МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие

Белгород
2022

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов заочной формы обучения всех специальностей

Белгород
2022

УДК 519.8(07)
ББК 22.1 я7
А64

Рецензент:
Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технического университета им. В. Г. Шухова *А. С. Горлов*

А64 Дифференциальные уравнения. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных. Элементы математической статистики: учебное пособие / Г. Л. Окунева, Л. Б. Польшина, Н. В. Овчарова . – Белгород: Изд-во БГТУ, 2022. – 72 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и охватывает такие разделы математики: «Дифференциальные уравнения», «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных», «Двойной интеграл», «Элементы математической статистики». Помимо теоретического материала пособие содержит примеры решения задач, контрольные работы по разделу, вопросы к зачету. Пособие может использоваться для самостоятельного изучения лекционного курса и выполнения практических заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов очной формы обучения экономических специальностей.

Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 519.08(07)
ББК 22.1 я7

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию студентов заочной формы обучения специальности «Экономика» предлагается данное пособие с изложением основных тем по дисциплине «Математика» за третий семестр обучения: дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных, кратное интегрирование, дифференциальные уравнения, теория вероятности и элементы математической статистики.

В пособии приведено много примеров, которые иллюстрируют изучаемый материал.

В начале пособия студентам предлагаются варианты третьей контрольной работы. Номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки.

Контрольную работу следует оформить в обычной тетради или на листах формата $A4$ и сдать преподавателю. После проверки во время третьей сессии состоится собеседование студента с преподавателем по работе. В результате собеседования, ответов на предлагаемые вопросы и решения стандартных задач по темам третьего семестра студент получает оценку.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Найти область определения функции

1.1. $z = \ln(16 - x^2 - y^2)$

1.2. $z = \dfrac{1}{x^2 - 2x - y^2 + 4y - 4}$

1.3. $z = 5x + \dfrac{y}{2x - 6y}$

1.4. $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

1.5. $z = \ln(9 - x^2 + y^2)$

1.6. $z = \dfrac{y}{x - 3y + 1}$

1.7. $z = \dfrac{7x^2 y}{x + 3y - 1}$

1.8. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$

1.9. $z = \sqrt{1 - x + y}$

1.10. $z = \dfrac{\sqrt{3x - 5y}}{x^2 + y^2 + 4}$

2. Найти частные производные и полный дифференциал первого порядка

1.1. $z = arctg\,(xy^3)$

1.2. $z = \arcsin(3x^2 y)$

1.3. $z = e^{-x^3 + 2y^4}$

1.4. $z = \cos(x^5 - xy^2)$

1.5. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$

1.6. $z = arcctg\,\dfrac{x^2}{y^3}$

1.7. $z = \ln(5x^2 - y^4)$

1.8. $z = \ln(y^5 - e^{-4x})$

1.9. $z = tg(x^2 - 3xy^3)$

1.10. $z = \ln(\sqrt[3]{xy} - 1)$

3. Исследовать функцию на экстремум

1.1. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

1.2. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$

1.3. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

1.4. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$

1.5. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

1.6. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$

1.7. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$

1.8. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$

1.9. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$

1.10. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

4. Вычислить двойной интеграл, если область D ограничена линиями

4.1. $\iint\limits_D xy^2 dxdy; D: y = x^2, y = 2x$

4.2. $\iint\limits_D y(1 + x^2) dxdy; D: y = x^3, y = 3x, x \geq 0$

4.3. $\iint\limits_D xy^2 dxdy; D: x+y=1, x\ge 0, y\ge 0$

4.4. $\iint\limits_D y^2(1+2x)dxdy; D: x-y=3, x\ge 0, y\le 0$

4.5. $\iint\limits_D x^2 ydxdy; D: y=2x^3, y=0, x=1$

4.6. $\iint\limits_D xy^2 dxdy; D: y=x, y=0, x=1$

4.7. $\iint\limits_D (x-1)ydxdy; D: x-y=-2, x=1, y=0$

4.8. $\iint\limits_D (x+1)ydxdy; D: 2x-y=2, x\ge 0, y\le 0$

4.9. $\iint\limits_D x^2 ydxdy; D: 2x+y=-2, x\le 0, y\le 0$

4.10. $\iint\limits_D x^2(1+y)dxdy; D: x-y=3, x\ge 0, y\le 0$

5. Поменять пределы интегрирования.

5.1 $\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$

5.2. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-lny} f(x,y)dx.$

5.3. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_0^{\arccos y} f(x,y)dx.$

5.4. $\int_0^1 dx \int_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy.$

5.5. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}+1}^{\frac{3y}{2}+4} f(x,y)dx.$

5.6. $\int_0^2 dx \int_{x^3}^{x^2+4} f(x,y)dy.$

5.7. $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy.$

5.8. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$

5.9. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

5.10. $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy.$

6. Решить дифференциальные уравнения 1-го порядка

6.1. а) $y' = (2x+5)\cos^2 2y$

б) $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$

в) $xy' - y = x^2\cos x$

6.2. а) $y' = x(x^2+5)^3(2y+3)$

б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$

в) $(1+x^2)y' + y = arctgx$

6.3. а) $y' = xe^{2x^2+4} \cdot \sqrt{4-y^2}$

б) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

в) $y' + 3ytg3x = \sin 6x$

6.4. а) $y' = \frac{y}{\sqrt{5+x^2}}$

б) $xy' = xe^{y/x} + y$

в) $y' - \frac{y}{x\ln x = x\ln x}$

6.5. а) $y' = \frac{e^{3y-5}}{4-x^2}$

б) $x \cdot y \cdot y' = y^2 + 2x^2$

в) $y'\cos^2 x + y = tgx$

6.6. а) $y' = (2x-1)ctgy$

б) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

в) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$

6.7. а) $y' = (2-y)tgx$

б) $xy' + y(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0$

в) $xy' - 2y = 2x^4$

6.8. а) $y' = (2x-1)ctgy$

б) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$

в) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

6.9. а) $y' = (2x-1)ctgy$

б) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

в) $(1-x^2)y' + xy = 1$

6.10. а) $y' = \frac{\sin^2 3y}{5+x^2}$

б) $y'x + x + y = 0$

в) $y' = 2x(x^2 + y)$

7. Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным условиям:

7.1.а) $2y'' + 3y' + y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$ б) $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ в) $y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$	7.2.а) $y'' - 3y' - 18y + 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$ б) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1$ в) $y'' + 3y' + 5y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 2$
7.3.а) $y'' - 6y' + 8y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 3$ б) $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 3$ в) $y'' - 4y' + 20y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$	7.4.а) $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$ б) $y'' + 10y' + 25 - 0, y(0) = 1, y'()) = 7$ в) $y'' - 6y' + 10y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 7$

