УДК 681.32.06:518.5

ББК 22.311я7

**Тема 1. Теория моделирования**

1. Основные этапы создания математической модели процесса. Принципы построения модели.
2. Виды математических моделей. Их основные характеристики.
3. Требования к математическим моделям.

**Моделирование** – это научный прием, инструмент изучения процессов и явлений реального мира. При моделировании реальный объект, называемый **оригиналом**, замещается моделью – аналогом реального объекта. Над моделью проводятся эксперименты и исследования, на основе которых делаются выводы о свойствах реального объекта.

Почему моделирование так широко применяется в современном мире?

1. Моделирование в некоторых случаях может быть единственной возможностью изучения сложного объекта. Там, где исследование реального объекта невозможно, там используют моделирование поведения такого объекта на основе модели (примеры: экономические процессы, экологические проблемы, процессы в недрах звезд, полеты в космос и т. д.).

2. Моделирование позволяет сэкономить время изучения реального объекта.

3. Моделирование позволяет снизить материальные затраты на изучение реального объекта.

4. Моделирование позволяет повысить эффективность исследований довольно существенно.

**Этапы построения модели**.

Строго говоря, какой-либо зафиксированной схемы построения модели в общем виде не существует. Но можно выделить следующие условные этапы построения:

1. **Словесно-смысловое описание (содержательное описание)** объекта или явления – это так называемый этап **предмодели**. На этом этапе собираются сведения общего характера о природе объекта, ставится цель такого исследования.

2. **Завершение идеализации объекта (формализация операций)**.Выделяются все основные факторы и эффекты, не самые существенные, отбрасываются. После этого выделяют управляемые и неуправляемые параметры, проводят их символизацию. Затем определяется система ограничений на значения управляемых параметров. Если они несущественные, ими пренебрегают. По возможности идеализирующие объект предположения записываются в математической форме.

3. **Математическая запись модели**. На этом этапе переходят к выбору и формулировке законов, которым подчиняется объект, и записи их в математической форме. Важным условием решения задачи является формирование целевой функции модели, по которой можно будет судить о эффективности работы модели. Исходя из основной цели постановки задачи, выбираются показатели исхода операций, и определяется вид функции полезности на исходах. Ее возможно определить непосредственно по показателям исхода операций. Если показателей много, то появляется необходимость перейти к одному - обобщенному параметру (осуществляется свертка показателей). По этому параметру формируется критерий эффективности и целевая функция.

4. **Оснащение модели**. Формулируются необходимые условия о начальном состоянии объекта, основные требования, которым подчиняются параметры объекта. Окончательно формулируется цель исследования модели.

Построенная модель изучается всеми доступными исследователю приемами. Большинство моделей не поддаются теоретическому анализу, и поэтому их исследуют с широким применением вычислительных методов.

5. **Проверка адекватности модели**. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и устанавливается ее **адекватность** – соответствие реальному объекту и сформулированным предположениям. Проверка такой адекватности проводится на основе различных подходов к анализу модели. Какие моменты следует осветить, решая вопрос об адекватности модели?

* Все ли существенные параметры включены в модель.
* Нет ли несущественных параметров в модели.
* Правильно ли отражены основные функциональные связи между параметрами.
* Правильно ли отражены ограничения на значения параметров.

6. **Реализация модели и проведение исследований**. Полученные результаты моделирования подвергаются анализу на соответствие известным свойствам исследуемого объекта. Для этого возможно:

* сравнение результатов моделирования с известными экспериментальными данными, полученными в похожих условиях;
* использование других похожих моделей;
* сопоставление структуры и функционирования модели с реальным объектом.

7. **Корректировка модели**. При корректировке модели ее существенные параметры могут уточняться, изменяться ограничения, критерии эффективности и другие, поддающиеся изменению параметры. После выполненной корректировки вновь проводятся исследования, и проводится оценка адекватности модели.

8. **Оптимизация модели**. Сущность оптимизации модели сводится к упрощению модели при сохранении заданного уровня адекватности. Как правило, критериями оптимизации служат минимальные затраты времени и затраты средств для проведения исследований по этой модели. Можно предложить более экономичные математические методы вычислений.

**Принципы построения модели**.

**1. Адекватность**. Модель должна правильно отражать исследуемый объект, соответствовать реальности, соответствовать целям исследования по уровню сложности и организации. Среди всех возможных вариантов поведения объекта, выбирают те, которые удовлетворяют определенному условию. Как правило, по этому условию некоторая величина, связанная с объектом, достигает своего экстремального значения при переходе из одного состояния в другое. Такой принцип иногда называют **вариационным**.

**2.** **Соответствие модели решаемой задаче**. Модель должна строится для решения определенного класса задач или для конкретной задачи. Попытки создания универсальных моделей для решения разнообразных задач приводят, как правило, к неоправданному усложнению модели, при этом модель становится непригодной.

**3.** **Абстрагирование от второстепенных деталей - упрощение модели**. Модель должна быть проще, чем прототип. В модели умышленно выделяются наиболее существенные свойства и игнорируются менее существенные.

**4.** **Баланс точности и сложности модели**. Модель всегда носит приближенный характер. Возникает вопрос: каким должно быть это приближение? С одной стороны, чтобы как-то отобразить существенные признаки объекта, нужна детализация, с другой стороны, строить модель, которая приближается по сложности к реальному объекту, очевидно, не имеет смысла, решение такой задачи порой просто невозможно. Соблюдение баланса точности и сложности, как правило, достигается путем проб и ошибок.

При построении модели две тенденции противоречат друг другу: полнота описания работы системы и получение результатов возможно более простыми средствами.

Достижение компромисса возможно на пути построения ряда моделей от простых к сложным моделям. Простые модели помогают глубже понять принципы работы системы, усложненные модели позволяют анализировать влияние различных факторов на результаты моделирования. Такой подход к построению модели еще называют **иерархическим.**

**Как уменьшить сложность модели**? Можно придерживаться следующих рекомендаций.

1) **Изменение числа переменных**. Можно исключить несущественные или объединить их, уменьшить число ограничений на них. Такой процесс в моделировании называется **агрегированием**.

2) **Изменение природы переменных параметров**. Например, изменчивые параметры рассматриваются в качестве постоянных параметров, дискретные как непрерывные величины.

3) **Изменение функциональной зависимости между переменными**. Например, нелинейная зависимость заменяется линейной, дискретная функция распределения вероятностей – непрерывной.

4) **Изменение ограничений**. Обычно добавляют новые ограничения, или исключают что-то или модифицируют. При снятии ограничений получают оптимистичное решение, при введении – пессимистичное. Изменение ограничений, как правило, используют для нахождения предварительных оценок эффективности решения задачи еще на этапе постановки задачи.

5) **Ограничение точности модели**. Точность результатов не может быть выше точности исходных данных.

**5.** **Баланс погрешностей всех видов**.

**6.** **Многовариантность реализации элементов модели**. Возможность по разному реализовать один и тот же элемент модели, отличающийся по точности, обеспечивает баланс точности и сложности модели.

**7.** **Блочное строение**. Такое построение модели облегчает разработку сложных систем, позволяет использовать накопленный опыт и готовые блоки.

Принципы построения модели могут зависеть и от **конкретных ситуаций**. Выделяю при этом такие подходы.

