Лекция 2

Основные методы интегрирования

Табличное интегрирование

Этот метод заключается в том, что подинтегральная функция подводится под табличные функции и используются свойства неопределенного интеграла.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \left(e^x + 2x^3 - \sin x\right)dx.$

Решение. $\int \left(e^x + 2x^3 - \sin x\right)dx = e^x + \frac{1}{2}x^4 + \cos x + C.$

Приме 2. Вычислить интеграл $\int \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

Решение. $\int \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx =$

$= \int \left(1 + \sin x\right)dx = x - \cos x + C.$

Метод подстановки

Во многих случаях введение новой переменной позволяет свести интеграл к табличному интегралу. Этот метод основан на теореме.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X. Тогда, если на промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \left[x = (t)\right] = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется формулой замены переменной. Сам прием можно разделить на два подхода.

1. **Подведение под дифференциал**.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x \cos x dx.$

Решение. Так как дифференциалом функции $\sin x$ является выражение $\cos x dx$, то получим:

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \left[t = \sin x, dt = \cos x dx\right] = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2. **Введение новой переменной**.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx.$

Решение. $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = [t = x-1,\ x = t+1,\ dx = dt] = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dx =$

$$= \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2}dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Метод интегрирования по частям

Метод основан на использовании формулы дифференцирования двух функций.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть $u'(x)v(x)$ функция имеет первообразную на промежутке X. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X и справедлива формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Эту формулу можно записать короче:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \mathrm{arctg}x dx.$

Решение.

$$\int \mathrm{arctg}x dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{arctg}x,\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x^2+1},\ v = x \end{bmatrix} = x \cdot \mathrm{arctg}x - \int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x^2+1, \\ dt = 2xdx,\ xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{bmatrix} = x \cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x \cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= x \cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$$