

Лекция 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определение неопределенного интеграла

Основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции по ее производной.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a, b) если для любых $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, если $F(x) = \cos x$, то $f(x) = -\sin x$.

Задача определения первообразной функции неоднозначна. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$ является первообразной, где C – константа, так как

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на множестве X , то множество $F(x) + C$, $C = \text{const}$, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией.

Выражение $f(x)dx$ называется подинтегральным выражением.

Переменная x называется переменной интегрирования.

Восстановление функции по ее производной называется интегрированием. Эта операция является обратной дифференцированию. Для того, что проверить правильность интегрирования, достаточно продифференцировать полученный результат.

Пример. Найти интеграл $\int x^4 dx$.

Решение. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$.

Проверим результат: $\left(\frac{x^5}{5} + C\right)' = \frac{5x^4}{5} + 0 = x^4$.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$

3. $\int dF(x) = F(x) + C,$
4. $f(x) \int kf(x)dx = k \int F(x)dx, \quad k \neq 0,$
5. $f(x) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

3. Интегралы простейших функций

- 1 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- 2 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- 3 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C$
- 4 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin}x + C$
- 5 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- 6 $\int e^x dx = e^x + C$
- 7 $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- 8 $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 9 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$
- 10 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$
- 11 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
- 12 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$
- 13 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$

Эти интегралы принято называть табличными.