Межрегиональная студенческая олимпиада по математике. 2023г.
Решения задач. 1 курс.

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(5y-3z) = -19; \\ y(x+2z) = -14; \\ z(3x-2y) = 21. \end{cases}$$

Решение: пусть $xy = n$, $xz = m$, $yz = t$. Имеем:

$$\begin{cases} 5n - 3m = -19; \\ n + 2t = -14; \\ 3m - 2t = 21, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} n = -2; \\ m = 3; \\ t = -6, \end{cases} \text{или} \begin{cases} xy = -2; \\ xz = 3; \\ yz = -6, \end{cases}$$

откуда окончательно имеем два решения $(1; -2; 3)$ и $(-1; 2; -3)$.

Ответ: $(1; -2; 3)$ и $(-1; 2; -3)$.

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & q^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Решение: Обозначим

$$I_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & q^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая по последней строке имеем:

$$I_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q^{n-3} & 0 \end{vmatrix} + q^{n-2} I_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^n \cdot 1 \cdot q \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-3} + q^{n-2} I_{n-1} =$$

$$= -1 \cdot q \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-3} + q^{n-2}(-1 \cdot q \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-4} + q^{n-3} I_{n-2}) = \ldots =$$

$$= \frac{1\cdot q\cdot q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-2}}{q^{n-2}} - \frac{1\cdot q\cdot q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-2}}{q^{n-3}} - \frac{1\cdot q\cdot q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-2}}{q^{n-4}} - \ldots - \frac{1\cdot q\cdot q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-2}}{1} =$$

$$= -\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots\frac{1}{q^{n-2}}\right)\cdot 1\cdot q\cdot q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-2} = -q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\frac{\left(1-\frac{1}{q^{n-1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Замечание: Можно из каждой строки после первых двух вынести множитель q^{m-2}, где m - номер строки, а затем из первой строки вычесть все оставшиеся.

Ответ: $-\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots\frac{1}{q^{n-2}}\right)\cdot 1\cdot q\cdot q^2\cdot\ldots\cdot q^{n-2} = -q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\frac{\left(1-\frac{1}{q^{n-1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{q}\right)}$.

Задача 3. Найдите минимальное значение $n\in\mathbb{N}$, для которого выполняется равенство:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

Решение: Преобразуем матрицу из левой части: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} =$

$$= 2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Заметим

$$\left(\cos\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\left(\cos\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \cos(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\left(\cos\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = \cos(n\alpha)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(n\alpha)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\frac{\pi n}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, откуда $n=12$.

Ответ: $n=12$.

Задача 4. Пусть углы между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{a}$ равны соответственно α, β и γ. Доказать, что векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Решение: Пусть векторы компланарны. Тогда угол γ может принимать значения $\alpha\pm\beta$ или $2\pi-\alpha-\beta$.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = \cos^2\alpha+\cos^2\beta+(\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta)^2 =$$

$$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta\mp 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta\mp 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha+1+\cos^2\alpha\cos^2\beta\mp 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha(1+\cos^2\alpha-\sin^2\beta)+1\mp 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta =$$

$$= 1+2\cos^2\alpha\cos^2\alpha \mp 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = 1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Пусть теперь выполняется

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \qquad (1)$$

Введём систему координат так, что ось Ox сонаправлена с вектором $\overrightarrow{a}$, т.е. $\overrightarrow{a} = \{|a|,0,0\}$; векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ лежат в плоскости XOY, причём $\overrightarrow{b} = \{|b|\cos\alpha, |b|\sin\alpha, 0\}$. Пусть $\overrightarrow{c} = \{x,y,z\}$. Из скалярных произведений $\overrightarrow{a}\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$ имеем:

$$\cos\gamma = \frac{x|a|}{|a||c|} = \frac{x}{|c|};$$

$$\cos\beta = \frac{x|b|\cos\alpha+y|b|\sin\alpha}{|b||c|} = \frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{|c|}.$$

Подставляя эти углы в (1) получим:

$$\cos^2\alpha+\frac{x^2}{c^2}+\frac{x^2\cos^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha+y^2\sin^2\alpha}{c^2} = 1+2\cos\alpha\frac{x^2\cos\alpha+xy\sin\alpha}{c^2};$$

$$c^2\cos^2\alpha+x^2+x^2\cos^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha+y^2\sin^2\alpha = c^2+2x^2\cos^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\alpha;$$

$$c^2\cos^2\alpha+x^2\sin^2+y^2\sin^2\alpha = c^2;$$

$$c^2 = x^2+y^2.$$

Т.к. $c^2 = x^2+y^2+z^2$, то $z^2=0$, а значит вектор $\overrightarrow{c}$ лежит в плоскости XOY т.е. векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны.

