**4. Исчисление высказываний**

1. Определение исчисления высказываний.
2. Аксиомы исчисления высказываний.
3. Правила вывода.
4. Производные правила вывода.
5. Вывод из совокупности формул.
6. Правила выводимости.

**Исчисление высказываний** – это логическая система, реализуемая алгеброй высказываний. Алфавитом этой алгебры являются:

1. переменные: *x*, *y*, *z*,…;
2. логические связки:  ;
3. запятые и скобки.

Формулой исчисления высказываний является любая переменная *x*, *y*, *z*,… (ее еще называют подформулой). Если формулами являются *А* и *В*, то формулой являются выражения 

Выражения вида  формулами не являются.

Приоритет связок следующий: 

Внешние скобки в формулах обычно упускают.

**Аксиомы исчисления высказываний**:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

10) 

11) 

**Правила вывода**.

1. **Правило подстановки**, которое заключается в том, что в формуле *А* переменная *х* заменяется формулой *В*:  Данное правило используется только для доказуемых формул.
2. **Правило заключения**, позволяющее перейти от формул *А* и к формуле *В*: ПЗ(*А*, *В*).

**Производные правила вывода**. Эти правила позволяют сократить доказательство в исчислении высказываний, их получают с помощью правил подстановки и заключения.

1. **Правила одновременной подстановки**  из доказуемой формулы *А* с помощью замены переменных  на формулы  получают доказуемую формулу.
2. **Правила сложного заключения**: из доказуемых формул  и переходят к доказуемой формуле *В*.
3. **Правило силлогизма**: из доказуемых формул  и  переходят к доказуемой формуле 
4. **Правило контрапозиции**: из доказуемости формулы  следует доказуемость формулы 
5. **Правило снятия двойного отрицания**: из доказуемости формул  или  следует доказуемость формулы .

**Доказательством** в исчислении высказываний называется конечная последовательность формул, каждая из которых является или аксиомой, или получена из предыдущих формул с помощью правил вывода. Формула *А* считается **доказуемой**, если при доказательстве последней формулой является формула *А*.

**Пример**. Показать доказуемость формулы 

Решение. Выполним цепочку доказательств.

1. Используем аксиому 
2. Используем правило подстановки к формуле 1: 



1. Используем аксиому 
2. К формулам 2 и 3 применим правило заключения ПЗ(2, 3):



1. К формуле 4 применим правило подстановки 



1. К формулам 3 и 5 применим правило заключения ПЗ(3, 5): 

**Пример**. Покажем, что из доказуемости формулы  следует доказуемость формулы 

Решение. Построим цепочку доказательств.

1. Формула  доказуема по условию.
2. Используем аксиому 
3. К формуле 2 применим правило подстановки  
4. К формулам 1 и 3 применим правило силлогизма: 

**Вывод из совокупности формул**. Пусть *Н* – конечная совокупность формул в исчислении высказываний. **Выводом из совокупности формул *Н*** называется **конечная последовательность формул** в исчислении высказываний, если

1. любая формула этой последовательности принадлежит *Н*;
2. формула доказуема;
3. формула получена из предыдущих формул последовательности по правилам заключения.

Формула ***А*** называется **выводимой из совокупности формул *Н***, если существует вывод из совокупности формул *Н*, в котором последней формулой является формула *А*. Доказуемая формула выводима из любой совокупности формул. Обозначается выводимость формулы *А* из совокупности формул *Н* символом: (Ⱶ*A*).

**Пример**. Пусть задана совокупность формул  Покажем, что выводима формула 

Решение. Построим вывод.

1. *А* (формула из *Н*);
2.  (аксиома);
3.  (правило одновременной подстановки );
4.  (к формулам 1 и 3 применили правило заключения ПЗ(1, 3));

**Пример**. Пусть задана совокупность формул  Покажем, что выводима формула 

Решение. Построим вывод.

**Правила выводимости.** Пусть имеется две совокупности формул исчисления высказываний *Н*1 и *Н*2 и некоторая формула *А* исчисления высказываний.

1. Если *В* выводима из совокупности *Н*1, т о она выводима из объединения формул *Н*1 и *Н*2: (Ⱶ*B*) – (Ⱶ*B*).
2. Если *В* выводима из совокупности формул *Н*1 и *А*, а формула *А* выводима из совокупности формул *Н*1, то формула *В* выводима из совокупности формул *Н*1: (, *A*Ⱶ*B*) и (Ⱶ*А*) – (Ⱶ*B*).
3. Если *В* выводима из совокупности формул *Н*1 и *А*, а формула *А* выводима из совокупности формул *Н*2, то формула *В* выводима из совокупности объединения формул *Н*1 и *Н*2: (Ⱶ*B*) и (Ⱶ*А*) – (Ⱶ*B*).
4. Если формула  выводима из совокупности формул *Н*1, то формула *В* выводима из совокупности формул *Н*1 и *А*: (Ⱶ) – (, *A*Ⱶ*B*).
5. **Теорема дедукции**. Если (, *A*Ⱶ*B*) – (Ⱶ).
6. **Обобщенная теорема дедукции**. Если формула *В* выводима из совокупности формул {*A*1, *A*2, …, *A*n}, то формула  доказуема.
7. **Правило введения конъюнкции**. Если формулы *В* и *С* выводимы из совокупности формул *Н*1, то формула  выводима из совокупности формул *Н*1: (Ⱶ*B* и Ⱶ*С*) – (Ⱶ).
8. **Правило введения дизъюнкции**. Если формула *А* выводима из совокупности формул *Н*1, *В* и выводима из совокупности формул *Н*1, *С*, то формула *А* выводима из совокупности формул *Н*1 и : (Ⱶ*\A* и Ⱶ*A*) – (Ⱶ*A*).

**C** помощью правил выводимости можно доказать ряд законов логики.

1. **Закон перестановки посылок**. Из доказуемости формулы  получают **правило перестановки посылок** в доказуемых формулах: из доказуемости формулы  следует доказуемость формулы 
2. **Закон соединения посылок.** Из доказуемости формулы  получают **правило соединения посылок** в доказуемых формулах: из доказуемости формулы  следует доказуемость формулы 
3. **Закон разъединения посылок.** Из доказуемости формулы  получаем **правило разъединения посылок** в доказуемых формулах: из доказуемости формулы  следует доказуемость формулы 
4. **Закон исключения третьего.** Формула  доказуема.

Формулы исчисления высказываний можно рассматривать в виде булевых функций. Справедливы следующие теоремы.

1. Каждая доказуемая формула является тождественно истинной булевой функцией.
2. Каждая тождественно истинная булева функция доказуема в исчислении высказываний.