1. **Непосредственный анализ функционирования системы**. Если система позволяет выявить существенные параметры и отношения между ними в процессе работы, то можно применить уже известные модели, либо она модифицируется или предлагается новая в новых условиях.
2. **Проведение ограниченного эксперимента на самой системе**. При таком исследовании большая часть существенных параметров выявляется, можно оценить их влияние на эффективность работы системы. Примером такого исследования могут служить учебные игры, учения.
3. **Использование аналога**. Если метод построения модели неясен, но ее структура понятна, то можно воспользоваться сходством с более простой системой, модель которой уже известна.
4. **Анализ исходных данных**. Такой анализ позволяет сформулировать гипотезу о структуре системы, а затем апробировать ее на новой модели.

**Виды моделей**. Классификация моделей проводится по разному. По методам математического моделирования их можно разделить на четыре класса.

1. **Аналитические модели** (analytical models). Сознательно отказываясь от детального описания системы, оставляя лишь наиболее существенные компоненты и связи между ними, исследователь использует достаточно малое число правдоподобных гипотез о характере взаимодействия компонентов системы, создает математическое описание системы. Математическое описание, анализ и объяснение свойств системы присуще довольно широкому классу задач.
2. **Имитационные модели** (simulation models). Целью такого рода моделирования является максимальное приближение модели к реальному объекту, достижение максимальной точности его описания. Имитационные модели претендуют на выполнение объяснительных и прогнозных функций, реализуются на ЭВМ с использованием блочного принципа, позволяющего разбить всю систему на подсистемы, которые можно развивать самостоятельно с использованием своего математического аппарата. Данные модели очень дорогие, связанны с большими затратами.
3. **Эмпирико-статистические модели.** Эти модели строятся на основе первичной обработки экспериментальных данных. При построении такой модели основная цель может быть следующая:

* упорядочение информации;
* поиск, количественная оценка и содержательная интерпретация причинно-следственных отношений между переменными системы;
* оценка достоверности и продуктивности разных гипотез о совместном влиянии переменных друг на друга;
* идентификация параметров расчетных уравнений разного вида.

Часто эмпирико-статистические модели являются начальными и обоснованием для применения других видов моделей.

1. **Модели искусственного интеллекта** (artificial intelligence). Эти модели обычно берут на себя отдельные функции человека, в их основу заложены принципы обучения, самоорганизации и эволюции при малом участии человека. Исследователь выступает при этом в роли учителя, партнера, участника системы «человек-машина».

Основой любого моделирования является построение математической модели изучаемого объекта. Для ее построения необходимо иметь представление о цели функционирования этого объекта, располагать информацией об ограничениях, определяющих область допустимых решений.

**Математическая модель** – это совокупность формул, уравнений, неравенств, отражающих основные черты объекта. Какого-т о общего способа построения такой математической модели нет. Любая модель строится на основе тех целей, которые ставит перед собой исследователь, с учетом имеющейся информации, и исходя из требований точности найденного решения.

И так, основными требованиями, предъявляемыми к математической модели, являются:

1. Математическая модель учитывает наиболее существенные черты или факты, присущие реальному объекту.
2. Математическая модель должна быть простой.

Математическая модель требует самого пристального внимания к введению параметров, однозначно определяющих функционирование системы.

Обычно параметры делятся на три вида.

1. **Контролируемые** - параметры, являющиеся переменными, чаще всего числовыми, значения которых исследователь задает сам;
2. **Неконтролируемые** – это переменные, значения которых исследователь не может менять по своему усмотрению; часто они неизвестны исследователю. Эти величины могут носить случайный характер с известными или неизвестными вероятностными характеристиками;
3. **Целевые** – параметры, характеризующие эффективность операции.

**Цель математической модели** – связать контролируемые и неконтролируемые параметры с целевыми параметрами. Это позволяет выделить прямую и обратную задачи исследования.

**Прямая задача исследования**– это задача нахождения по контролируемым и неконтролируемым параметрам целевых параметров.

**Обратная задача исследования**– это задача, где требуется найти такие значения контролируемых параметров, при которых целевые параметры удовлетворяют определенным условиям оптимальности. Такие задачи называют задачами оптимизации.

По взаимодействию параметров, модели подразделяют на детерминированные, стохастические, адаптивные, компромиссные.

В **детерминированных** моделях неконтролируемые параметры обычно отсутствуют. По значениям контролируемых параметров целевые параметры определяются однозначно. К таким моделям относятся модели:

а) линейного программирования;

б) нелинейного программирования;

в) оптимального управления.

В **стохастических** моделях связь между контролируемыми и целевыми параметрами носит вероятностный характер. К таким моделях относятся:

а) модели теории игр;

б) модели теории статистических решений;

в) модели теории массового обслуживания.

В **адаптивных**моделях распределение неконтролируемых параметров в принципе существует, но на момент решения они не известны. На начальном этапе выбирается какое-то решение, может не самое лучшее, и в процессе работы оно корректируется, что ведет к изменению значений параметров.

В **компромиссных** решениях или в моделях экспертных оценок у исследователя нет практически никакой информации о неконтролируемых параметрах, но известно, что их влияние существенно.

Существует множество математических моделей, которые используют для исследования различно рода систем. По возможности следует строить разные модели и производить сравнение результатов. Если научные выводы от модели к модели мало меняются, то таким исследованиям можно доверять!

**Тема 2. Задача линейного программирования**

1. Общая форма задачи линейного программирования.
2. Каноническая и стандартная формы ЗЛП.

Рассмотрим пример. На станках трех видов *S*1*, S*2*, S*3производят два вида продукции  и . Первый станок на производство единицы продукции вида  тратит 2 часа, на производство единицы продукции  тратит 3 часа. Второй станок тратит соответственно 2 часа и 1 час.

Третий станок тратит соответственно 3 часа и 2 часа. Первый станок может работать в сутки не более 12 часов, второй – не более 8 часов, а третий станок не более 10 часов в сутки. Стоимость единицы продукции первого вида составляет  руб., для второго вида продукции – руб. Требуется определить такие объемы выпуска продукции  и на всех станках, чтобы выручка от их реализации была **максимальной**. Условие задачи можно представить в виде табл. 1:

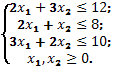
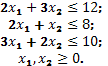
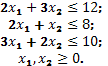
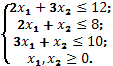
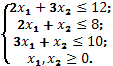
*Таблица 1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Продукция | Продукция | Ресурс времени |
| Станок *S*1 | 2 | 3 | 12 |
| Станок *S*2 | 2 | 1 | 8 |
| Станок *S*3 | 3 | 2 | 10 |
| Стоимость ед. продукции. |  |  |  |

Пусть  – количество выпускаемой продукции первого и второго вида, которое планируется выпустить на станках. Пусть  – функция стоимости произведенной продукции, запишем ее в виде уравнения:



Переменные  и ограничены условиями производства по времени:



Итак, задача заключается в следующем: найти точку максимума функции  среди точек , которые удовлетворяют указанным неравенствам. Все уравнения и неравенства задачи линейные, следовательно, мы получили задачу **линейного программирования**.

**Общая форма задачи линейного программирования** запишется так:





Функция  называется **целевой функцией** задачи, переменные,  – **аргументами целевой функции**, на которые накладываются ограничения.

Система ограничений обычно имеет бесконечное множество решений. Каждая совокупность аргументов функции , удовлетворяющая системе ограничений, называется **допустимым планом задачи**.

Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум целевой функции , называется **оптимальным планом***.*

Таким образом, под **задачей линейного программирования** понимают выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного, оптимального плана.

**Суть линейного программирования** состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения целевой функции при определенном наборе линейных ограничений, накладываемых на аргументы целевой функции.

Существуют эквивалентные формы записи задачи линейного программирования. Наиболее важными из них являются **каноническая** форма и **стандартная** форма**.**

1. **Каноническая форма задачи линейного программирования***.*

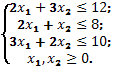
При записи задачи в *канонической форме* для целевой функции находится максимум, система ограничений состоит только из равенств, переменные неотрицательные.

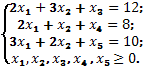




К канонической форме можно привести любую задачу линейного программирования. Если в системе ограничений имеется неравенство, то его следует обратить в равенство введением в левую часть некоторой неотрицательной величины. После этого система ограничений становится системой уравнений.

Например, систему неравенств в нашей задаче переведем в систему равенств, введя три переменные  получим:



Если некоторая переменная  не подчиняется условию **неотрицательности**, то ее заменяют разностью неотрицательных переменных 



Если же в задаче исследуется целевая функция на минимум, то вводят новую целевую функцию 

2. **Стандартная форма задачи линейного программирования***.*

При записи задачи в **стандартной форме**для целевой функции  определяется максимум, система ограничений состоит из неравенств , все переменные больше или равны нулю:





Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме: если , то .

Любое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимно противоположных неравенств. Например, равенство заменим системой неравенств



**Упражнения № 1**

1. Записать математическую модель задачи.
   1. Для издания книг «Кулинария» и «Шью сама» необходимо предусмотреть расходы на бумагу, типографскую краску, фотографии. Расходы на издание одной книги, общая сумма расходов по позициям и цена одной книги заданы в табл. 2:

*Таблица 2*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Затраты на издание одной книги (руб.) | | | Цена книги |
|  | Бумага | Краска | Фотографии | ( руб.) |
| «Кулинария» | 0,5 | 2 | 100 | 85 |
| «Шью сама» | 0,8 | 2,4 | 120 | 100 |
| Общая сумма расходов | 400 | 200 | 1000 |  |

Сколько необходимо выпустить книг каждого вида, чтобы прибыль по их реализации была максимальной?

* 1. Школьнику для изготовления трех видов елочных украшений требуется разного цвета бумага: синяя, красная, зеленая, золотистая. Норма каждого вида бумаги на одну елочную игрушку, общее количество бумаги в наличии и общая стоимость игрушки заданы в табл. 3:

*Таблица 3*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Количество листов бумаги на 1 игрушку | | | | Цена игрушки  (в руб.) |
|  | Синяя | Красная | Зеленая | Золотистая |
| Игр. №1 | 1 | 2 | 1 | 0,5 | 2 |
| Игр. №2 | 2 | 0,5 | 2 | 2 | 4 |
| Игр. №3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| Запас бумаги | 15 | 18 | 20 | 15 |  |

Сколько игрушек каждого вида следует изготовить, чтобы их реализация на школьной ярмарке принесла прибыль?

1.3 На некотором заводе, выпускающем прохладительные напитки, имеется 20000 литров минеральной воды. Завод производит квас и коктейль. На выпуск 1 бутылки кваса уходит 0,2 литра минеральной воды, а на 1 банку коктейля 0,05 литра. Стоимость 1 бутылки кваса составляет 24 денежных ед., а 1 банки коктейля 10 денежных ед. Нужно произвести не более 200000 бутылок кваса и не более 400000 банок коктейля. Сколько бутылок кваса и коктейля необходимо изготовить для того, чтобы получить наибольшую прибыль от реализации продукции?

1.4 Стальные прутья длиной 110 см. необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуется изготовить заготовок соответственно 40, 30 и 20 штук. Возможные варианты разреза заготовок и величины отходов при этом заданы в табл. 4.

*Таблица 4*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Длина заготовок (см) | Варианты разреза заготовок | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 45 | 2 | 1 | 1 | - | - | - |
| 35 | - | 1 | - | 3 | 1 | - |
| 50 | - | - | 1 | - | 1 | 2 |
| Отходы (см) | 20 | 30 | 15 | 5 | 25 | 10 |

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимуме отходов.

* 1. После рекламной компании некоторая фирма испытывает повышенный спрос на свою продукцию: детский набор «Юный химик» и набор для ремонта «Все сам». Фирма заключила контракты на поставку этих наборов в магазины по 300 штук в месяц. Производство наборов ограничивается мощностью производства составляющих деталей, мощностями участков сборки и упаковки. Трудозатраты возникающие на каждом участке на каждую единицу наборов и общие трудозатраты заданы в табл. 5:

*Таблица 5*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Участок работы | Трудозатраты (час.) | | Фонд времени  (час.) |
| «Юный химик» | «Все сам» |
| Производство | 5 | 8 | 2600 |
| Сборка | 0,8 | 1,2 | 400 |
| Упаковка | 0,5 | 0,5 | 200 |

Фирма сама не может выполнить контракт. Поэтому она провела переговоры с другой компанией, которая обладает избыточными мощностями. По договору с фирмой компания готова поставить один набор «Юный химик» по 3 тыс. руб. и набор «Все сам» по 5 тыс. руб. Эти цены превышают себестоимость наборов фирмы: на 1,5 тыс. руб. за «Юный химик», на 2 тыс. руб. за «Все сам». Надо найти такой план закупаемых и произведенных наборов, который обеспечит выполнение контракта с минимальными затратами.

* 1. Для изготовления молочной продукции привозят молоко на 3 завода от четырех хозяйств. Хозяйства производят молоко в объеме: Белгородский район – 20000 литров, Прохоровский район – 15000 литров, Новооскольский район – 15800 литров, Шебекинский район – 18000 литров ежедневно. Мощности молочных заводов по переработке молока в городах Белгороде, Шебекино, поселке Томаровка, транспортные расходы на перевозку 1 тысячи литров молока представлены в табл. 6.

Определить план перевозок молока от хозяйств до молочных заводов, который бы обеспечил минимальные совокупные расходы.

*Таблица 6*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предприя-тия | Транспортные расходы за 1тыс. литров | | | | Мощность завода (л) |
| Белгород-ский район | Прохоров-ский район | Новооскольский район | Шебекин-ский район |
| БМК | 2 | 5 | 3 | 4 | 27000 |
| ШМК | 3 | 5 | 4 | 2 | 25000 |
| ТМК | 3 | 7 | 8 | 5 | 23000 |

1.7 Фирма производит два вида удобрений. На предстоящий месяц она заключила контракт на поставку этих удобрений: калийных не более 100 т, фосфатных ровно 120 т. Каждый вид удобрений проходит термическую обработку в печах 1ой и 2ой. Время обработки ограничено, печи могут в течении месяца работать не более 300 часов первая и не более 350 вторая. Фирма не имеет достаточных мощностей для выполнения контракта. Поэтому она решила закупить часть удобрений у другой фирмы. Время прохождения обработки на печах, затраты на производство и закупку удобрений заданы в табл. 7.

