**5. Логика предикатов**

1. Определение предиката.
2. Кванторы общности и существования.
3. Алфавит логики предикатов.
4. Формулы логики предикатов.
5. Префиксная (предваренная) нормальная форма.
6. Стандартная форма Скулема.
7. Выполнимость предиката.

Многие высказывания на самом деле ими не являются, так как содержат переменные, истинные значения которых не указаны. Данные предложения могут принимать любые значения: истинные или ложные. Такие утверждения называются **предикатами**.

**Предикат** – это повествовательное предложение, содержащее предметные переменные, которые определены на соответствующих множествах. При замене этих переменных значениями из предметного множества предложение превращается в высказывание, т. е. принимает значение «истина» или «ложь».

Число переменных в таком предложении определяет вид предиката. Если используется переменная одна, то предикат называется **одноместным**, предложение с двумя переменными – **двуместным предикатом**, с *n* переменными предикат называется ***n*-местным**.

Таким образом, определение предиката можно дать такое:

***n*-местным предикатом** называется функция  от *n* перемен-ных, принимающих значения из некоторых заданных предметных областей а сама функция принимает два значения из множества 

Данное понятие объединяет в одно понятия высказывания, отношения, функции.

Переменных, значения которых определяют истинность предиката, образуют **множество** **истинности** **предиката**.

К предикатам применяются те же операции, что и к высказываниям: .

**Примеры**.

1) Пусть множество *В* – множество натуральных чисел. Рассмотрим предикат: « *х* – простое число». Тогда  « 2 – простое число» истинно, а  « 6 – простое число» ложно.

2) Имеется предикат  «животное *х* ест пищу *y*», предметные области *X* = {заяц, волк, медведь, лиса}, *Y* = {морковь, мясо, мед}. Тогда  «животное *заяц* ест *морковь*» истинно, т. е. 1, а  «животное *лиса* ест *морковь*» ложно, т. е. 0.

3) Имеется предикат «*х* – валюта *y*». Пусть множество *x* {доллар, рубль, крона, марка}, множество *y*{Россия, США, Англия}. Тогда высказывания «*доллар* – валюта *США*» – истинно, «*доллар* – валюта *России*» – ложно.

4) Имеется отношение *R* «натуральное число *х* делится без остатка на натуральное число *y*» можно задать как предикат . Тогда – истинно, – ложно.

5) Функцию  можно задать как предикат . Тогда – истинно, – ложно.

**Кванторы общности и существования.**

Логика предикатов имеет свои связки, которые называют кванторами:

1. – квантор **всеобщности**;
2.  – квантор **существования**.

Применение квантора к какой-нибудь переменной называется **навешиванием** квантора на переменную. Переменная, к которой относится квантор, называется **связанной**. Переменная, не связанная с квантором, называется **свободной** переменной. Навешивание квантора на предикат уменьшает местность предиката (число переменных) на единицу. Например, предикат  является трехместным, а предикат  является двуместным.

**Квантор всеобщности** или **общности** превращает предикат  в высказывание « для любого (всякого) *х* истинно».

**Квантор существования** превращает предикат в высказывание  « существует *х* такой, что истинно».

Кванторы можно применять к многоместным предикатам.

**Примеры**.

1. На множестве целых чисел задан предикат  «*x* делится на *y*». Тогда высказывание  означает, что для всякого *х* существует такой *y*, что *х* делится на *y*, и оно является истинным. Высказывание вида  «существует такой *х*, что для всякого *y* выполняется условие *х* делится на *y*» – является ложным. Это так, потому что не существует целого числа, которое делилось бы на все целые числа.
2. Пусть имеется предикат  «*x* четное число». Тогда высказывание истинно на множестве четных чисел и ложно, если множество содержит хоть одно нечетное число.
3. Пусть на множестве людей задан предикат  «*x* любит *y*». Разное навешивание кванторов поразному словесно описывает полученную формулу:

а)  «для любого *x* существует *y*, которого он любит»;

б) «существует такой *y*, которого любят все *х*»;

в)  «все люди любят всех людей»;

г)  «существует такой человек *х*, который всех любит»;

д)  «каждого человека кто-то любит».

**Алфавит логики предикатов** состоит из:

1. предметные константы *p*, *q*, *r*, …(принимают значения 0 или 1);
2. предметные переменные *x*, *y*, *z*,…(принимают значения предметного множества);
3. функциональные переменные *f*, *g*, *h*,…;
4. предикатные переменные *P*, *Q*, *R*,…;
5. символы логических операций 
6. кванторы 
7. запятая, скобки.

