Лекция 4

Интегрирование тригонометрических выражений

Выпишем табличные интегралы от тригонометрических выражений.

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

5. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

6. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

7. $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(\alpha x - \beta x) + \cos(\alpha x + \beta x)\right) dx.$

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(\alpha x - \beta x) - \cos(\alpha x + \beta x)\right) dx.$$

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(\alpha x - \beta x) + \sin(\alpha x + \beta x)\right) dx.$$

8. $\int R(\sin x,\ \cos x\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x) dx.$

Для вычисления такого вида интегралов используется универсальная подстановка: $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} y,\ dx = \frac{2dy}{y^2+1}$.

Все тригонометрические функции можно выразить через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1},\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1},\quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Через подстановку находим выражения для тригониметрических функций:

$$\sin x=\frac{2y}{y^2+1},\quad \cos x=\frac{1-y^2}{y^2+1},\quad \mathrm{tg}x=\frac{2y}{1-y^2},\quad \mathrm{ctg}x=\frac{1-y^2}{2y}.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

Решение. Применим универсальную подстановку.

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\left[y=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\, x=2\mathrm{arctg}y,\, dx=\frac{2dy}{y^2+1},\, \cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]=$$

$$=\int\frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}}\frac{2dy}{y^2+1}=\int dy=y+C=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

9. $\int\sin^n x\cos^m xdx=-\cos x+C.$

В зависимости от четности или нечетности показателя степени функций используются разные подстановки.

1) $n-$ **четное,** $m-$ **четное, положительные**.

Воспользуемся формулами понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

2) $n-$ **нечетное,** $m-$ **четное (**$n-$ **четное,** $m-$ **нечетное), положительные.**

От функции в нечетной степени следует отщепить функцию в первой степени и ввести новую переменную: $t=\cos x,\, dt=-\sin xdx$

$(t=\sin x,\, dt=\cos xdx).$

3) $n-$ **четное,** $m-$ **четное, отрицательные**.

Используем подстановку

$$t=\mathrm{tg}x,\, dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx,\, \frac{1}{\cos^2 x}=1+t^2,$$

или $t=\mathrm{ctg}x,\, dt=-\frac{1}{\sin^2 x}dx,\, \frac{1}{\sin^2 x}=1+t^2.$

4) $n-$ **нечетное или** $m-$ **нечетное, отрицательные**.

В этом случае необходимо домножить и числитель и знаменатель на любую функцию в первой степени и ввести переменную:

$t=\sin x,\, dt=\cos xdx$ или $t=\cos x,\, dt=-\sin xdx.$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\sin^3 x\cos^2 xdx.$

Решение.

$$\int\sin^3 x\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=[t=\cos x,\, dt=-\sin xdx]=$$

$$=-\int(1-t^2)t^2dt=-\int(t^2-t^4)dt=-\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \left[\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)dx = \left[\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \sin x \cos 5x dx$.

Решение.

$$\int \sin x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int \sin(x-5x) + \sin(x+5x)dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x - \sin 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x \right) + C = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$