*Таблица 7*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Удобрения | Печи (т/час) | | Затраты на производство | Затраты на закупку |
| 1 | 2 |
| Калийные | 4 | 2 | 36 | 48 |
| Фосфатные | 3 | 6 | 50 | 65 |

Составить план производства и закупки удобрений фирмой, чтобы минимизировать издержки.

* 1. При изготовлении металлических конструкций используется материал в виде стальных стержней длиной 200 дм. Этот материал разрешается разрезать на стержни длиной 110 дм., 79 дм., 80 дм. Для заказа следует изготовить не более 90 стержней длиной 110 дм., не более 120 стержней длиной 70 дм. и не более 105 длиной 80 дм. Оценить число рациональных способов изготовления стержней, при котором количество материала для выполнения заказа минимально. Построить план изготовления стержней, при котором количество отходов минимально. Найти план изготовления стержней, обеспечивающий максимальный доход, если стержни длиной 110 дм. приносят доход в 500 руб., стержни длиной 80 дм. реализуют по цене 480 руб. и стержни длиной 79 дм. по 450 руб.

1.9 Некоторая фирма выпускает два вида комплексных соков: сок фруктовый и сок овощной. Оптовые цены на фруктовый сок за литр составляют 70 руб., на овощной – 55 руб. Для их приготовления используются чистые яблочный, грушевый, морковный соки по цене 30, 45, 20 руб. за литр. В среднем фирма получает ежедневно не более 2000 литров яблочного, 1800 литров грушевого и 1200 литров морковного соков. В овощном соке должно содержаться не менее 60% морковного сока и не более 15% яблочного, во фруктовом соке должно содержаться не менее 60% яблочного сока и не более 20% морковного. Определить рецепт смешения чистых соков для производства фруктового и овощного соков, который обеспечил бы максимальную прибыль.

1.10 Перед открытием салона красоты был представлен план работ для определения рентабельности предприятия. Предполагается обслуживание клиентов в мужском и женском залах. Посетитель должен «пройти через руки» четырех специалистов. Известно время работы каждого специалиста с каждым клиентом. В женском зале: 1 специалист тратит на клиента 20 мин., 2 специалист – 15 мин., 3 специалист – 1 час, 4 специалист – 30 мин. В мужском зале: 1 специалист тратит на клиента 10 мин., 2 специалист – 15 мин., 3 специалист – 40 мин., 4 специалист – 20 мин. Известна прибыль, получаемая от обслуживания одного посетителя в каждом из залов: в женском зале – 1500 руб., в мужском зале – 1000 руб. Необходимо определить план работы салона, который приносил бы максимальную прибыль при минимальных затратах времени (рабочий день – 7 часов).

**Тема 3. Геометрическое решение задачи в случае двух переменных**

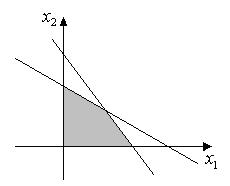
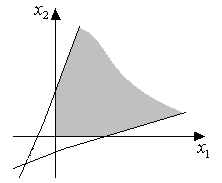
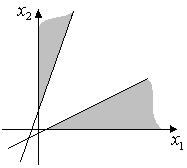
1. Допустимый многоугольник.
2. Линия уровня. Градиент целевой функции.
3. Точки экстремумов.

Пусть задача линейного программирования для двух переменных записана в стандартной форме





Эти задачи имеют простое геометрическое истолкование. На плоскости построим систему координат с осями . Каждое из ограничений рассмотрим как прямую. Решением неравенств является какая-нибудь полуплоскость. Все решения находятся в первой четверти. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих ограничениям, называются **допустимым многоугольником***.*Эта область может быть ограниченной, неограниченной или вовсе пустой (рис. 1 ).

а) б) в)

Рис. 1. Примеры допустимых многоугольников: а) ограниченная

область; б) неограниченная область; в) пустая область

Целевая функция изображается с помощью **прямой уровня**, т.е. прямой, на которой целевая функция принимает постоянное значение.

Пусть , тогда .

С увеличением постоянной *С* прямая уровня перемещается в сторону наискорейшего роста функции , то есть в направлении градиента функции : 

На плоскости построим какое-нибудь положение линии уровня целевой функции. Градиент покажет направление роста функции.

**Точка минимума** функции  это точка первого касания линии уровня допустимого многоугольника (рис. 2, ), **точка максимума** функции - это точка отрыва линии уровня от многоугольника (рис. 2, ).

Обычно эти точки являются вершинами многоугольника. Но их может быть и бесконечно много, если линия уровня параллельна какой-либо стороне многоугольника, например,  и  (рис. 3).

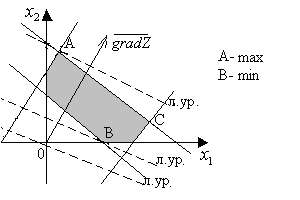


Рис. 2. Точки максимума и минимума в области допустимых решений

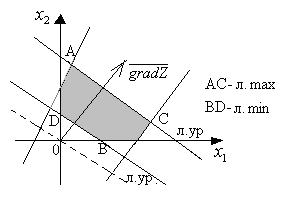


Рис. 3. Множество решений задачи

Пример. Построим допустимый многоугольник и найдем точку максимума функции  при ограничениях:



Решение. Пусть ,  Значение для линии уровня  выбираем произвольно,  перпендикулярен линии уровня (рис. 4).

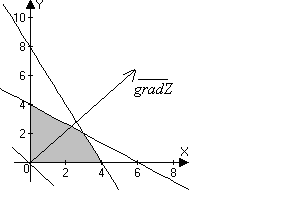


Рис. 4. Область допустимых решений

Максимальное значение функция  принимает в точке  и .

**Упражнения № 2**

1. Найти область решения системы ограничений:

1.1  1.2  1. 3 1.4 

1.5  1.6  1.7 

1.8  1.9  1.10 

1.11  1.12  1.13 

1. Решить задачи линейного программирования графическим методом:

2.1  2.2 

2.3  2.4 

2.5  2.6 

1. Решить задачи линейного программирования графически, предварительно упростив:

3.1  при ограничениях



3.2  при ограничениях



3.3  при ограничениях



3.4  при ограничениях



3.5  при ограничениях



3.6  при ограничениях



3.7  при ограничениях



3.8 при ограничениях



**Тема 4. Решение алгебраических нелинейных уравнений**

1. Отделение корней уравнения.
2. Метод половинного деления (метод бисекций).
3. Метод Ньютона (метод касательных).
4. Метод хорд (метод секущих).

**1.** **Отделение корней уравнения** 

Отделение корней уравнения  – это процедура определения промежутка, на котором имеется один из корней уравнения.

Отделение корня можно осуществить графически, записав уравнение в виде  и построив графики этих функций 

Действительными корнями уравнения  являются точки пересечения (абсциссы) графиков функций  Найдем отрезок на который попадает абсцисса пересечения графиков, и проверим условие теоремы Больцано–Коши: если функция  непрерывна и монотонна на отрезке  и принимает на концах отрезка значения противоположных знаков, т. е. выполняется условие то на этом отрезке существует единственная точка *с* такая, что 

**Пример**. Отделить корни уравнения .

Представим уравнение в виде: 

Введем две функции: 

Построим графики этих функций (рис. 5).

Имеется два корня на отрезках [-1; 0] и [0; 1].

Проверим значение функции на концах первого отрезка [-1; 0]:

Функция на концах отрезка имеет разные знаки, следовательно на отрезке [-1; 0] есть корень уравнения.

