**2. Отношения**

1. Унарные отношения.

2. Декартовое произведение двух множеств.

3. Бинарные отношения.

4. Способы задания бинарных отношений.

5. Операции над бинарными отношениями.

6. Свойства бинарных отношений.

7. Отношение эквивалентности и разбиение множества.

8. Отношения порядка.

9. Функциональные отношения.

10. Функция, отображение. Операции.

11. Отношения в двоичной системе.

Между элементами множеств могут устанавливаться различные **взаимосвязи**. Их обычно называют **отношениями**. Иногда для отношений используют термин «**соответствия»**. Для определения некоторого отношения надо определить два множества: множество (область) определения и множество (область) значения.

Примеры. Человек – профессия, зарплата – должность, преступление – наказание, оценка – знание, вуз – студент.

Будем обозначать отношение символом *R*.

Наиболее часто используются **унарные** и **бинарные** отношения.

**Унарные отношения** (одноместные) *R* отражают наличие определенного свойства у всех элементов множества.

Например, множество студентов вуза можно разбить на подмножества: {быть первокурсником}, {быть студенткой}, {быть отличником}, {быть спортсменом}.

Над унарными отношениями можно выполнять операции объединения и пересечения (операции сводятся к операциям над множествами):

1. 
2. 

**Пример**. Пусть *R*1 – «быть отличником», *R*2 – «быть хорошистом», *R*3 – «учиться на бюджете». Тогда унарные отношения:

1.  «учиться хорошо» или «учиться успешно».
2.  «учиться отлично на бюджете»,
3.  «учиться хорошо и на бюджете».

**Бинарные отношения** (двухместные) используются для определения взаимосвязей между парой элементов множества. Например, на множестве людей можно выделить такие отношения «дружить», «любить», «быть старше», «быть сыном», «быть начальником» и т. д. На множестве чисел известны знаки отношений «=», «<», «>» и т. д.

**Прямым** или **декартовым** произведением двух множеств А и В называется множество **упорядоченных** пар, в которых первый элемент принадлежит множеству *А*, второй элемент принадлежит множеству *В*. Обозначается такое произведение символом 



**Пример**. Пусть  

Тогда 

**Пример**. Пусть *А* = {мать, отец}, *В* = {сын, дочь}.

Тогда 

**Бинарным отношением** *R* называется подмножество пар декартового произведения  Говорят, что  Если элементы *a* и *b* находятся в отношении *R*, то это записывается так: 

Если *А* = *В*, то отношение *R* задается на множестве *А* и называется **декартовым квадратом:**



Обычно рассматриваются отношения заданные на одном множестве.

Если в отношение используются не все элементы, а только некоторые из множеств *А* и *В* (рис. 10), то под областью **определения** отношения*R*понимают подмножество  а под областью **значений** отношения *R* называют подмножество 



Рис. 10

**Пример**. Пусть группа студентов в составе Иванова, Петрова, Сидорова и Быкова сдает экзамен. Составить отношение между студентами и оценками, если Иванов получил 4, Петров – 4, Сидоров – 4, Быков не явился на экзамен.

Решение. Отношение *R* будет включать пары: (Иванов, 4), (Сидоров, 4), (Петров, 4). Тогда *D*(*R*) = {Иванов, Сидоров, Петров}, *Q*(*R*) = {4}.

Задать бинарное отношение можно разными способами.

1. **Список** – перечисление всех пар, на которых это отношение выполняется.
2. **Ориентированный граф**. Наличие отношения  отображается стрелкой, направленной их вершины *a* в вершину *b*.
3. **Характеристическая матрица**. Двумерный массив, элементы которого задаются формулой:



Матрица имеет размер  *m* – число строк, равное числу элементов множества *А*, *n* – число столбцов, равное числу элементов множества *В*.

**Пример**. Пусть бинарное отношение задано на множестве :  Отношение *R* можно задать:

1. списком: 

2. графом (рис. 11):



Рис. 11

3. матрицей:



Так как отношения – это подмножества декартового произведения, то для них определены те же **операции**, что и для множеств.