7.5.а) $y'' - 3y' - 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 6$ б) $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 3$ в) $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 4$	7.6.а) $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2$ б) $y'' - 14y' + 49y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 2$ в) $y'' + 4y' + 13y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 3$
7.7.а) $y'' - 10y' + 21y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -3$ б) $y'' - 12y' + 36y = 0, y(0) = -4, y'(0) = 1$ в) $y'' + 6y' + 25y = 0, y(0) = 4, y'()) = 6$	7.8.а) $y'' - 4y' - 21y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2$ б) $y'' - 16y' + 64y = 0, y(0) = -3. y'(0) = 1$ в) $y'' + 6y' + 13y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2$
7.9.а) $6y'' + 7y' - 3y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -3$ б) $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 5$ в) $y'' + 2y' + 17y = 0, y(0) = y'(0) = 3$	7.10.а) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 4$ б) $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 8, y'(0) = 2$ в) $y'' + 12y' + 37y = 0, y(0) = y'(0) = 5$

8. Построить вариационный ряд, полигон, кумуляту и эмпирическую функцию распределения. Найти числовые характеристики.

8.1. Дано распределение признака X – число сделок на фондовой бирже за месяц: 1, 0, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 0, 2, 1, 2, 0, 0, 4, 5, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 4, 1, 0.

8.2. Дано распределение признака X – число продаж моющего средства за 20 дней в магазине 10, 11, 15, 15, 8, 5, 0, 7, 9, 11, 7, 9, 12, 15, 4, 10, 13, 3, 8, 9.

8.3. Производится опрос населения об оптимальном количестве выходных дней на новогодние праздники: 3, 5, 6, 3, 8, 10, 9, 6, 12, 3, 13, 6, 8, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 14, 10, 8, 9, 7, 4.

8.4. Бухгалтерия университета собирает сведения о количестве докторов наук на кафедрах: 3, 0, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 5, 2, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 3, 2, 2, 1, 2.

8.5. Производится тестирование студентов по 10 блокам 5, 3, 0, 4, 3, 2, 1, 8, 7, 10, 2, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 5, 6, 4.

8.6. Дано распределение признака X – число подписанных издания в городе N среди 20 семей: 1, 3, 2, 4, 0, 1, 0, 2, 3, 5, 0, 2, 1, 3, 5, 0, 1, 3, 2, 1.

8.7. Дано распределение признака X – социологический опрос о качестве дорог в городе N (по пяти больной системе): 3, 2, 1, 3, 4, 5, 2, 1, 3, 4, 5, 5, 2, 1, 3, 4, 2, 3, 3, 4.
8.8. Дано распределение признака X – количества кандидатов наук на выпускающих кафедрах университета 8, 5, 4, 2, 1, 3, 5, 4, 6, 3, 4, 2, 5, 7, 6, 3, 4, 2, 5, 6, 3, 1, 5, 4, 6.
8.9. Дано распределение признака X – результаты тестирования 1, 0, 5, 3, 2, 0, 1, 4, 3, 3, 0, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 0, 3, 0, 2, 3.
8.10. Дано распределение признака – тарифный разряд рабочих деревообрабатывающего цеха 2, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 2, 4, 5, 6, 3, 2, 5, 1, 4, 4, 3, 2, 6, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 3, 1, 3.

9. Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по следующим данным.

9.1.

x_i	2	2,5	3	3,5	4
y_i	4,2	5,5	6,9	8	9,5

9.2.

x_i	1	2	3	4
y_i	0,2	0,3	1,0	1,2

9.3.

x_i	-1	1	3	5	7
y_i	-1	3	8	10	15

9.4.

x_i	1	2	3	4
y_i	3	3,4	3,6	4

9.5.

x_i	1	2	3	4
y_i	4	3	1	0

9.6.

x_i	1	2	3	4
y_i	1,3	2	2,5	2,8

9.7.

x_i	-2	0	1	3
y_i	11,2	2,9	-1,2	-8,8

9.8.

x_i	-1	1	2	3
y_i	-7,2	2,8	9	12,7

9.9.

x_i	-3	-1	0	2
y_i	4,8	3,2	2	0,1

9.10.

x_i	-1	0	2	3,5
y_i	7	3,9	1	-3

Раздел VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

13.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие неизвестные под знаком производной или дифференциала.

Дифференциальное уравнение, в котором исследуется функция одной переменной, называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Дифференциальное уравнение, в котором исследуется функция нескольких переменных, называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение, определяет порядок уравнения.

Дифференциальное уравнение $(n - \text{го})$ порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Если уравнение можно разрешить относительно старшей производной, то уравнение записывается в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, \dots, y^{(n-1)}\right).$$

Решение дифференциального уравнения находят интегрированием.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой дифференциальное уравнение становится тождеством.

Общим решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x, C_i)$, которая содержит столько констант C_i, каков порядок уравнения, $i = 1, 2, \dots, n$.

Запись решения в общем виде $\Phi(x, y) = C$ называется общим интегралом.

Начальные условия для функции дифференциального уравнения

$$x_0, y_0 = y(x_0), \dots, y_0^{(n)} = y_0^{(n)}(x_0), n = 1, \dots, n-1$$

называются условиями Коши. Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения – это функция $y = \varphi(x, C_i^0)$, полученная из общего решения, в котором константы C_i^0 найдены из начальных условий. Такое решение называется решением задачи Коши.

Задача – найти решение для обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, называется задачей Коши.

13.2. Дифференциальное уравнение I порядка

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) первого порядка называются уравнения вида:

$$F(x,y,y')=0,\ y'=f(x,y),\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Графиком решения ОДУ первого порядка называется интегральная кривая. Общие решение ОДУ $y=\varphi(x,C)$ определяет семейство интегральных кривых. Условие задачи Коши определяет единственную кривую, проходящую через точку $(x_0,\ y_0)$.

Теорема Коши. Если в дифференциальном уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой замкнутой области G плоскости XOY и имеет в этой области неограниченную частную производную $f'_y(x,y)$, то в любой точке $(x_0,y_0)\in G$ в некотором интервале $(x_0-h;\ x_0+h)$ существует единственное решение $y(x)$ такое, что удовлетворяет начальным условиям $y_0=y(x_0)$.

Точки, в которых нарушается единственность решения, называются особыми, а решение в этих точках называется особым. Его нельзя получить из общего ни при каких значениях констант.