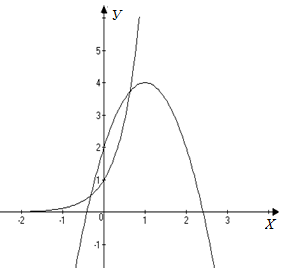


Рис. 5. Графическое решение уравнения

**Пример**. Отделить корни уравнения 

Единственный корень этого уравнения можно найти и по формуле Кардано:  Но практическое значение этой формулы невелико. Во-первых, ее удобно применять, когда уравнение имеет единственный корень. Во-вторых, для практических расчетов этот корень все равно придется представить в виде десятичной дроби, что можно сделать лишь приближенно:  или с точностью до 0,001 

Отделим корни уравнения графически.

Представим уравнение в виде  и изобразим эскизы графиков функций:  (рис. 6).

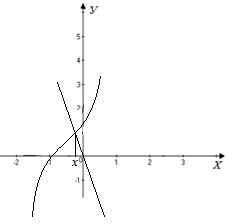


Рис. 6. Графическое решение уравнения 

Уравнение имеет единственный корень 

Проанализируем поведение производной функции 

Производная функции  положительная при всех , т. е. функция монотонно возрастет на всей области определения. Так как  и , то уравнение имеет единственный корень и он уже локализован: 

**2.** **Определение корней уравнения методом половинного деления.**

Необходимо построить последовательность вложенных отрезков, на концах которых функция принимает значения разных знаков.

Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего.

Рассмотрим функцию  на [*a*;*b*]. Разобьем отрезок пополам точкой  (рис. 7). Определим знак функции , выбираем отрезок [*a*; *c*] или [*c*; *b*], где функции  имеют разные знаки (проверяем условие или ).

Пусть выбрали отрезок [*a*; *c*]. Присвоим *b* = *c*.

С новым отрезком [*a*; *b*] поступаем аналогично.

Если корень находится с точностью , то деление продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше . Тогда координата середины отрезка является значением корня уравнения с точностью .

Метод **деления пополам** – простой и надежный способ. Он сходится для любых непрерывных функций. Скорость сходимости невелика. Число итераций можно определить по формуле 

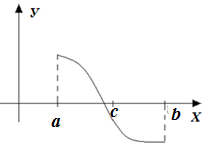


Рис. 7. Определение корней уравнения методом половинного деления

**Пример**. Уточним корни уравнения  с заданной точностью 

1. Корни локализованы: 

2. Найдем координату середины отрезка: 

3. Оценим знак на концах отрезка:  

следовательно, корень находится на отрезке  и 

4. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



5. следовательно, корень находится на отрезке  и 

6. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



7. следовательно, корень находится на отрезке  и 

8. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



9. следовательно, корень находится на отрезке  и 

10. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



11. следовательно, корень находится на отрезке  и 

12. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



13. следовательно, корень находится на отрезке  и 

14. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



15. следовательно, корень находится на отрезке  и 

16. Найдем середину нового отрезка  и его длину:



17. следовательно, корень находится на отрезке  и 

18. Оценим длину последнего отрезка



Поэтому корень уравнения  с точностью до 0,001.

**3.**  **Определение корней уравнения методом Ньютона.**

Пусть корень уравнения **** локализован на отрезке  а функция такова, что во всех точках этого отрезка первая  и вторая  производные знакопостоянны и выполняются условия:



Проведем к графику функции **** две касательных в точках  и  (рис. 8).

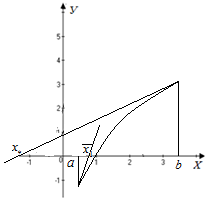


Рис. 8. Определение корней уравнения методом Ньютона

Уравнение касательной к графику функции**** в точке  имеет вид **** Эта касательная пересекает ось *ОХ* в точке **** которая ближе к корню уравнения и при надлежит отрезку так как ****  В силу знакопостоянства первой производной и неравенства ее нулю такая точка всегда существует и принадлежит отрезку  При этом в точке  должно выполняться условие: 

Вторая касательная к графику функции в точке  имеет точку пересечения с осью *ОХ* в точке  не принадлежащей отрезку 

Таким образом, отрезок, на котором имеется корень, уменьшился.

Рассмотрим новый отрезок  и проведем в точке **** новую касательную к графику функции **** Переобозначим эту точку Найдем абсциссу точки ее пересечения с осью *ОХ* **** которая еще ближе к корню уравнения, чем **** и так далее. При выполнении условия  можно считать, что **** – корень уравнения с точностью до ****

**Пример**. Уточним корни уравнения  методом Ньютона с заданной точностью .

1. Корни локализованы: 

2. Найдем первую и вторую производные функции



3. На отрезке   а  Чтобы исключить равенство нулю второй производной, можно локализовать корень, например на отрезке  на котором выполняется условие знакопостоянства 

4. Так как условие  выполняется при  то находим последовательно:

** **

5. Метод Ньютона приводит к нужному ответу быстрее, чем метод бисекций. Однако, его применение связано с вычислением на каждом шагу в знаменателе дроби производной  Это может оказаться отдельной сложной вычислительной задачей. Одним из способов устранения этого недостатка является применение упрощенного метода Ньютона. Его суть состоит в том, что производная вычисляется только один раз. Потом все время применяется найденное значение. Покажем упрощенный метод Ньютона для уравнения 

** **

 ****

 ****

 ****

**4.**  **Определение корней уравнения методом хорд (метод секущих).**

Пусть корень уравнения **** локализован на отрезке  а функция такова, что во всех точках этого отрезка первая  и вторая  производные знакопостоянны и выполняются условия:



Запишем уравнение хорды, соединяющей точки  и  графика функции ** **

Найдем из него абсциссу точки пересечения этой хорды с осью *ОХ*, положив ****

Из двух точек отрезка выбираем ту, в которой значение функции **** и ее второй производной имеют одинаковые знаки. В дальнейших расчетах это значение не меняется. Например, выберем точку Тогда формула вычисления новой абсциссы будет такой:

****

**Пример**. Уточним корни уравнения  методом хорд с заданной точностью .

1. Корни локализованы: 

2. Найдем первую и вторую производные функции



3. На отрезке   и  Следовательно, выберем точку  Запишем формулу вычисления 

****

4. Вычислим последующие значения ****

****

****

** **

Если при уточнении корней уравнения **** методом хорд условие  выполняется на правом конце отрезка  локализации корня, то расчетная формула имеет вид:

****

**Замечание.** При уточнении корня уравнения методом Ньютона и одновременно методом хорд «приближение» к корню происходит с двух сторон (рис. 9).

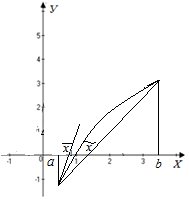


Рис. 9. Определение корней уравнения методами касательных и хорд

Если ****, то ****  корень уравнения с точностью до 

**Упражнение № 3**

1. Отделить корни уравнения  т. е. определить промежуток, на котором имеется один из корней уравнения.

2. Определить корень уравнения методом половинного деления (бисекций) с точностью ε = 0,07.

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

9.  10. 

11.  12. 

13.  14. 

15.  16. 

17.  18. 

19.  20. 

21.  22. 

23.  24. 

25.  26. 

27.  28. 

29.  30. 