Задача 5. При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4y=0; \\ x+a(y+z-1)=0. \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Решение: Заметим, что первое уравнение системы можно записать в виде $x^2+(y+2)^2+z^2=4$, а значит представляет собой сферу радиуса 2 с центром $O(0;-2;0)$. Второе уравнение системы - плоскость α. Тогда система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда плоскость касается сферы, т.е. расстояние от центра до плоскости равно радиусу. Имеем:

$$\rho(O,\alpha) = \frac{|x+ay+az-a|}{\sqrt{1+a^2+a^2}} = \frac{|-3a|}{\sqrt{1+2a^2}};$$

$$\frac{|-3a|}{\sqrt{1+2a^2}} = 2;$$

$$|-3a| = 2\sqrt{1+2a^2};$$

$$9a^2 = 4(1+2a^2);$$

Откуда $a = \pm 2$. Тогда нормальный вектор плоскости $\overrightarrow{n} = \{1; \pm 2; \pm 2\}$, $|n| = 3$. Пусть M - точка касания, тогда $|OM| = 2$, а значит координаты M можно найти, прибавив или вычев (т.к. мы не знаем направлен $\overrightarrow{n}$ от центра к плоскости или от плоскости к центру) из координат точки O вектор $\frac{2}{3}\overrightarrow{n}$, получим $M(\pm\frac{2}{3}; -2 \pm \frac{4}{3}; \pm\frac{4}{3})$. Сделав проверку окончательно имеем $(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ при $a = 2$ и $(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ при $a = -2$.

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$ при $a = 2$ и $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$ при $a = -2$.

Задача 6. Решить уравнение с двумя неизвестными

$$\frac{\ln x}{x} = e^{\cos y}.$$

Решение: т.к. $|\cos y| \le 1$, то $\frac{1}{e} \le e^{\cos y} \le e$. Найдём максимум левой части. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, тогда $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, откуда $x = e$ - точка максимума, при чём $f(e) = \frac{1}{e}$. Значит исходное равенство достигается только когда обе части равны $\frac{1}{e}$.Из $\cos y = -1$ находим $y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = e$, $y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. Окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом. Найти радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной прямой.

Решение: Обозначим A - центр окружности радиуса R, B - центр окружности радиуса r, C и D - точки касания общей касательной с малой и большой окружностями соответственно, E - центр необходимой окружности, F - её точка касания с общей касательной.

Введём систему координат так, что ось ox направлена вдоль касательной и точки имеют координаты $A(0; R)$, $D(0; 0)$, $B(x_B, r)$, $C(x_B, r)$. Тогда $(R + r)^2 = (R - r)^2 + x_B^2$, откуда $x_B = 2\sqrt{Rr}$.

Пусть E имеет координаты (x, y), тогда из условия касаний с окружностями и прямой $FE = y$, $AE = R + y$, $BE = r + y$. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 + (y - R)^2 = (y + R)^2; \\ (x - 2\sqrt{Rr})^2 + (y - r)^2 = (y + r)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4yR; \\ (x - 2\sqrt{Rr})^2 = 4yr; \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{4R}; \quad (x - 2\sqrt{Rr})^2 = \frac{x^2 r}{R}; \quad |x - 2\sqrt{Rr}| = x\sqrt{\frac{r}{R}}; \quad x - 2\sqrt{Rr} = \pm x\sqrt{\frac{r}{R}};$$

$$x\left(1 \pm \sqrt{\frac{r}{R}}\right) = 2\sqrt{Rr}; \quad x = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R} \pm \sqrt{r}}; \quad y = \frac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}.$$

Ответ: $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$.

Задача 8. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx}{n}\right)^{\frac{12}{x^2}}.$$

Решение: Пусть $A_n = \dfrac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx}{n} - 1$, тогда $\lim_{x\to 0} A_n = 0$. Значит исходный предел можно представить в виде $\lim_{x\to 0}((1-A_n)^{\frac{1}{A_n}})^{\frac{12A_n}{x^2}}$.

Вычислим $\lim_{x\to 0} \dfrac{12A_n}{x^2}$, дважды применив правило Лапиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-12(\cos x + 2^2\cos 2x + \ldots + n^2\cos nx)}{2n} = \frac{-12(1+2^2+\ldots+n^2)}{2n} = -(n+1)(2n+1).$$

Тогда исходный предел $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx}{n}\right)^{\frac{12}{x^2}} = e^{-(n+1)(2n+1)}$.

