Лекция 3
Интегрирование специальных функций

. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональные функции можно представить в виде $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x) -$ многочлены степени n, m.

Выпишем известные формулы табличных интегралов.

1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$

2. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a} \frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C.$

3. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C.$

4. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

5. $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + C.$

Следующие интегралы можно решить, используя приемы.

6. $\int \frac{(ax+b)dx}{x^2+px+q}.$

а) если квадратный трехчлен в знаменателе x^2+px+q раскладывается на множители ($D > 0$), то имеет место равенство:

$$\int \frac{(ax+b)dx}{x^2+px+q} = \left[\begin{array}{l} x^2+px+q=0, \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a} \end{array} \right] = \int \frac{(ax+b)dx}{(x-x_1)(x-x_2)};$$

б) если квадратный трехчлен в знаменателе x^2+px+q не раскладывается на множители ($D < 0$), то выделяется полный квадрат многочлена и вводится новая переменная $t = x + 0{,}5p.$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx.$

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2+4x+9=0,\ D=16-36=-20<0.$

Многочлен не раскладывается на множители. Выделим полный квадрат:

$$x^2+4x+9=x^2+4x+4+5=(x+2)^2+5.$$

$$\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx=\begin{bmatrix} t=x+2, \\ x=t-2, \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{6(t-2)+5}{t^2+5}dt=\int\frac{6t-7}{t^2+5}dt=$$

$$\int\frac{6t}{t^2+5}dt-7\int\frac{dt}{t^2+5}=3\ln\left|t^2+5\right|-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=3\ln\left|x^2+4x+9\right|-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

7. $\int\frac{(ax+b)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$.

В этом случае выделяют полный квадрат квадратного трехчлена и вводят новую переменную:

$$z=\frac{x+0{,}5p}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}},\ x=z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2},\ \ dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dz.$$

8. Интегрирование дробно-рациональных функций $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

а) Если степень многочлена в числителе больше степени в знаменателе ($n > m$), то выделяют целую часть, деля числитель на знаменатель.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[n>m\right]=W_{n-m}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_m(x)},\quad r<m.$$

б) Если степень многочлена в числителе меньше степени в знаменателе ($n < m$), то раскладывают знаменатель на простые множители

$$Q_m(x)=(x-x_1)(x-x_2)^k...(x^2+px+q)...(x^2+p_1x+q_1)^s,$$

где $x_1, x_2 -$ корни многочлена, $k, s -$ кратности корней или неразложимых м трехчленов ($D < 0$).

Дробь тогда можно представить в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B_1}{x-x_2}+...+\frac{B_k}{(x-x_2)^k}+\frac{Cx+D}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+p_1x+q_1)^s}.$$

В итоге интеграл можно свести к простейшим интегралам, найдя неизвестные коэффициенты.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Решение. Так как знаменатель уже разложен на простые множители, то представим дробь в виде суммы простейших дробей и найдем неизвестные коэффициенты разложения:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Найдем дополнительные множители для дробей и выпишем равенство числителей правой и левой части равенства:

$$x^2-5x+9=A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменных. Из полученной системы уравнений найдем неизвестные коэффициенты $A, B, C, D.$

$$\begin{aligned} &x^3: 0=A+C, \\ &x^2: 1=A+B-2C+D, \\ &x^1: -5=2B+C-2D, \\ &x^0: 9=-2A+2B+D, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &A=-\frac{7}{5}, \quad B=1, \\ &C=\frac{7}{5}, \quad D=\frac{21}{5}. \end{aligned}$$

Получим следующие интегралы:

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{5}\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$$

Вычислим каждый интеграл.

1. $-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{7}{5}\ln|x-1|+C_1;$

2. $\int\frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}+C_2;$

3. $\frac{7}{5}\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx=\begin{bmatrix} x^2+2x+2=(x+1)^2+1, \\ t=x+1, x=t-1, dx=dt \end{bmatrix}=\frac{7}{5}\int\frac{t+2}{t^2+1}dt=$

$$=\frac{7}{5}\int\frac{t}{t^2+1}dt+\frac{14}{5}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{7}{10}\ln|t^2+1|+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}t+C_3=$$

$$=\frac{7}{10}\ln|x^2+2x+2|+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C_3$$

В итоге получим:

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln|x^2+2x+2|+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x-1)+C.$$