Особое решение определяет особую интегральную кривую, являющуюся огибающей семейства интегральных кривых. Огибающая семейства находится путем исключения, если это возможно, константы C из системы равнений: $\begin{cases} y=\varphi(x,C); \\ \varphi'_C(x,\ C)=0. \end{cases}$

Из системы выражают C, подставляют ее в общее решение и проверяют полученную функцию подстановкой в заданное дифференциальное уравнение.

Пример 13.1. Найти особое решение уравнения $x(y')^2+2xy'-y=0$, зная общее решение $(y-C)^2=4Cx$.

Решение. Составим систему $\begin{cases} y=\varphi(x,C); \\ \varphi'_C(x,\ C)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2(y-C)=4x; \\ (y-C)^2=4Cx. \end{cases}$

Выразим C: $C=2x+y$. Подставим константу в общее решение:

$$(y-2x-y)^2=4x(2x+y),$$

$$y^2-2y(2x+y)+(2x+y)^2-4x(2x+y)=0,$$

$$4x(y+x)=0,$$

$$x=0,\qquad y=-x.$$

Проверим полученные решения.

1) Решение $x=0$ особым не является, так как оно не исключается из общего.

2) Решение $y=-x$ является особым, оно удовлетворяет уравнению.

13.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид

$$y' = f(x)g(y) \text{ или } f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Для отыскания решения уравнения необходимо разделить переменные

$$y' = f(x)g(y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2, \quad C_2 - C_1 = C$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C - \text{неявное общее решение ОДУ}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = C - \text{решение ОДУ в виде общего интеграла.}$$

Пример 13.2. Решить ОДУ $y' = \frac{y}{x}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C,$$

$$y = Cx - \text{общее решение.}$$

Графическое решение показано на рис. 1. Так как через точку $O(0, 0)$ не проходит ни одна кривая, то точка $x = 0$ – является особой.

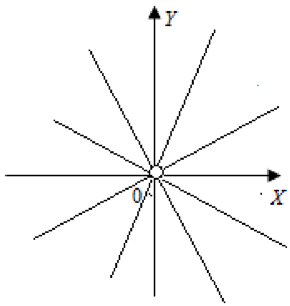

Рис. 1

13.4. Однородные дифференциальные уравнения

Многочлен вида

$$P(x, y) = a_{0,n}y^n + a_{1,n-1}xy^{n-1} + \cdots + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n,0}x^n$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}x^i y^j$$

называется однородным многочленом степени n, если все его члены

$x^i y^j$ имеют один и тот же порядок n, т. е. для каждого члена сумма $i + j = n$.

Функция $P(x, y)$ называется однородной степени n, если для любого числа k имеет место тождество: $P(kx, ky) = k^n P(x, y)$.

Пример 13.3. Показать, что выражение $P(x, y) = 2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2 + 5y^3$ является однородным многочленом третьего порядка.

Решение. $P(kx, ky) = 2(kx)^3 + 3(kx)^2 yk + 4kx(ky)^2 + 5(ky)^3 =$

$$= k^3(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2 + 5y^3) = k^3 P(x, y) .$$

Уравнения вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где многочлены $P(x, y)$, $Q(x, y)$ являются однородными функциями одной степени, называются однородными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Уравнение может быть записано иначе: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Данные уравнения решаются с помощью подстановки $u = \frac{y}{x}$ $\left(v = \frac{x}{y}\right)$, что приводит уравнение к виду уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 13.4. Решить уравнение $(x + y)dx + xdy = 0$.

Решение. Приведем уравнение к нормальному виду

$$(x + y)dx = -xdy, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x}, \quad y' = -\frac{x+y}{x},$$

Введем новую переменную $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u'x + u$.

Уравнение примет вид:

$$u'x + u = -\frac{x+xu}{x} = -\frac{x(1+u)}{x} = -(1 + u),$$

$$u'x = -u - 1 - u = 2u - 1,$$

$$\frac{du}{dx}x = -(2u = 1), \quad \frac{du}{2u+1} = -\frac{xdx}{x^2} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{2u+1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$0.5\ln|2u + 1| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln|2u + 1| = \ln|Cx^{-2}|,$$

$$2u + 1 = \frac{C}{x^2}, \quad 2\frac{y}{x} + 1 = \frac{C}{x^2}, \quad y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.$$

При поиске решения было исключено значение $x = 0$. Проверим его: $(0 + y)d0 + 0dy = 0$, $0 = 0$.

Ответ: $x = 0$, $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$.

13.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = f(x),$$

где $P(x), f(x) -$ непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Если $f(x) = 0$ уравнение называется однородным.

Если $f(x) \neq 0$ уравнение называется неоднородным.

Рассмотрим два способа решения таких уравнений.

1. **Метод вариации произвольной постоянной**

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + P(x)y = f(x).$$

а) Решим уравнение как однородное

$$y' + P(x)y = 0,$$

$$y' = -P(x)y,$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y,\ \frac{dy}{y} = -P(x)dx,\ \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx,$$

$$y_{\text{оо}} = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Получено общее решение однородного уравнения.

б) Рассмотрим константу как функцию от переменной x: $C = C(x)$. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{\text{он}} = C(x)e^{-\int P(x)dx}$.

Найдем производную этого решения:

$$y'_{\text{он}} = C'e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Подставим $y'_{\text{он}}$ и $y_{\text{он}}$ в первоначальное уравнение

$$C'e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx} + CP(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x),$$

$$C'e^{-\int P(x)dx} = f(x),$$

$$dC = f(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1,$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Пример 13.5. Решить дифференциальное уравнение $y' + 3y = e^{2x}$.

Решение.

а) $y' + 3y = 0, \qquad y' = -3y, \qquad \frac{dy}{dx} = -3y, \qquad \frac{dy}{y} = -3dx,$

$$\int \frac{dy}{y} = -3\int dx,\ \ln|y| = -3x + C,\ y_{\text{оо}} = Ce^{-3x}.$$

б) $y_{\text{он}} = C(x)e^{-3x}$, $\quad y'_{\text{он}} = C'e^{-3x} - 3Ce^{-3x}$,

$$C'e^{-3x} - 3Ce^{-3x} + 3\,Ce^{-3x} = e^{2x}, \quad C'e^{-3x} = e^{2x},$$

$$dC = \int e^{2x}e^{3x}dx, \qquad C(x) = 0{,}2e^{5x} + C_1$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{он}} = (0{,}2e^{5x} + C_1)e^{-3x}.$$

2. **Метод подстановки**

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + P(x)y = f(x).$$

Решение уравнения будем искать в виде $y = u(x)v(x)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$.

