.7; 3.7; 4.7; 5.7; 6.7; 7.7; 8.7.
8	1.8; 2.8; 3.8; 4.8; 5.8; 6.8; 7.8; 8.8.
9	1.9; 2.9; 3.9; 4.9; 5.9; 6.9; 7.9; 8.9.

2. Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. На обложке тетради должны быть четко написаны группа, фамилия и инициалы студента.
4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.
6. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

Контрольная работа №3

2 курс, 3 семестр

Задание 1. Исследовать функцию двух переменных на экстремум.

1.1. $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5.$
1.2. $z = x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 7.$
1.3. $z = 2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3.$
1.4. $z = x^2 - y^2 + 2x - 2y + 3.$
1.5. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 6y - 5.$
1.6. $z = 3x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2.$
1.7. $z = x^2 + 3y^2 + 4x + 6y + 4.$
1.8. $z = 2x^2 - 2y^2 - 6x + 4y + 1.$
1.9. $z = x^2 - y^2 - 8x - 6y - 3.$
1.10. $z = x^2 - 4y^2 - 4x - 8y + 2.$

Задание 2. Изменить порядок интегрирования

2.1. $\int_0^1 dx \int_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy.$

2.2. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x} f(x,y)dy.$

2.3. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy.$

2.4. $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy.$

2.5. $\int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy.$

2.6. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

2.7. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)dy.$

2.8. $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

2.9. $\int_0^1 dx \int_{x^2-2}^{-x} f(x,y)dy.$

2.10. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy.$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода, если AB - дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

3.1. $\int_{AB} (3x+1)dx + (2y-1)dy.$

3.2. $\int_{AB} (2x+3)dx + (y-4)dy.$

3.3. $\int_{AB} (1-x^2)dx + (3y+2)dy.$

3.4. $\int\limits_{AB} (2y+2)dx + (3x-1)dy.$

3.5. $\int\limits_{AB} (x^2+1)dx + (y-4)dy.$

3.6. $\int\limits_{AB} (3x+5)dx + (y+x)dy.$

3.7. $\int\limits_{AB} (3x+y)dx + (2y-x)dy.$

3.8. $\int\limits_{AB} (x+4)dx + (y-2x)dy.$

3.9. $\int\limits_{AB} (2y+5)dx + (3y-1)dy.$

3.10. $\int\limits_{AB} (x^2+3y)dx + (2y-5)dy.$

Задание 4. Исследовать на сходимость ряды

4.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n}$.

4.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{2n}$.

4.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+3}$.

4.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n \cdot \ln^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n!)^2}{(3n)!}$.

4.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$.

4.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$.

4.8. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n \cdot \ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8n}{2n^3 + 1}$.

4.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n \cdot \ln^2 n}$.

4.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$.

Задание 5. Найти область сходимости степенного ряда

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n \cdot 2^n}$.

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x+4)^n}{3^n}$.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2n \cdot 2^{2n}}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-4)^n}{5^n}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 \cdot 2^{2n}}$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot (x+2)^n}{2^{3n}}$.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3n \cdot 4^{\frac{n}{2}}}$.

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x-2)^n}{3^{2n}}$.

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2n^2 \cdot 9^{\frac{n}{2}}}$.

5.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot (x-1)^n}{7^n}$.

Задание 6. Вычислить вероятности указанных событий

6.1. За круглым столом сидят 5 мужчин и 5 женщин. Какова вероятность того, что два лица одинакового пола не сидят рядом, если места занимались случайно?

6.2. На столе лежат 20 экзаменационных билетов с номерами 1,2,...,20. Преподаватель берет 3 любых билета. Какова вероятность того, что они из первых четырех?

6.3. Имеется 6 отрезков, длины которых равны соответственно 2,4,6,8,10,12 единицам. Найти вероятность того, что с помощью взятых наугад трех отрезков можно построить треугольник.