**Формулы логики предикатов**. Для ввода понятия формулы логики предикатов вводится понятие **терма**. **Термом** называется всякая предметная константа, предметная переменная или функция от терм.

**Формулой логики предикатов** называется:

1.  формула со свободными переменными  в термах
2. Если *А* – формула, то – формула.
3. Если *А* и *В* – формулы, то  – формулы.
4. Если *А*(*х*) – формула, то – формулы.

Свободные переменные сохраняются.

Формула без свободных переменных называется **замкнутой**.

**Пример**. 1) Выражение  является формулой.

2) Выражение  формулой не является, т. к. в формуле  переменная *х* связана квантором, а в формуле  она входит свободно.

3) Выражение  формулой не является, т. к. переменная х является и связанной квантором и свободной.

Формулы называются **равносильными** **(эквивалентными)** на предметной области *В*, если они принимают равные значения для всех значений переменных из этой области.

**Примеры равносильных формул:**

1) 

 2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

9) 

10) 

11) 

12) 

13) 

14) 

В четырех последних выражениях формула *Н* не содержит свободную переменную *х*.

Если формула логики предикатов имеет вид , то говорят, что предикат задан в **префиксной (предваренной) нормальной форме,** где  - один из кванторов , а формула  не содержит кванторов. В теории предикатов справедлива теорема: любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме. При получении ПНФ можно использовать следующие процедуры.

1. Замена символов  на символы , используя формулы



1. Использование законов двойного отрицания и законов де Моргана

  

1. Для формул, которые используют подформулыи  ввести новые переменные.
2. Использование формул равносильности.

**Пример**. Привести формулу  к префиксной или предваренной нормальной форме.

Решение. Используем равносильные формулы

  

Получим



Следовательно, предваренная нормальная форма имеет вид 

**Пример.** Привести к ПНФ формулу 

Решение. Применив правило де Моргана, получим



Применим формулу 



Применим формулу  заменим переменную *x* на *z*:



Применим дважды формулу



Применим формулу 



Если в префиксной форме предиката удалить все кванторы существования, заменив их новыми функциональными символами, то полученное выражение называется **стандартной формой Скулема**.

**Пример**. Привести формулу  к стандартной форме Скулема.

Решение. Покажем цепочку рассуждений устранения кванторов существо-вания.

1. Вместо переменной *х* введем константу *а*.
2. Следующая переменная *z*. Так как между переменными *х* и *z* только одна переменная *y*, связанная квантором всеобщности, то введем функцию  Если бы таких переменных не оказалось, то мы заменили *z* на константу.
3. Следующая переменная *w*. Между переменными *z* и *w* две переменных *t* и *v* . Поэтому заменим *w* на функцию двух переменных 
4. Получим форму Скулема: 

Формула логики предикатов (предикат) называется **выполнимой** в предметной области *В*, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу из области *В*, при которых формула принимает истинное значение. В противном случае предикат является невыполнимым. Формула называется **выполнимой**, если существует область, в которой эта формула выполнима.

Формула называется **тождественно истинной** в области *В*, если для всех значений переменных этой области формула принимает истинное значение.

Формула, тождественно истинная в любой области, называется **общезначимой** или **логическим законом**. Формула, невыполнимая в предметной области, называется **тождественно ложной** или **противоречивой**.

**Пример**. Логическим законом является формулы  Формула  тождественно ложна.

**Пример**. Определить размер предиката и его тип



если переменные предиката принадлежат множеству целых чисел.

Решение. Определяя размер или местность предиката, необходимо учесть кванторы. На предикат навешено два квантора, следовательно, предикат одноместный 

Проверим его выполнимость. Для этого найдем хотя бы одно число *z*, при котором предикат равен единице, т. е. является истинным. Например, . Получим:  для любого 

Однако, данный предикат не является тождественно истинным, так как, например, при  формула не выполнима: 

**Пример**. На множестве действительных чисел найти местность предиката и его выполнимость: 

Решение. На две переменные навешены кванторы, следовательно, этот предикат одноместный.

Преобразуем выражение в скобках  Переменные *х* и *z* связанные, переменная *у* – свободная. Выполнимость формулы зависит от переменной *у*, например, при  Для любого *х* можно найти *z*: если выражение в скобках положительное, ; если выражение в скобках отрицательное, то 