Замечание: Здесь была использована формула $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ответ: $e^{-(n+1)(2n+1)}$.

Задача 9. Найти предел последовательности, заданной рекуррентно $a_n = (a_{n-1}+1)/3$, $a_0 = 0$.

Решение: $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{a_{n-1}}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{a_{n-2}}{3^2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{a_{n-3}}{3^3} = \ldots =$ $= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$, откуда $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

Ответ: $1/2$.

Задача 10. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(6;0;3)$ до поверхности $z = x^2 + 2y^2$.

Решение: Так как поверхность симметрична относительно оси oz, а точка имеет нулевую y координату, то кратчайшее расстояние будет лежать в плоскости xOz. Пусть точка $N(x;0;x^2)$ такая, что MN - кратчайшее расстояние. Имеем $|MN| = \sqrt{(x-6)^2+(x^2-3)^2} = \sqrt{x^4-5x^2-12x+45}$. Приравнивая производную к нулю получим $2x^3-5x-6=0$, с единственным действительным корнем $x=2$. $|MN| = \sqrt{(2-6)^2+(4-3)^2} = \sqrt{17}$.

Ответ: $\sqrt{17}$.

Решения задач. 2 курс.

Задача 1. Пусть $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$. Найти разложение вектора $\overrightarrow{m}$ по векторам $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, если углы между ними равны $\pi/3$ и они единичной длинны.

Решение: Введём систему координат так, что вектор $\overrightarrow{a} = \{1;0;0\}$, а вектор $\overrightarrow{b} = \{\cos\frac{\pi}{3}; \sin\frac{\pi}{3}; 0\} = \{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\}$. Вектор $\overrightarrow{c} = \{x;y;z\}$ найдём из скалярных произведений:

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}}{|a||c|}; \quad \frac{1}{2} = x;$$

$$\cos(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \frac{\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}{|b||c|}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y; \quad y = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left\{0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}; \quad \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{2\sqrt{3}}\right\}; \quad \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \left\{0; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{2\sqrt{3}}\right\};$$

$$\overrightarrow{m} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\};$$

Составим систему $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} = \overrightarrow{m}$:

$$\begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{1}{2\sqrt{3}}\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}; \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \\ \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\gamma\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{4\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ответ: $\overrightarrow{m} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

Задача 2. На сфере $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ найти точку, ближайшую к отрезку AB, $A(1;2;3)$, $B(3;4;1)$.

Решение: $O(0;0;1)$ - центр сферы. $\overrightarrow{OA} = \{1;2;2\}$, $|OA| = 3$, $\overrightarrow{OB} = \{3;4;0\}$, $|OB| = 5$, $\overrightarrow{AB} = \{2;2;-2\}$, $|AB| = 2\sqrt{3}$.

Из скалярного произведения $\cos(AOB) = \frac{\overrightarrow{OB}\overrightarrow{BA}}{|OB||AB|} = \frac{-6-8}{10\sqrt{3}} < 0$, значит $\angle AOB$ тупой, а значит высота треугольника, опущенная из точки O будет лежать вне отрезка AB. Тогда минимальное расстояние от O до отрезка AB будет $|OA| = 3$, а что бы найти ближайшую к AB точку на сфере, достаточно прибавить к O вектор $\frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|} = \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$, получим точку $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3})$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Задача 3. Найдите минимальное значение $n \in \mathbb{N}$, для которого выполняется равенство:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

Решение: см. задачу 3 для 1го курса.

Задача 4. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |3\cos nx - 4\sin nx| dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение: $3\cos nx - 4\sin nx = 5\sin(\alpha - nx)$, где $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Функция $|\sin(\alpha - nx)|$ имеет период $\frac{\pi}{n}$ значит $\int_0^{2\pi} |\sin(\alpha - nx)| dx = 2n \int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha+\pi}{n}} |\sin(\alpha - nx)| dx$. После замены $t = \alpha - nx$ имеем $2\int_0^{-\pi} \sin t dt = 4$. Окончательно:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |3\cos nx - 4\sin nx| dx = \lim_{n\to\infty} 5\cdot 4 = 20$$

.

Ответ: 20.

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение:

$$xy'' = (\sin y - 1)y', \quad y(1) = 0,\ y'(1) = -1.$$

Решение:

$$xy'' + y' = \sin y \cdot y'; \quad (xy')' = (-\cos y)'; \quad xy' = c_1 - \cos y;$$

Подставив начальные условия имеем $1 \cdot (-1) = c_1 - 1$, откуда $c_1 = 0$.

$$\frac{dy}{\cos y} = -\frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin y}{1 - \sin y} \right| = -\ln|x| + c_2;$$

Подставив начальные условия имеем $\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1}{1}\right| = -\ln|1| + c_2$, откуда $c_2 = 0$.