Подставим y и y' в уравнение и сгруппируем члены уравнения с функцией v:

$$u'v + v'u + P(x)uv = f(x),$$
$$v(u' + P(x)u) + uv' = f(x).$$

1) Подберем функцию $u(x)$ так, чтобы $u' + P(x) = 0$. Тогда

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

2) Зная функцию $u(x)$, найдем функцию $v(x)$: $uv' = f(x)$,

$$e^{-\int P(x)dx}v' = f(x), \quad v = \int f(x)\,e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)\,e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Пример 13.6. Решить дифференциальное уравнение $xy' + 2y = x^2$.

Решение. Используем подстановку $y = u(x)v(x)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$.

Подставим y и y' в уравнение и сгруппируем члены уравнения с функцией v:

$$x(u'v + v'u) + 2uv = x^2,$$
$$v(xu' + 2u) + uxv' = x^2.$$

1) Подберем функцию $u(x)$ так, чтобы $xu' + 2u = 0$. Тогда

$$u' = -\frac{2u}{x}, \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}, \quad \ln|u| = -2\ln|x|, \quad u = \frac{1}{x^2}.$$

2) Зная функцию $u(x)$, найдем функцию $v(x)$: $uxv' = x^2$,

$$v' = x^3, \quad v = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right).$$

Пример 13.7. Решить дифференциальное уравнение $(x+y)y' = 1$.

Решение. Данное уравнение является линейным относительно переменной y. Тогда $y' = \frac{1}{x'}$. Уравнение примет вид:

$$(x+y)\frac{1}{x'} = 1, \qquad x' - x = y.$$

Используем подстановку $x = u(y)v(y)$. Тогда $x' = u'v + v'u$.

Подставим y и y' в уравнение и сгруппируем члены уравнения с функцией v:

$$u'v + v'u - uv = y,$$

$$v(u' - u) + uv' = y.$$

1) Подберем функцию $u(y)$ так, чтобы $u' - u = 0$. Тогда

$$u' = u, \quad \frac{du}{u} = dy, \quad \ln|u| = y, \quad u = e^y.$$

2) Зная функцию $u(y)$, найдем функцию $v(y)$: $uv' = y$,

$$v' = \frac{y}{u}, \qquad v = \int ye^{-y}\,dx = -ye^{-y} - e^{-y} + C.$$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = e^y(-ye^{-y} - e^{-y} + C).$$

13.6. Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = f(x)y^n, \text{ где } n \neq 0,\ n \neq 1,$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Решать уравнение можно методом подстановки $y = u(x)v(x)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$.

Подставим y и y' в уравнение и сгруппируем члены уравнения с функцией v:

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)u^n v^n$$

$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x)u^n v^n.$$

1) Подберем функцию $u(x)$ так, чтобы $u' + P(x) = 0$. Тогда

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

2) Зная функцию $u(x)$ найдем функцию $v(x)$: $uv' = f(x)$,

$$uv' = Q(x)u^n v^n, \qquad \int \frac{dv}{v^n} = \int Q(x)u^{n-1}\,dx + C.$$

Пример 13.8. Решить дифференциальное уравнение $y' = y^2e^x - y$.

Решение. Запишем уравнение в виде уравнения Бернулли:
$y' + y = y^2e^x$.

Решать уравнение будем методом подстановки $y = u(x)v(x)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$.

Подставим y и y' в уравнение и сгруппируем члены уравнения с функцией v:

$$u'v + v'u - uv = u^2v^2e^x,$$
$$v(u' - u) + uv' = u^2v^2e^x.$$

1) Подберем функцию $u(x)$ так, чтобы $u' - u = 0$. Тогда

$$u(x) = e^{-x}.$$

2) Зная функцию $u(x)$, найдем функцию $v(x)$: $e^{-x}v' = e^x e^{-2x} v^2$,

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{v} = x + C, \qquad v = -\frac{1}{x+C}.$$

3) Запишем общее решение уравнения Бернулли

$$y_{\text{он}} = -\frac{e^{-x}}{x+C}.$$

13.7. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$ в некоторой области G, называется уравнением в полных дифференциалах.

Можно записать $dF(x,y) = 0$, где $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ и общее решение уравнения имеет вид: $F(x,y) = C$.

Условием полного дифференциала является равенство:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Представим

$$dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = Q(x,y).$$

Проинтегрируем выражение $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ по переменной x:

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y).$$

Подберем функцию $C(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = Q(x,y).$$

Для этого продифференцируем функцию $F(x,y)$ по переменной y и приравняем к функции $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right) = Q(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + C'(y) = Q(x,y),$$

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx.$$

Проинтегрируем полученное выражение, найдем функцию $C(y)$, подставим ее в функцию $F(x,y)$.

Пример 13.9. Решить дифференциальное уравнение

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Проверим, выполняется ли условие полного дифференциала.

$$P(x,y) = x + y + 1, \ \ Q(x,y) = x - y^2 + 3,$$

$$\frac{dP}{dy} = 1, \ \frac{dQ}{dx} = 1, \ \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Условие выполняется. Найдем функцию $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \int (x + y + 1)dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + x\right) + C'(y) = \ x - y^2 + 3,$$

$$x + C'(y) = \ x - y^2 + 3,$$

$$C'(y) = \ -y^2 + 3,$$

$$C(y) = 3y - \frac{y^3}{3} + C_1,$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2,$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3} = -C_1 + C_2,$$

Общее решение уравнения: $3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 = C$.

13.8. Уравнения второго порядка, допускающие понижение степени

1. Уравнения вида $\boldsymbol{y'' = f(x)}$.

Необходимо дважды проинтегрировать правую часть уравнения:

$$y' = \int f(x)dx + c_1,$$

$$y = \int (\int f(x)dx + c_1)\, dx + C_2.$$

Пример 13.10. Решить дифференциальное уравнение $y'' = x$.

Решение.

$$y' = \int xdx + c_1 = \ \frac{x^2}{2} + c_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Общее решение уравнения: $y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

2. Уравнения вида $\boldsymbol{y'' = f(x, \ y')}$.

Уравнение решается с помощью подстановки $z(x) = y'$. Тогда $y'' = z'$.

После подстановки z и z' получим линейное уравнение: $z' = f(x, z)$

Находим функцию z, затем $y = \int z dx + C_2$.

Пример 13.11. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 3\frac{y'}{x} = x$.

Решение. Введем функцию и ее производную: $z(x) = y',\ y'' = z'$.

Получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка: $z' - 3\frac{z}{x} = x$. Решаем его методом подстановки:

$$z = uv,\ z' = u'v + uv'.$$

$$u'v + uv' - 3\frac{uv}{x} = x,$$

$$v\left(u' - \frac{3u}{x}\right) + uv' = x,$$

$$u' = \frac{3u}{x}, \quad \frac{du}{u} = 3\frac{dx}{x}, \quad u = x^3,$$

$$x^3 v' = x, \quad v' = \frac{1}{x^2},$$

$$v = \int \frac{1}{x^2} dx + C_1 = -\frac{1}{x} + C_1,$$

$$z = x^3\left(-\frac{1}{x} + C_1\right) = C_1 x^3 - x^2,$$

$$y' = C_1 x^3 - x^2,$$

$$y = \int (C_1 x^3 - x^2)\, dx + C_2 = \frac{C_1 x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Общее решение уравнения: $y = \frac{C_1 x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_2$.

3. Уравнения вида $\boldsymbol{y'' = f(y,\ y')}$.

Уравнение решается с помощью подстановки $z(y) = y'$.

Тогда $y'' = z'y' = z'z$.

После подстановки z и z' получим линейное уравнение: $z' = f(y, z)$

Находим функцию z, затем y.

Пример 13.12. Решить дифференциальное уравнение $y''y - 2(y')^2 = 0$.

Решение. Введем функцию и ее производную: $z(y) = y',\ y'' = z'z$.

Получим однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка: $yzz' - 2z^2 = 0$.

$$z(z'y - 2z) = 0,$$

$$z = 0, \quad y' = 0, \quad y = C$$

$$z'y - 2z = 0, \quad z'y = 2z, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y},$$

$$\ln|z| = 2\ln|y| + \ln C_1, \quad z = C_1 y^2,$$

$$y' = C_1y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1dx, \quad -\frac{1}{y} = C_1x + C_2, \quad y = -\frac{1}{C_1x+C_2}.$$

Так как решение $y = C$ можно получить из решения $y = -\frac{1}{C_1x+C_2}$ при $C_1 = 0$, то общее решение уравнения можно записать так:

$$y = -\frac{1}{C_1x+C_2}.$$

13.9. Линейные дифференциальные уравнения II порядка

Уравнения вида

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка, где $P(x), Q(x), f(x) -$ непрерывные функции на некотором интервале (a, b).

Если $f(x, y) = 0$, то уравнение называется линейным однородным.

Если $f(x, y) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным.

Уравнение можно разрешить относительно y'', т. е. представить в виде:

$$y'' = -P(x)y' - Q(x)y + f(x).$$

Следовательно, уравнение удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения задачи Коши, т. е. решения при начальных условиях $y_0 = y(x_0)$, $y'(x_0) = y'_0$.

1. **Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка**

Пусть задано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

ссмотрим некоторые его свойства.

Теорема 1. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, то функция $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) -$ решение этого уравнения, где C_1, $C_2 -$ константы.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b), если существуют такие числа α_1, α_2, одновременно не равные нулю, что для любого $x \in (a, b)$ верно равенство

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0.$$

Иначе это свойство можно записать так: если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимые, то они пропорциональные: $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Если равенство не выполняется, то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a, b) и выполняется равенство $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Теорема 2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимые на интервале (a, b), то выполняется равенство

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель W называется определителем Вронского.

Теорема 3. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка на интервале (a, b), то определитель Вронского не равен нулю: $W \neq 0$.

Теорема 4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка на интервале (a, b), то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ является решение этого уравнения, где C_1, $C_2 -$ константы.

Пример 13.13. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 0$, если известны два решения $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = \cos x$.

Решение. Составим определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Функции $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = \cos x -$ линейно независимыми решениями уравнения, следовательно, общее решение имеет вид:
$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Теорема 5. Если функция $y_1(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, то с помощью подстановки $y = z y_1(x)$ уравнение можно представить в виде линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 13.14. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$, известно решение уравнения $y_1(x) = e^x$.

Решение. Введем функцию $y = z y_1(x) = z e^x$,

$$y' = z' e^x + z e^x, \qquad y'' = z'' e^x + 2z' e^x + z e^x,$$

$$z'' e^x + 2z' e^x + z e^x - z e^x = 0,$$

$$z'' e^x + 2z' e^x = 0, \qquad e^x (z'' + 2z') = 0,$$

$z'' + 2z' = 0 -$ уравнения второго порядка, допускающее понижение степени.

Введем подстановку: $u(x) = z'$. Тогда $z'' = u'$.

$$u' + 2u = 0, \qquad \frac{du}{u} = -2dx,$$

$$\ln|u| = -2x + C_1, \qquad u = C_1 e^{-2x},$$

$$z' = C_1 e^{-2x}, \qquad z = \int C_1 e^{-2x}\,dx + C_2 = -\tfrac{1}{2} C_1 e^{-2x} + C_2,$$

$y = e^{x}\left(-\tfrac{1}{2} C_1 e^{-2x} + C_2\right) = \boldsymbol{C}_1 e^{-x} + \boldsymbol{C}_2 e^{x} -$ общее решение уравнение.

2. **Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка.**

Пусть задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x).$$

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка есть сумма его общего решения однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ и частного решения линейного неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}$: $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$, $y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Для нахождения частного решения используем метод вариации произвольных постоянных. Частное решение будем искать в виде:

$$y_{\text{чн}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ найдем из условия:

$$\begin{cases} C'_1(x) y'_1 + C'_2(x) y'_2 = f(x), \\ C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 13.15. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y = x.$$

Решение. Общее решение однородного дифференциального уравнения найдено выше: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$. Частное решение будем искать в виде: $y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{x}$. Найдем функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ из системы:

$$\begin{cases} C'_1(x) e^{x} - C'_2(x) e^{-x} = x, \\ C'_1(x) e^{x} + C'_2(x) e^{-x} = 0. \end{cases}$$

$$C'_1(x) = \tfrac{1}{2} x e^{-x}, \qquad C_1 = -\tfrac{1}{2}(x+1) e^{-x},$$

$$C'_2(x) = -\tfrac{1}{2} x e^{x}, \qquad C_2 = -\tfrac{1}{2}(x-1) e^{x}.$$

$$y_{\text{чн}} == -\tfrac{1}{2}(x+1) e^{-x} e^{x} - \tfrac{1}{2}(x-1) e^{x} e^{-x} = -x,$$

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - x.$$

Решим задачу Коши при условиях: $x_0 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Найдем значения констант. Найдем производную функции общего решения: $y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 1$.

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad C_1 - C_2 - 1 = 1, \qquad C_1 - C_2 = 2,$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 2, \\ C_1 + C_2 = 1, \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{3}{2},\ C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Решение задачи Коши: $y_ч = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} - x.$

13.10.Однородные линейные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где $p, q -$ числа, называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида

$$k^2 + pk + q = 0$$

называется характеристическим уравнением данного дифференциального уравнения. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.