**Тема 5. Решение систем нелинейных уравнений**

1. Выбор начального приближения решения системы графическим методом или с помощью табулирования функции.

2. Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона.

3. Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации.

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными



1. **Метод Ньютона**. Пусть функции  и  дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  являющейся решением системы. Пусть известно некоторое приближение  к решению системы Представим точное решение в виде: 

Разложим функции  и  по формуле Тейлора как функции двух переменных в ряд, оставив только линейные члены разложения относительно малых приращений :





Левые части равенств равны нулю. Для определения значений приращений получим систему уравнений:



Матрица, составленная из производных функций  и , называется матрицей Якоби:



Если определитель матрицы не равен нулю, решить данную систему можно методом Крамера:



Дальнейшее новое приближение системы находится по формулам:



Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к точному решению системы, то метод Ньютона очень быстро (по квадратичному закону) сходится. Условием окончания счета можно выбрать одно из условий:



или



**Пример**. Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью 



Пусть  и 

Найдем производные функций системы:



Составим систему уравнений для нахождения приращений малых приращений :



Выберем начальное прриближение из геометрических соображений (рис. 10).

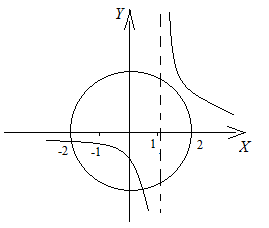
****

Рис. 10 Кривые уравнений системы

Система имеет два решения в областях:



Выберем начальное приближение из второй области. Пусть Подставим нулевое приближение в систему уравнений и решим ее методом Крамера.



Найдем следующее приближение:



Оценим точность вычислений:



Точность не достигнута. Осуществим еще одну итерацию.







Найдем второе приближение:



Оценим точность вычислений:



Точность достигнута. Решением системы является пара чисел:



2. **Метод простой итерации**. Пусть задана система двух нелинейных уравнений с двумя переменными: 

Представим каждую переменную в виде функции: 

Допустим, что она имеет единственный корень в некоторой области 

На функции накладываются определенные условия сходимости к точному решению:

1) функции  ‒ непрерывные и дифференцируемые в области *D*;

2) начальное приближение  и последующие приближения принадлежат области *D*;

3) области *D* выполняются условия:

а)  б) 

При выполнении всех условий решение системы уравнений проводится по формулам: 

Это решение сходится к точному решению: 

Итерационный процесс продолжается, пока не выполнится условие:



Пример. Решить систему нелинейных уравнений методом простой итерации с точностью 

Выберем начальное приближение из второй области (рис.), как в методе Ньютона:Вычисления будем проводить по формулам:



Выполним несколько шагов и проверим выполнение условия окончания итерационного процесса.

1)  

2) 

Предложенная точность достигнута.

Ответ: 

**Упражнения № 4**

Выбрать начальное приближение графическим методом и решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона и методом простой итерации.

*Таблица 8*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | | Метод Ньютона | | Метод простой итерации |
| 1 | |  | |  |
| 2 | |  | |  |
| 3 |  | | |  |
| 4 |  | | |  |
| 5 |  | | |  |
| 6 |  | | |  |
| 7 |  | | |  |
| 8 |  | | |  |
| 9 |  | | |  |
| 10 |  | | |  |
| 11 |  | | |  |
| 12 |  | | |  |
| 13 |  | |  | |
| 14 |  | |  | |
| 15 |  | |  | |
| 16 |  | |  | |
| 17 |  | |  | |
| 18 |  | |  | |
| 19 |  | |  | |
| 20 |  | |  | |
| 21 |  | |  | |
| 22 |  | |  | |
| 23 |  | |  | |
| 24 |  | |  | |
| 25 |  | |  | |
| 26 |  | |  | |
| 27 |  | |  | |
| 28 |  | |  | |
| 29 |  | |  | |
| 30 |  | |  | |

**Тема 6. Численное интерполирование и аппроксимирование функций**

1. Численное интерполирование.
2. Аппроксимация функции.

1. **Численное интерполирование**. Пусть задана таблица чисел  (табл. 9):

*Таблица 9*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *x*1 | *x*2 | …. | *x*n |
| *y*i | *y*1 | *y*2 | …. | *y*n |

Требуется составить многочлен степени , который

бы принимал значения в точках  График такого многочлена проходит через заданные точки (рис. 16).

Итерационный многочлен Лагранжа имеет вид:



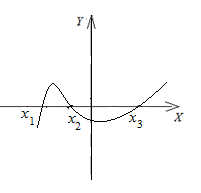


Рис. 11

Общий вид:

 ,

где .

Пример. Составить многочлен Лагранжа для таблицы значений (табл. 10):

*Таблица 10*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *y* | 2 | 3 | 4 | 5 |

1. Составим функцию 

2. Найдем производные при каждом :



Составим многочлен Лагранжа:



2) **Аппроксимация функции**. Пусть задана таблица чисел (табл. 9).

По этим данным подберем вид эмпирической формулы по виду графика. Построим точки на плоскости. Проведем аппроксимирующую кривую по возможности близко к полученным точкам (рис. 12). Оценим отклонения значений экспериментальных данных и полученных по выбранной формуле:

Используем метод наименьших квадратов для оценки минимума квадратов отклонений: . Экстремум функции находим при условии, что частные производные функции *F* по всем

неизвестным равны нулю: 

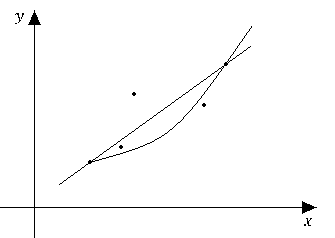


Рис. 12

Допустим наши экспериментальные данные аппроксимируются линейной функцией, графиком которой является прямая:







Пример. Пусть таблица данных (табл. 11) аппроксимируется линей-ной функцией: 

*Таблица 11*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *y* | 2 | 4,9 | 7,9 | 11,1 | 14,1 | 17 |

Построим точки  на плоскости. Данные точки хорошо укладываются на прямую (рис. 13). Выберем линейную аппроксимацию:



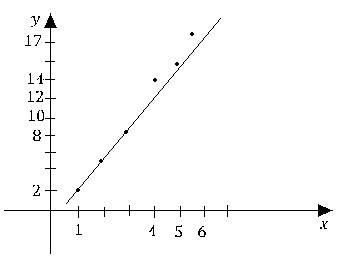


Рис. 13

Составим необходимые суммы:



Составим систему уравнений:



Найдем решение системы уравнений:



Прямая, которая описывает экспериментальные данные, имеет вид:

.

Найдем значения  в точках  и сравним значения и  (табл. 12).

Ошибку вычислений найдем по формуле:



*Таблица 12*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |
|  | 2 | 4,9 | 7,9 | 11,1 | 14,1 | 17 |  |
|  | 1,943 | 4,966 | 7,989 | 11,011 | 14,034 | 17,057 |  |
|  | 0,057 | 0,066 | 0,089 | -0,089 | -0,066 | 0,0572 |  |
|  | 0,0033 | 0,0044 | 0,008 | 0,008 | 0,0044 | 0,0033 | 0,0314 |

Допустим, наши экспериментальные данные аппроксимируются квадратичной функцией, графиком которой является парабола: 





**Упражнения № 5**

1. По экспериментальным данным построить многочлен Лагранжа (табл. 13).