Окончательно имеем: $\sqrt{\frac{1+\sin y}{1-\sin y}} = \frac{1}{|x|}$ или $\frac{1+\sin y}{|\cos y|} = \frac{1}{|x|}$.

Ответ: $\dfrac{1 + \sin y}{1 - \sin y} = \dfrac{1}{x^2}$.

Задача 6. Решить уравнение с двумя неизвестными

$$\frac{\ln x}{x} = e^{\cos y}.$$

Решение: см. задачу 6 для 1го курса.

Задача 7. Вычислить

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt[3]{y}} e^{2x - x^2} dx.$$

Решение: Поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt[3]{y}} e^{2x-x^2}dx = \int_0^1 dx \int_0^{(1-x)^3} e^{2x-x^2}dy = \int_0^1 (1-x)^3 e^{2x-x^2}dx.$$

Сделаем теперь замену $t = 2x - x^2$, тогда $dt = (2-2x)dx$, $(1-x)^2 = 1-2x+x^2 = 1-t$:

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(1-t)e^t dx = \frac{1}{2}\left((1-t)e^t\Big|_0^1 + \int_0^1 e^t dx \right) = \frac{e-2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{e-2}{2}$.

Задача 8. Какие значения может принимать выражение

$$xye^{-\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)},$$

если $1 \le x^2+y^2 \le 4$.

Решение: Пусть

$$f(x,y) = xye^{-\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)},$$

тогда $f(x,y) = f(y,x) = f(-x,-y) = -f(-x,y)$, а значит достаточно рассмотреть случай $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $0 \le y \le x$.

Переходя к полярным координатам имеем:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4};$$

$$f(x,y) = xye^{-\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)} = \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot e^{-\dfrac{\rho^2}{2}} = \frac{\rho^2\sin(2\varphi)}{2}e^{-\dfrac{\rho^2}{2}} = u(\rho,\varphi).$$

Приравнивая частные производные к нулю имеем:

$$\begin{cases} u'_\rho = \dfrac{\sin(2\varphi)}{2}\left(2\rho e^{-\dfrac{\rho^2}{2}} - \rho^3 e^{-\dfrac{\rho^2}{2}}\right) = \dfrac{\sin(2\varphi)}{2}\rho e^{-\dfrac{\rho^2}{2}}\left(2-\rho^2\right); \\ u'_\varphi = \rho^2\cos(2\varphi)e^{-\dfrac{\rho^2}{2}}, \end{cases}$$

откуда $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ единственная точка, подозрительная на экстремум, в рассматриваемой области. $u\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sin(\frac{\pi}{2})}{2}e^{-1} = e^{-1}$.

Найдём значения на границе области: $u|_{\varphi=0} = 0$; $u|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{\rho^2}{2}e^{-\frac{\rho^2}{2}}$ - экстремум в $\rho = \sqrt{2}$, $u|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}(1) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, $u|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}(2) = 2e^{-2}$; $u|_{\rho=1} = \frac{\sin(2\varphi)}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ и $u|_{\rho=2} = 2\sin(2\varphi)e^{-2}$ не имеют экстремумов. Таким образом максимальное значение $f_{max} = f(1,1) = e^{-1}$, минимальное соответственно $f_{min} = f(1,-1) = -e^{-1}$.

Ответ: от $-e^{-1}$ до e^{-1}.

Задача 9. Найти $f'(1)$, если $f\left(\dfrac{x}{2-x}\right) = x$.
Решение: продифференцировав обе части равенства, получим:

$$f'\left(\frac{x}{2-x}\right)\frac{(2-x)+x}{(2-x)^2} = 1; \quad f'\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{(2-x)^2}{2};$$

Пусть $\frac{x}{2-x} = 1$, тогда $x = 1$, значит

$$f'(1) = \left.\frac{(2-x)^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Задача 10. Ряд $f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots$ сходится равномерно к $S(x) = x^2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Найти $f(x)$.

Решение: в силу равномерной сходимости ряда $S(x) = f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots$, его можно дифференцировать - $S'(x) = f'(x) - f''(x) + f'''(x) + \ldots$. Заметим, что тогда $S(x) = f(x) - S'(x)$ или $f(x) = S(x) + S'(x)$. Подставив $S(x) = x^2$, получим $f(x) = S(x) + S'(x) = x^2 + 2x$.

Ответ: $f(x) = x^2 + 2x$.