1) если $k -$ вещественный корень характеристического уравнения, то функция $y = e^{kx}$ является решением дифференциального уравнения;

2) если числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i -$ комплексные корни характеристического уравнения, то функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ является решениями дифференциального уравнения.

Теорема 2.

1) если $k_1,\ k_2 -$ вещественные и различные $(k_1 \neq k_2)$ корни характеристического уравнения, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$$

2) если $k_1,\ k_2 -$ вещественные и равные $(k_1 = k_2)$ корни характеристического уравнения, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = (C_1 + C_2x)e^{kx};$$

3) если корнями характеристического уравнения являются комплексные числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

Пример 13.16. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = 1, \ k_2 = -2.$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Пример 13.17. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k_{1,2} = 1.$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

Пример 13.18. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$k^2 - 4k + 13 = 0, \quad k_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) e^{2x}.$$

13.11. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где $p, q -$ числа, называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффици-ентами со специальной правой частью.

Специальной правой частью называется функция вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x).$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения и частного:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Пусть решение однородного уравнения имеется:

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных или методом неопределенных коэффициентов, если функция $f(x)$ имеет специальный вид. Частное решение выбираем по правой части уравнения:

$$y_{\text{чн}} = x^s e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x),$$

$M_r(x), N_r(x) -$ многочлены степени $r = \max(m, n)$, $s -$ число корней характеристического уравнения: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Теорема. Если $y_{1\text{чн}} -$ решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и $y_{2\text{чн}} -$ решение уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то $(y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}) -$ является решением уравнения вида: $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

Пример 13.19. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

Решение.

1. Составим однородное уравнение: $y'' - 4y' + 3y = 0$. Решим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ $(\alpha_1 \pm \beta_1 i = 1, \alpha_2 \pm \beta_2 i = 3)$.

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

2. Выпишем правую часть уравнения: $f(x) = xe^x$. По виду правой части

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

получим: $P_n(x) = x -$ многочлен первой степени, $\alpha = 1$. Тогда по $y_{\text{чн}}$

$$y_{\text{чн}} = x^s e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x)$$

определяем: $r = 1$, $M_1(x) = Ax + B$, $s = 1$, т. е.

$$y_{\text{чн}} = (Ax + B)xe^x.$$

$$y_{\text{чн}} = (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$y'_{\text{чн}} = (Ax^2 + Bx)e^x + (2Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x + (2Ax + B + 2A)e^x =$$
$$= e^x(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2A + 2B),$$

Подставим найденные функции в начальное уравнение

$$e^x(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2A + 2B) - 4(Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x +$$
$$+3(Ax + B)xe^x = xe^x,$$
$$-4Ax + 2A - 2B = x.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях переменной x:

$$-4A = 1, \qquad A = -\frac{1}{4},$$
$$2A - 2B = 0, \qquad B = -\frac{1}{4},$$
$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}e^x(x + 1).$$

Общее решение заданного уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} = -\frac{1}{4} e^x (x+1).$$

Пример 13.20. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \sin x$.

Решение.

1. Составим однородное уравнение: $y'' + y = 0$. Решим характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i = \pm i$.

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Выпишем правую часть уравнения: $f(x) = \sin x$. По виду правой части

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

получим: $P_n(x) = 1 -$ многочлен нулевой степени, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Тогда из общего вида

$$y_{\text{чн}} = x^s e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x)$$

определяем: $r = 0$, $M_1(x) = A$, $N_1(x) = B$, $s = 1$, т. е.

$$y_{\text{чн}} = (A\cos x + B\sin x)x.$$

Найдем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = (-A\sin x + B\cos x)x + A\cos x + B\sin x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (-A\cos x - B\sin x)x - A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (-A\cos x - B\sin x)x - 2A\sin x + 2\cos x.$$

Подставим найденные производные в начальное уравнение:

$$(-A\cos x - B\sin x)x - 2A\sin x + 2\cos x + (A\cos x + B\sin x)x = \sin x,$$

$$-2A\sin x + 2\cos x = \sin x,$$

$$-A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0,$$

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{2}\cos x.$$

Общее решение заданного уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}\cos x.$$

13.12. Системы линейных дифференциальных уравнений

Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка называется система вида

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y'_2(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ y'_n(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Система называется нормальной.

Система функций $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x); \\ y_2 = \varphi_2(x); \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x) \end{cases}$

называется решением системы уравнений на интервале (a, b), которые обращают уравнения в тождества.

Совокупность функций $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n); \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, \dots, C_n); \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n) \end{cases}$

называется общим решением системы уравнений.

Функция $\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными на некотором множестве D изменения переменных, называется интегралом системы уравнений.

Функция $\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$, где $C -$ произвольная постоянная, называется первым интегралом системы уравнений.

Задача Коши для системы уравнений ставится так: найти решение системы уравнений при заданных начальных условиях

$$y_1(x_0) = y_{01}, \quad y_2(x_0) = y_{02}, \quad , \ , \quad y_n(x_0) = y_{0n}.$$

В общем случае решение системы уравнений сводится к решению дифференциального уравнения $n -$ ого порядка.

Пример 13.21. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Зная, что функции x и y зависят от переменной t, перепишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x' = y - 7x; \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$$

Выразим переменную x как функцию от переменной y и найдем ее вторую производную:

$$y = x' + 7x,$$
$$x'' = y' - 7x' = -2x - 5y - 7(y - 7x) = 47x - 12y =$$
$$= 47x - 12(x' + 7x) = -12x' - 37,$$
$$x'' + 12x' + 37 = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 12k + 37 = 0$.

Найдем корни $k_{1,2} = -6 \pm i$. Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{-6x}.$$

Найдем y.

$$y = x' + 7x,$$
$$x' = (-C_1 \sin t + C_2 \cos t)e^{-6x} - 6(C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{-6x},$$
$$x' = (-C_1 \sin t + C_2 \cos t - 6C_1 \cos t - 6C_2 \sin t)e^{-6x},$$
$$y = (-C_1 \sin t + C_2 \cos t - 6C_1 \cos t - 6C_2 \sin t + 7(C_1 \cos t + C_2 \sin t))e^{-6x}$$
$$= e^{-6x}((C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t)$$

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)e^{-6x}; \\ y = e^{-6x}\big((C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t\big). \end{cases}$

13.13. Дифференциальные уравнения в экономике

1. **Уравнение естественного роста**.