6.4. Пять студентов из групп изучают английский язык, шесть студентов - немецкий и семь студентов - французский язык. Случайным образом выбрано четыре студента. Какова вероятность того, что двое из них изучают английский язык, один изучает французский и один - немецкий?

6.5. На семи карточках написаны цифры от 1 до 7. Наудачу извлекают две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет четной?

6.6. В мастерскую для ремонта поступило 10 телевизоров, из которых 3 нуждаются в общем ремонте. Мастер берет первые попавшие 5 штук. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в общем ремонте?

6.7. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что выпадет одинаковое число очков на обеих костях, и вероятность того, что на обеих костях выпадет четное число очков.

6.8. Из полной колоды карт (52 карты) вынимается наугад три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут тройка, семерка и туз.

6.9. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что номер телефона случайно выбранного абонента не содержит одинаковых цифр.

6.10. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые разбиваются на две группы по 10 человек. Определить вероятность того, что четыре наиболее сильных игрока разделятся между группами поровну.

Задание 7. Дискретная случайная величина X задана таблично. Найти математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения случайной величины.

	X_i	2	3	4	5
7.1.	p_i	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,4*
7.2.	p_i	*0,2*	*0,2*	*0,3*	*0,3*
7.3.	p_i	*0,3*	*0,1*	*0,4*	*0,2*
7.4.	p_i	*0,2*	*0,3*	*0,3*	*0,2*
7.5.	p_i	*0,1*	*0,3*	*0,1*	*0,5*
7.6.	p_i	*0,2*	*0,3*	*0,3*	*0,2*
7.7.	p_i	*0,4*	*0,4*	*0,1*	*0,1*
7.8.	p_i	*0,2*	*0,4*	*0,3*	*0,1*
7.9.	p_i	*0,5*	*0,2*	*0,2*	*0,1*
7.10.	p_i	*0,4*	*0,2*	*0,2*	*0,2*

Задание 8. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, построить графики функций распределения и плотности распределения вероятностей.

8.1. $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

8.2. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<1, \\ 2-\dfrac{2}{x}, & \text{при } 1\le x\le 2, \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

8.3. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ e^{x}-1, & \text{при } 0\le x\le \ln 2, \\ 1, & \text{при } x>\ln 2. \end{cases}$

8.4. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<\dfrac{\pi}{4}, \\ -\cos 2x, & \text{при } \dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

8.5. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ \dfrac{x^3}{8}, & \text{при } 0\le x\le 2, \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

8.6. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}, & \text{при } \dfrac{3}{4}\le x\le 1, \\ 1, & \text{при } x>1. \end{cases}$

8.7. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ 2\sin x, & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

8.8. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ \sqrt{x}, & \text{при } 0\le x\le 1, \\ 1, & \text{при } x>1. \end{cases}$

8.9. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ 2\sin\dfrac{x}{2}, & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

8.10. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0, \\ \ln x, & \text{при } 0\le x\le e, \\ 1, & \text{при } x>e. \end{cases}$

Библиографический список

Основной

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс\ Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2014. – 608 с.
2. Лекции по высшей математике/А.Д. Мышкис. 10-е изд. – М.: Наука, 2007. – 688 с.
3. Дифференциальные уравнения в приложениях: учеб. пособие для студентов всех техн. специальностей и направлений бакалавриата / А. С. Горлов, В. Б. Никуличев. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2016. – 139 с.
4. Математика: практикум: учебное пособие / Ю. А. Феоктистов. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2017. – 86 с.
5. Математический анализ: учебное пособие для студентов младших курсов технических направлений и специальностей. Ч.1 / Г. М. Редькин, А. С. Горлов, Е. И. Красюкова. – Белгород: Издательство БГТУ им. В. Г. Шухова, 2019. – 128 с.

Дополнительный

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/Под ред . проф. Н.Ш. Кремера, –4-е изд., М.: ЮНИТИ, 2006. – 479 с.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б. П. Демидовича . – М.: Астрель, 2004. – 495 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 – М.: Интеграл-Пресс, 2010.