1. **Объединение отношений** 

Матрицы отношений складываются по правилу логического сложения:



2) **Пересечение отношений** 

Матрицы отношений умножаются по правилу логического умножения:



3) **Отрицание отношения**, при котором в матрице отношения нули заменяются на единицы и наоборот: 

1. **Композиция отношений**.

Пусть заданы отношения 

**Композицией** двух отношений  называется отношение  из *А* в *В*, определяемое так:



Таким образом, устанавливается отношение между элементами *a* и *b* через обязательно существующего «посредника» *с*. Для получения характеристической матрицы композиции отношений необходимо перемножить характеристические матрицы отношений  и  по правилу умножения матриц (строка на столбец), но под «суммой» и «произведением» понимается логические «сумма» и «произведение»: 

1. **Обратное отношение** 

Отношение  имеет место тогда и только тогда, когда имеет место отношение , и выполняется условие: 

Матрица обратного отношения получается транспонированием матрицы отношения *R*.

**Пример**. Пусть отношения заданы списками

 

Определить отношения   

Решение. Построим характеристические матрицы отношений:

 

1. Для получения отношения  используем логическое сложение матриц:



1. Для получения отношения  используем логическое умножение матриц:



1. Найдем композицию отношений:



4) Найдем отрицание отношения 

 

5) Вычислим обратное отношение 

 

Вывод: 

 

 

 

 

 

Пусть задано отношение *R* на множестве *U*:  Бинарные отношения на этом множестве обладают следующими свойствами.

1. *R* – **рефлексивно**, если для любого элемента множества *U* имеет место 
2. *R* – **антирефлексивно**, если ни для какого элемента множества **не** выполняется условие 
3. *R* – **симметрично**, если  влечет  при этом матрицы отношения *R* и обратного отношения не меняются.
4. *R* – **антисимметрично**, если  и влекут равенство 
5. *R* – **транзитивно**, если  и влекут равенство 

Для отношений, заданных на декартовом произведении различных множеств,

 свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности не

определяются.

**Примеры**.

1)  – рефлексивно;

2) *R* – «быть сыном» – антирефлексивно;

3) *R* – «жить в одном городе» – симметрично;

4) *R* – «быть начальником» – антисимметрично;

5) *R* – «быть моложе» – транзитивно.

**Пример**. Определить свойства отношения «быть не больше» на множестве натуральных чисел: 

Решение. Отношение

а) рефлексивно, т. к.  для всех *а*;

б) антисимметрично, т. к.  и , то ;

в) транзитивно, т. к. , , то .

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называют отношением **эквивалентности**.

**Пример**. Отношение «жить в одном городе» - эквивалентно.

Отношение эквивалентности **разбивает** множество, на котором он определено, на непересекающиеся подмножества так, что члены одного подмножества находятся между собой в отношении *R*, а между членами разных подмножеств это отношение отсутствует. В этом случае говорят, что отношение *R* задает **разбиение** на множестве *R*, или **систему классов эквивалентности** по отношению *R*. Мощность этой системы называется **индексом разбиения**.

Справедливо и утверждение, что любое разбиение множества на классы определяет некоторое отношение эквивалентности, а именно отношение «входить в один и тот же класс данного разбиения».

**Пример**. Пусть имеется множество разноцветных шаров. Отношение *R* – задается условием , если шары *а* и *b* имеют одинаковый цвет. Отношение *R*  является отношением эквивалентности, следовательно каждый класс эквивалентности будет представлять собой подмножество из шаров одного цвета.

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называют отношением **нестрого порядка**. Отношение, обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называют отношением **строго порядка**.

Например,

1. отношения нестрого порядка: «быть не старше» на множестве людей, «быть не больше» на множестве натуральных чисел;
2. отношение строго порядка: «быть моложе» на множестве людей, «быть строго больше» на множестве натуральных чисел.