Пусть известна скорость $v(t)$ изменения некоторой величины $y(t)$, которая меняется мгновенно в момент времени t, $k -$ коэффициент пропорциональности. Тогда уравнение естественного роста имеет вид:

$$v(t) = k \cdot y(t), \quad y'(t) = k \cdot y(t).$$

Пример 13.22. **Задача о кредитовании**. Пусть некоторый человек платит кредитору $p\%$ от занятой суммы y_0 за год. Сколько он должен уплатить за год на каждую единицу занятой суммы, если проценты нарастают непрерывно?

Решение. Используем уравнение естественного роста:

$$y'(t) = ky(t), \qquad \frac{dy}{dt} = ky(t),$$
$$\frac{dy}{y} = kdt, \qquad \ln|y| = kt + \ln C$$
$$y = Ce^{kt}.$$

Так как ежегодный прирост $y(t)$ составляет $p\%$, то скорость изменения составит $\frac{p}{100}$ от $y(t)$, следовательно, $k=\frac{p}{100}$. При $y(0)=y_0$ получим, что $y_0=Ce^0$. Тогда количество денег, которое человек заплатит на каждую единицу суммы y_0за время t

$$y(t)=y_0e^{\frac{pt}{100}}.$$

Пример 13.23. **Рост денежного вклада в банке**. Пусть 1000 году была положена 1 копейка в банк под 5% годовых. Какую сумму можно получить в 2000 году? Предполагается, что денежных реформ за это время не проводилось, а проценты начисляются непрерывно.

Решение. Используем уравнение непрерывного роста:

$$y'(t)=0{,}05y(t),\qquad \frac{dy}{dt}=0{,}05y(t),$$

$$\frac{dy}{y}=0{,}05dt,\qquad \ln|y|=0{,}05t+\ln C$$

$$y=Ce^{kt}.$$

При $t=0$ $y=1$, тогда $y=e^{kt}$. Найдем значение y при $t=1000$:

$$y(1000)=\ e^{0{,}05\cdot1000}=e^{50}.$$

Это очень большая сумма. Поэтому денежные реформы неизбежны.

Пример 13.24. **Закон роста выпуска продукции**. Пусть $y(t)-$ количество продукции, произведенной в момент времени t. Пусть она продается по фиксируемой цене p и тут же реализуется.Доход в момент времени t составит $py(t)$.

Пусть на расширение производства расходуется n часть дохода, т. е. инвестиции составят $i(t)=\frac{py(t)}{n}$.

В результате получим прирост дохода, n часть которого опять будет направлена на расширение производства. Это приведет к росту скорости выпуска продукции:

$$y'(t)=ki(t),\qquad \frac{dy}{dt}=ki(t),\qquad \frac{dy}{dt}=k\frac{p}{n}y(t),$$

$$\frac{dy}{y}=k\frac{p}{n}dt,\qquad \ln|y|=\frac{p}{n}kt+\ln C$$

$$y=Ce^{\frac{p}{n}kt}.$$

Вывод: можно быстро добиться больших объемов выпуска продукции, если часть дохода направить на расширение производства.

2. **Уравнение отклонения рыночной цены от ее естественного состояния**.

Пусть $S(t)-$ отклонение рыночной цены от ее естественного значения в момент времени t (при $S=0$ рыночная цена равна равновесной).

Адам Смит ввел в рассмотрение две силы:

1. сила «тяготения» к рыночной цене (называется силой Смита):

$$F_1(t) = -bS(t),$$

где b − коэффициент Смита;

2. сила сохранения (колебания) цены, зависящая от вида товара, от колебания количества товара и других видов товара и т. д.:

$$F_2(t) = -r\frac{dS}{dt},$$

где r − коэффициент сохранения.

Тогда уравнение отклонение рыночной цены от ее естественного значения в момент времени t примет вид

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -r\frac{dS}{dt} - bS(t).$$

Введем коэффициент затухания: $\delta = 0{,}5r$ и параметр циклической части свободных колебаний в отсутствии сила сохранения: $\sqrt{b} = w_0^2$.

Уравнение примет вид

$$S''(t) + 2\delta S'(t) + w_0^2 S(t) = 0.$$

Исследуем решение полученного уравнения:

1. при $\delta > w_0$ имеем непериодическое затухание

$$S(t) = C_1 e^{-\left(\delta+\sqrt{\delta^2-w^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\delta-\sqrt{\delta^2-w^2}\right)t};$$

$S(t)$ − монотонно убывает при $t \to \infty$, система выведенная из положения равновесия, асимптотически возвращается в положение равновесия4

2. при $\delta = w_0$ имеем непериодическое затухание

$$S(t) = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t);$$

3. при $0 < \delta < w_0$ система совершает затухающие колебания

$$S(t) = A_0 e^{-\delta t}\sin(wt + \varphi_0),$$

где A_0, φ_0 − числа, $w = \sqrt{w_0^2 - \delta^2}$ − собственная циклическая частота колебаний.

Приведем примеры анализа поведения рыночной цены.

1. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y = e^{-t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t))$ − описывает колебания рыночной цены от ее естественного значения. Колебания затухающие. При $t \to \infty$ отклонение стремится к 0.

2. $y'' + 4y = 0$, $y = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$ − описывает незатухающие колебания цены вокруг естественной, при $t \to \infty$ отклонение не имеет предела.

3. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$ − описывает непериодическое затухание, понижение цены. При $t \to \infty$ отклонение стремится к нулю.

Раздел VIII. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 14. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

14.1 Определение функции нескольких переменных

Пусть дано некоторое множество D пар чисел (x, y).

Функцией двух переменных называется соответствие, при котором каждой паре чисел $(x, y) \in D$ соответствует единственное число $z \in E$.

При этом x и y называются независимыми переменными (или аргументами), z – зависимой переменной (или функцией), множество D областью определения функции, а E – множеством значений функции.

Обозначения функции двух переменных: $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. д.

При нахождении частного значения z_0 функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при заданных численных значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$, пишут $z_0 = z_{|x_0, y_0}$ или $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Например, если $z = f(x, y) = xy$, то $z_{|x=1, y=2} = f(1; 2) = 2$.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка $P(x, y)$ плоскости OXY и обратно, каждой точке $P(x, y)$ соответствует единственная пара чисел (x, y), то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $P(x, y)$. Поэтому вместо записи $f(x; y)$ пишут $f(P)$. в этом случае областью определения функции является некоторое множество G точек плоскости OXY.

Функцией трех переменных называют соответствие, при котором каждой тройке $(x, y, z) \in V$ соответствует единственное число $u \in L$.

При этом x, y и z называют независимыми переменными (или аргументами), u – зависимой переменной (или функцией), множество V – областью определения функции, а L – множеством значений функции.

Аналогично можно ввести понятие функции четырех, пять и вообще n переменных.