2. Построить графики экспериментальных данных и многочлена Лагранжа. Сравнить поведение графиков.

3. Графически оценить связь между переменными *х* и *y* и методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры аппроксимирующего многочлена второй или третьей степени (табл. 13).

4. Сравнить поведение графиков для многочлена Лагранжа и полученного аппроксимирующего многочлена.

5. Составить программу для определения коэффициентов  аппроксимирующей функции (табл. 14) и методом наименьших квадратов найти неизвестные параметры для предложенной зависимости переменных.

6. Построить график полученной функции

.

Оценить погрешность вычислений.

*Таблица 13*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | | *y* | 0 | 3 | 5 | 4 | 1 | | 2 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 3 | 1 | 5 | 7 | |
|  | | | |
| 3 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 3 | 4 | 6 | | *y* | -7 | 5 | 8 | 14 | | 4 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 5 | 1 | | *y* | 3 | 7 | 9 | 19 | |
|  | | | |
| 5 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 3 | 7 | 13 | 21 | | 6 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 5 | 6 | 7 | 4 | | *y* | 25 | 36 | 49 | 16 | |
|  | | | |
| 7 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 5 | 3 | 7 | 9 | | 8 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | -1 | 2 | 3 | 5 | | *y* | 2 | 3 | 1 | -1 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 5 | 3 | 1 | 4 | | | | 10 | | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | x | 0 | 1 | 3 | 4 | | y | 2 | 3 | 2 | 3 | |
|  | | | | | | | | |
| 11 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | -1 | 0 | 1 | 2 | | *y* | 3 | 1 | 2 | 5 | | | | 12 | | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 6 | 8 | | *y* | 3 | 8 | 1 | 2 | |
|  | | | | | | | | |
| 13 | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 3 | 4 | 7 | 9 | | *y* | 1 | 3 | 8 | 5 | 1 | | | 14 | | | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 5 | 8 | 10 | 9 | 3 | |
|  | | | | | | | | |
| 15 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 10 | 5 | 0 | 7 | | | | | 16 | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 0 | 1 | 4 | 5 | 6 | | *y* | -1 | 5 | 7 | 8 | 10 | | |
|  | | | | | | | | |
| 17 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | *y* | 3 | 5 | 10 | 8 | 5 | | | | | 18 | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | *y* | 3 | 5 | 10 | 8 | 5 | | |
|  | | | | | | | | |
| 19 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 3 | 6 | 9 | | *y* | 5 | 8 | 11 | 7 | | | | | 20 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | | *y* | 3 | 5 | 7 | 5 | | |
|  | | | | | | | | |
| 21 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 3 | 4 | 9 | | *y* | 1 | 3 | 10 | 7 | | | | | 22 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 3 | 2 | -1 | 4 | | *y* | 2 | 5 | 7 | 3 | | |
| 23 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | -1 | 4 | 6 | 3 | | *y* | 5 | 6 | 7 | 5 | | | 24 | | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 0 | 3 | 6 | | *y* | 1 | 7 | 2 | 5 | | | |
|  | | | | | | | | |
| 25 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 3 | 2 | 1 | | *y* | 5 | 4 | 2 | -1 | | | 26 | | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 3 | 2 | 1 | 4 | | *y* | 1 | 4 | 7 | 5 | | | |
|  | | | | | | | | |
| 27 | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 2 | 4 | 6 | 8 | 3 | | *y* | 1 | 8 | 11 | 6 | 2 | | | 28 | | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | -1 | -4 | | *y* | 4 | 7 | 8 | 5 | | | |
|  | | | | | | | | |
| 29 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 3 | 6 | 9 | | *y* | 4 | 8 | 1 | -1 | | | 30 | | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | *y* | 3 | 5 | 7 | 5 | 1 | | | |

*Таблица 14*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | |  |  | | | |  | | | |  | | № вар. | | | |  | | |  | | |  | |  | | |
| 1 | |  |  | | | | 0  0,2  0,4  0,6  0,8 | | | | 5,51  4,75  4,53  4,40  4,46 | | 2 | | | |  | | |  | | | 1  1,2  1,4  1,6  1,8 | | 11,9  12,3  12,5  13,1  13,3 | | |
| 3 | |  |  | | | | 0,1  0,2  0,4  0,6  0,8 | | | | 10,1  5,2  2,53  1,4  1,32 | | 4 | | | |  | | |  | | | 0  0,2  0,4  0,6  0,8 | | 2,1  2,01  2,3  2,74  3,25 | | |
| 5 | |  |  | | | | 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5 | | | | 11,4  1,63  1,82  2,1  3,19 | | 6 | | | |  | | |  | | | 0,2  0,4  0,6  0,8  1 | | 6,3  3,2  1,62  1,3  0,9 | | |
| 7 | |  |  | | | | 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5 | | | | -7,7  -5,6  -4,4  -3,6  -2,9 | | 8 | | | |  | | |  | | | 1  2  3  4  5 | | 1,3  1,4  1,32  1,2  1,08 | | |
| 9 |  | | |  | | | | 1  2  3  4  5 | | 4,02  5,31  6,7  8,4  9,0 | | | | 10 | |  | | |  | | | 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5 | | | -10  -6,8  -4,8  -3,2  -2 | | |
| 11 |  | | |  | | | | 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5 | | 0  0,4  1,5  3,6  7,3 | | | | 12 | |  | | |  | | | 0,2  0,4  0,6  0,8  1 | | | -3,3  -1,5  -0,9  0,4  0,1 | | |
| 13 |  | | |  | | | | 1  3  5  7  9 | | 0.02  0.43  0.82  1.08  1.32 | | | | 14 | |  | | |  | | | 1  2  3  4  5 | | | 1  2.6  4  5.2  6.4 | | |
| 15 |  | | |  | | | | 0,2  0,4  0,6  0,8  1 | | 10,2  5,9  4,6  3,6  2,7 | | | | 16 | |  | | |  | | | 0  0,2  0,4  0,6  0,8 | | | 2,01  2,1  2,2  2,3  2,41 | | |
| 17 |  | | | |  | | | 1  2  3  4  5 | | 4,01  7,3  12,7  19,8  30 | | | | 18 | |  | | |  | | | 7  8  9  10  11 | | | 1,91  3,01  4,08  5,15  6,22 | | |
| 19 |  | | | |  | | | 1  2  3  4  5 | | 2.1  1.15  2.4  1.51  2.8 | | | | 20 | |  | | |  | | | 0.1  0.2  0.4  0.6  1.8 | | | 9.1  4.2  1.53  0.4  0.32 | | |
| 21 |  | | | |  | | | 7  8  9  10  11 | | 8,91  10,01  11,08  12,15  13,22 | | | | 22 | |  | | |  | | | 1  1,2  1,4  1,6  1,8 | | | 5,6  6,7  7,9  9,4  10,2 | | |
| 23 |  | | | |  | | | 1  2  3  4  5 | | 3,1  4,42  5,73  7,01  8,26 | | | | 24 | |  | | |  | | | 1  1,1  1,2  1,3  1,4 | | | 0,37  0,45  0,27  0,21  0,15 | | |
| № вар. |  | | | | |  | | |  | | |  | | | № вар. | | |  | | |  | | |  | |  |
| 25 |  | | | | |  | | | 0,2  0,4  0,6  0,8  1 | | | 1,23  1,36  1,55  1,8  2,2 | | | 26 | | |  | | |  | | | 1  1,1  1,2  1,3  1,4 | | 0,86  2,01  2,12  2,27  2,38 |
| 27 |  | | | | |  | | | 1  3  5  7  9 | | | 1,02  1,43  1,83  2,08  2,32 | | | 28 | | |  | | |  | | | 0,1  0,2  0,3  0,4  0,5 | | 10,01  5,2  2,53  1,4  1,32 |
| 29 |  | | | | |  | | | 0  0,1  0,2  0,3  0,4 | | | 1,67  1,77  1,89  2,1  2,12 | | | 30 | | |  | | |  | | | 2  3  4  5  6 | | -6,9  7,02  61  120,9  133,1 |

**Тема 7. Численное интегрирование**

1. Формула прямоугольников.
2. Формула трапеции.
3. Формула Симпсона.