Элементы *a*, *b* называются **сравнимыми** по отношению порядка *R* нанекотором множестве, если выполняются условия:  и 

Множество, на котором задано отношение порядка *R*, может быть:

1. **полностью упорядоченным** множеством, если любые два элемента сравнимы по отношению порядка *R*;
2. **частично упорядоченным** множеством, если сравнимы только некоторые элементы этого множества.

Например, отношения на множестве людей «быть моложе», «быть старше», «быть выше» являются полностью упорядоченными отношениями, а отношение «быть начальником», «быть братом» являются частично упорядоченными.

Если отношение задается на множествах *А* и *В*, то элементы множества *А* образуют область **определения** отношения*R*подмножество  а областью **значений** отношения *R* называют подмножество  множества *В*.

Отношение  называют **всюду (полностью) определенным**, если  (рис. 12, а). В противном случае отношение называется частично определенным.

Отношение  называется **сюръективным**, если  (рис. 12, б).

**Образом элемента** *а* в множество *В* при отношении *R* называется множество всех элементов  соответствующих элементу .

**Прообразом элемента** *b* в множество *А* при отношении *R* называется множество всех элементов  соответствующих элементу .



Рис. 12 Отображения

Отношение  называется **функциональным (однозначным)**, или просто **функцией**, если образом любого элемента из области определения *D*(*R*) является единственный элемент из области значений *Q*(*R*).

Отношение  называется **инъективным**, если прообразом любого элемента *b* из области значений  является единственный элемент *а* из области определения 

Отношение называется **взаимно однозначным**, если оно:

1. всюду определено;
2. сюръективно;
3. функционально;
4. инъективно.

**Примеры**. 1. Отношение  функционально.

2. Позиция на шахматной доске является взаимно однозначным отношением

между множеством, оставшихся на доске фигур, и множеством, занятых ими

полей доски.

Для всякого функционального соответствия *R* можно определить **функцию *f***. Если функция *f* устанавливает соответствие между множествами *А* и *В*, то говорят, что функция *f* имеет тип  , где каждому элементу *а* из области определения функция *f* ставит в соответствие единственный элемент *b* из области значений: 

**Отображением** *А* **в** *В* называется всюду определенное функциональное отношение  (рис. 12, а).

**Отображением** *А* **на** *В* называется всюду определенное и сюръективное функциональное отношение  (рис. 12, б).

**Пример**. Пусть *А* – множество значений углов, *В* – множество вещественных чисел. Зададим отношение 

Данное отношение является функциональным, т. к. любое значение угла имеет единственное значение косинуса, следовательно, определяет функцию

Данная функция является отображением, т. к. 

Это отображение является отображением *А* **в** *В*, т. к. оно всюду определено.

Т. к. оно не сюръективно, то не является отображение *А* **на** *В*.

**Операцией** называют функцию, все аргументы и значения которой принадлежат одному и тому же множеству. Функция одного аргумента называется **унарной** операцией.

**Примеры**. Элементарные функции одного аргумента: 

Дополнение множества  обратное отношение 

Функция двух аргументов , имеющая тип называется **бинарной** операцией.

**Примеры**. Арифметические операции сложения, умножения; операции над множествами – пересечение, объединение.

Множество *М* вместе с заданными на нем операциями тип  называется **алгеброй** и обозначается тип  Множество *М* называется **основным**, а  – **сигнатурой алгебры**.

**Отношения в двоичной системе.** Задать отношение между элементами множества можно с помощью двоичного кода, используя характеристический вектор.

**Пример**. Имеется группа студентов: Иванов, Петров, Сидоров, Быков, Соснов и Шашин. Иванов и Шашин учатся на «отлично», Петров и Соснов – «хорошисты», Сидоров и Быков учатся удовлетворительно. Составить характеристические вектора унарных отношений    Описать и найти отношения 

Решение. Запишем отношения и характеристические вектора в табл. 3.

*Таблица 3*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Универсум | Иванов | Петров | Сидоров | Быков | Соснов | Шашин |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|  | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Таким образом стипендию получают Иванов и Соснов.