Лекция 5

Интегрирование простейших иррациональностей

Выпишем табличные интегралы, где используются иррациональные выражения.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

Необходимо выделить полный квадрат квадратного трехчлена и привести выражение к первым двум интегралам.

5. $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx,\ a \neq 0.$

При решении таких интегралов используется подстановка

$$t = \sqrt[n]{ax+b},\ x = \frac{t^n - b}{a},\ dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

После использования подстановки интеграл сводится к двум первым.

6. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ a \neq 0,\ c \neq 0.$

Интеграл вычисляется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad k = НОК(n, m),\ (cx+d)t^k = ax+b,\ x = \frac{b-dt^k}{ct^k - a}.$$

7. $\int \frac{dx}{(ma+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}},\ r = 1;\ 2.$

Для этих интегралов используется подстановка $t = \frac{1}{mx+n}$.

8. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$

Сначала следует выделить полный квадрат квадратного трехчлена и ввести новую переменную $t = x + \dfrac{b}{2a}$.

После этого получим один из интегралов, каждый из которых вычисляется соответствующей подстановкой:

1) $\int R\left(t, \sqrt{m^2 - t^2}\right)dt, \quad t = m\sin u \quad$ или $\quad t = m\cos u,$

2) $\int R\left(t, \sqrt{m^2 + t^2}\right)dt, \quad t = m\mathrm{tg}u \quad$ или $\quad t = m\mathrm{ctg}u,$

3) $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - m^2}\right)dt, \quad t = \dfrac{m}{\sin u} \quad$ или $\quad t = \dfrac{m}{\cos u}.$

9. $\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx, \quad a, b \in R, \quad m, n, p \in Q.$

В зависимости от значения переменной p используется разная подстановка.

1) $p \in Z, \quad x = t^r, \quad r = HOK(m, n),$

2) $p = \dfrac{k}{s}$ и $\dfrac{m+1}{n} \in Z, \quad ax^n + b = t^s,$

3) $p = \dfrac{k}{s}$ и $\dfrac{m+1}{n} \notin Z, \quad \left(\dfrac{m+1}{n} + p\right) \in Z, \quad t^s = \dfrac{ax^n + b}{x^n}.$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}} = \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 3 = x^2 - 6x + 9 - 6 = (x-3)^2 - 6, \\ t = x - 3, dt = dx \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{t^2 - 6}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 6}\right| + C = \ln\left|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 3}\right| + C.$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left[t = \sqrt[3]{x+1}, x = t^3 - 1, dx = 3t^2 dt\right] = \int \frac{t^3 - 1}{t} 3t^2 dt =$$

$$= 3\int \left(t^4 - t\right)dt = 3\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2\right) + C = \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}=\left[\begin{array}{l} HOK(2,3)=6,\, t=\sqrt[6]{x}, \\ x=t^6,\, dx=6t^5dt \end{array}\right]=\int \frac{6t^5dt}{(t^2+4)t^3}=6\int \frac{t^2dt}{(t^2+4)}=$$

$$=6\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=6\int\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=6\left(t-2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)+C=6\left(\sqrt[6]{x}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}\right)+C.$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x^2-2x+10}dx.$

Решение.

$$\int \sqrt{x^2-2x+10}dx=\left[x^2-2x+10=x^2-2x+1+9=(x-1)^2+9,\, t=x-1,\, dt=dx\right]=$$

$$=\int \sqrt{t^2+9}dt=\left[t=3\operatorname{tg}u,\, dt=\frac{3du}{\cos^2 u},\, t^2+9=9\operatorname{tg}^2u+9=9\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)\right]=\int \sqrt{\frac{9}{\cos^2 u}}\frac{3du}{\cos^2 u}=$$

$$=9\int \frac{du}{\cos^3 u}=9\int \frac{\cos u}{\cos^4 u}du=\left[\begin{array}{l} y=\sin u,\, dy=\cos u du, \\ \cos^4 u=(1-\sin^2 u)^2 \end{array}\right]=9\int \frac{dy}{(1-y^2)^2}=$$

$$=\left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{(1-y^2)^2}=\dfrac{A}{1-y}+\dfrac{B}{(1-y)^2}+\dfrac{C}{1+y}+\dfrac{D}{(1+y)^2}, \\ 1=A(1+y)^2(1-y)+B(1+y)^2+C(1-y)^2(1+y)+D(1-y)^2, \\ \begin{array}{ll} y^3: 0=-A+C, & A=0{,}25 \\ y^2: 0=-A+B-C+D, & B=0{,}25 \\ y^1: 0=A+2B-C-2D, & C=0{,}25 \\ y^0: 1=A+B+C+D, & D=0{,}25 \end{array} \end{array}\right]=$$

$$=0{,}25\int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right)dy=0{,}25\left(-\ln|1-y|+\frac{1}{1-y}+\ln|1+y|-\frac{1}{1+y}\right)+C=$$

$$=0{,}25\left(\frac{2y}{1-y^2}+\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|\right)+C.$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$

Решение.

$$\int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{5},\ n=\frac{3}{5},\ p=-\frac{1}{2},\ s=2,\ \frac{m+1}{n}=\frac{0{,}2+1}{0{,}6}=2\in Z,\ 3-2x^{\frac{3}{5}}=t^2, \\ x^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\quad x=\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{5}{3}},\quad dx=-\frac{5}{3}\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}tdt \end{array}\right]=$$

$$=\int\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{5}{3}\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}tdt\right)=-\frac{5}{3}\int\frac{3-t^2}{2}dt=-\frac{5}{6}\left(3t-\frac{t^3}{3}\right)+C=$$

$$=-\frac{5}{6}\left(3\sqrt{3-2x^{\frac{3}{5}}}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{3-2x^{\frac{3}{5}}}\right)^3\right)+C.$$