Пусть функция  – непрерывная и дифференцируемая *n* раз на отрезок . Разобьем отрезок на *n* частей c шагом *h*: .

Для приближенного вычисления интеграла можно использовать формулы прямоугольников, трапеции и Симпсона.

1) **Формула прямоугольников** (рис. 14):

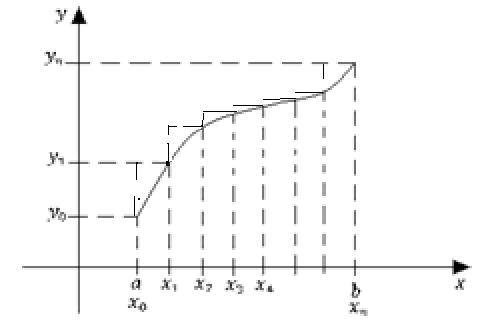


Рис. 14



или



где остаток  на отрезке погрешность вычислений. Можно погрешность вычислений вычислять по формуле: 

2) **Формула трапеций** (рис. 15):



или



где остаток   на отрезке 

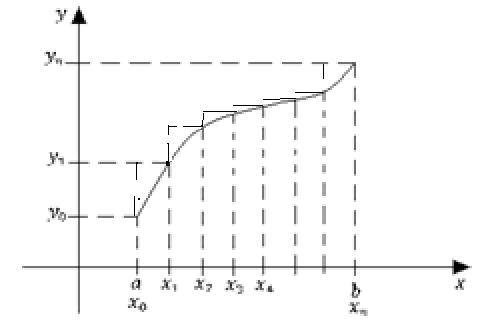


Рис. 15

Можно погрешность вычислений вычислять по формуле:



3. **Формула Симпсона** (рис. 16):

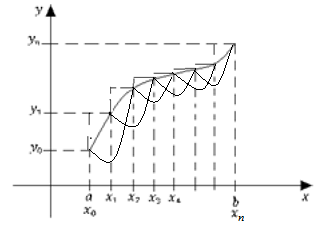


Рис. 16



где остаток  

**Пример**. Вычислить интеграл и оценить погрешность вычислений (разбить отрезок на 10 частей):



1. Вычислим интеграл аналитически:



2. Найдем шаг разбиения отрезка:

3. Вычислим значения абсцисс:



4. Найдем значения функции в точках *xi*:



5. Используем формулу прямоугольников:



 на 



Ответ: 

6. Используем формулу трапеций:







Ответ: 

7. Используем формулу Симпсона:









Ответ: 

**Упражнения № 6**

1. Вычислить заданный интеграл аналитически.

2. Вычислить заданный интеграл по формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона, сравнить результаты.

Варианты заданий приведены в табл. 15.

*Таблица 15*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № вар. | Интеграл | № вар. | Интеграл |
| 1 |  | 2 |  |
| 3 |  | 4 |  |
| 5 |  | 6 |  |
| 7 |  | 8 |  |
| 9 |  | 10 |  |
| 11 |  | 12 |  |
| 13 |  | 14 |  |
| 15 |  | 16 |  |
| 17 |  | 18 |  |
| 19 |  | 20 |  |
| 21 |  | 22 |  |
| 23 |  | 24 |  |
| 25 |  | 26 |  |
| 27 |  | 28 |  |
| 29 |  | 30 |  |

**Тема 8. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

**1. Метод Эйлера.**

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (ОДУ) при начальных условиях: 

Зададим небольшой шаг . Запишем аналог ОДУ, заменив





Пусть Тогда 



Полученное уравнение является основой для метода Эйлера.

Метод Эйлера является методом первого порядка, точность метода зависит от шага *h*. На практике оценка погрешности проводится по правилу Рунге:



где  - оценка погрешности с шагом 0,5*h*.

**Пример**. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера:



1. Найдем точное решение дифференциального уравнения. Рассмотрим соответствующее неоднородному уравнению однородное ОДУ:

Общее решение исходного ОДУ будем искать, используя метод вариации:



Найдем несколько значений функции по найденной формуле (табл. 16).

*Таблица 16*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -1 | -0,9 | -0,8 | -0,7 | -0,6 | -0,5 |
| *y* | 3 | 1,8954 | 1,1264 | 0,6174 | 0,3024 | 0,125 |

2. Найдем решение ОДУ, используя метод Эйлера. Пусть



Переписываем исходное ОДУ в виде  В нашем случае:























Соберем полученные данные в таблицу (табл.17):

*Таблица 17*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -1 | -0,9 | -0,8 | -0,7 | -0,6 | -0,5 |
| *y* | 3 | 1,7 | 0,842 | 0,321 | 0,046 | 0,017 |

Построим кривые по данным табл.10, 11 (рис. 17).

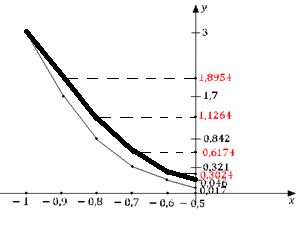


Рис. 17

«Жирная» кривая соответствует аналитическим данным табл. 10, «тонкая» кривая соответствует данным табл. 11, данным, полученным по методу Эйлера.

**Упражнения № 7**

1. Решить дифференциальное уравнение аналитически.

2. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера.

3. Сравнить полученные результаты. Построить полученное решение на плоскости.

4. Найти аппроксимирующую полученное решение функцию. Построить график функции.

Варианты заданий предложены в табл. 18:

*Таблица 18*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | | Дифференциальное уравнение | Начальное условие | Ответ |
| 1 | |  |  |  |
| 2 | |  |  |  |
| 3 | |  |  |  |
| 4 | |  |  |  |
| 5 | |  |  |  |
| 6 | |  |  |  |
| 7 | |  |  |  |
| 8 | |  |  |  |
| 9 | |  |  |  |
| 10 | |  |  |  |
| 11 | |  |  |  |
| 12 | |  |  |  |
| 13 | |  |  |  |
| 14 | |  |  |  |
| 15 | |  |  |  |
| 16 | |  |  |  |
| 17 | |  |  |  |
| 18 | |  |  |  |
| 19 | |  |  |  |
| 20 | |  |  |  |
| 21 | |  |  |  |
| 22 | |  |  |  |
| 23 | |  |  |  |
| 24 |  | |  |  |
| 25 |  | |  |  |
| 26 |  | |  |  |
| 27 |  | |  |  |
| 28 |  | |  |  |
| 29 |  | |  |  |
| 30 |  | |  |  |