Пример 14.1. Найти область определения функции

$$z = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

Решение. Областью определения этой функции является множество всех точек, для которых выражение $\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$ определено, т.е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 > 0$, или $x^2 + y^2 < 1$, т. е. внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 2).

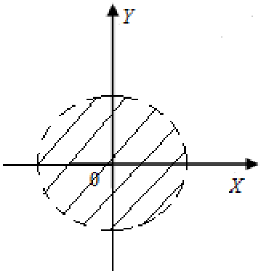

Рис. 2

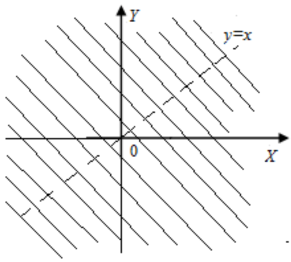

Рис. 3

Пример 14.2. Найти область определения функции $z = \dfrac{x + y}{2x - y}$.

Решение. Областью определения этой функции является множество точек, удовлетворяющих условию $2x - y \neq 0$, или $y \neq 2x$, т. е. все точки плоскости *OXY* за исключением точек прямой $y = 2x$ (рис. 3).

Пример 14.3. Найти область определения функции

$$u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Решение. Функция будет принимать действительные значения при условии, что $4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. То есть область определения функции является шар радиуса 2 с центром в начале координат. Точки граничной шаровой поверхности относятся к области определения функции.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D на плоскости *OXY*. Тогда каждой точке $(x, y) \in D$ будет соответствовать точка $(x, y, f(x, y))$ трехмерного пространства.

Множество всех таких точек $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, называется графиком функции $z = f(x, y)$. В общем случае графиком функции $z = f(x, y)$ является поверхность в пространстве.

Линией уровня называется множество точек на плоскости OXY, в которых функция принимает данное постоянное значение C. Эту линию можно также получить, пересекая график функции $z = f(x, y)$ плоскостью $z = C$, параллельной плоскости OXY, и проектируя линию пересечения ортогонально на плоскость OXY (рис. 4).

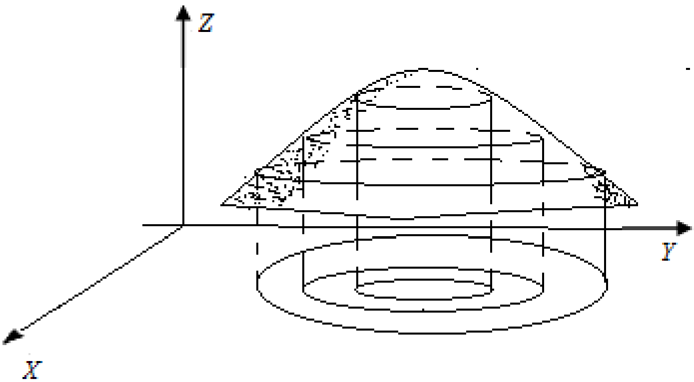

Рис. 4

Пример 14.4. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{y}{x^2}$.

Решение. Рассмотрим

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x^2}, \\ z = C, \end{cases} \quad \frac{y}{x^2} = C, \quad y = Cx^2,$$

т. е. линиями уровня является семейство парабол.

Для функции $u = f(x, y, z)$ – функции трех переменных рассматривают поверхности уровня – множество точек $P(x, y, z)$ пространства, в которых функция $f(P)$ принимает данное постоянное значение.

14.2. Предел функции двух переменных. Непрерывность

При рассмотрении предела функции одной переменной было введено понятие окрестности точки. Под окрестностью точки x_0 принимался интервал, содержащий эту точку. При введении понятия предела функции двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ будем рассматривать окрестность точки в плоскости OXY.

Окрестностью точки $P_0(x_0;y_0)$ называется внутренность круга с центром в этой точке.

Если радиус круга равен δ, то говорят о δ -окрестности точки $(x_0;y_0)$. Очевидно, что любая точка $P(x;y)$, принадлежащая δ -окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, находится от этой точки на расстоянии, меньшем δ.

Число b называется пределом функции двух переменных $z=f(x,y)$ при $P\to P_0$, если для любого числа ε > 0 найдется такая δ - окрестность точки $P_0(x_0;y_0)$, что для любой точки $P(x, y)$ этой окрестности (за исключением, быть может, точки P_0) имеет место неравенство $|f(P)-b|<\varepsilon$, или $|f(x,y)-b|<\varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=b$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$.

Пример 14.5. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

Решение. Предел функции вычисляется при $P(x;y)\to P_0(0;0)$.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\left(2-\sqrt{xy+4}\right)\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}=$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{4-xy-4}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{1}{2+\sqrt{xy+4}}=\frac{1}{4}$$

Следует обратить внимание на то, что функция $\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ не определена в точке $P_0(0;0)$, но имеет предел при $P\to P_0$.

Функция двух переменных называется бесконечно малой при $x\to x_0$ $y\to y_0$, если ее предел равен нулю, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=0$.

Функция нескольких переменных $u=f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

Заметим, что функция $u=f(P)$, непрерывная в точке P_0, должна быть определена в этой точке и некоторой ее окрестности (иначе нельзя было бы осуществить переход к пределу). Точка P_0, в которой функция нескольких переменных $u = f(P)$ непрерывна, называется точкой непрерывности функции.

Теорема 1. Если функции $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0, то в этой точке непрерывны и их сумма $f_1(P) + f_2(P)$, разность $f_1(P) - f_2(P)$ и произведение $f_1(P) \cdot f_2(P)$; если, кроме того, $f_2(P) \neq 0$, то частное $\frac{f_1(P)}{f_2(P)}$ также есть непрерывная функция в точке P_0.

Если условие непрерывности нарушено (или функция не определена, или не существует предел, или не выполняется равенство), точка называется точкой разрыва. Точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линии разрыва.

Функция $z = f(x, y) = f(P)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Теорема 2. Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она в этой области:

1) ограниченная, т. е. существует такое число N, что для всех точек $(x, y) \in D$ выполняется неравенство $|f(P)| \leq N$,

2) имеет наименьшее m и наибольшее M значения: $m < M$,

3) для любой точки $(x, y) \in D$ $m \leq f(x, y) \leq M$ (принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M).

14.3. Дифференцируемость нескольких переменных. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ и ее геометрический образ (рис. 5). Рассмотрим точку $P(x, y)$ и значение функции в этой точке $z = f(P)$. Зафиксируем значение одного из ее аргументов, например y, а переменной x зададим приращение Δx. Получим точку $P_1(x + \Delta x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$, очевидно, получит приращение $\Delta_x z = f(P_1) - f(P) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $P(x; y)$ и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x \cdot$$

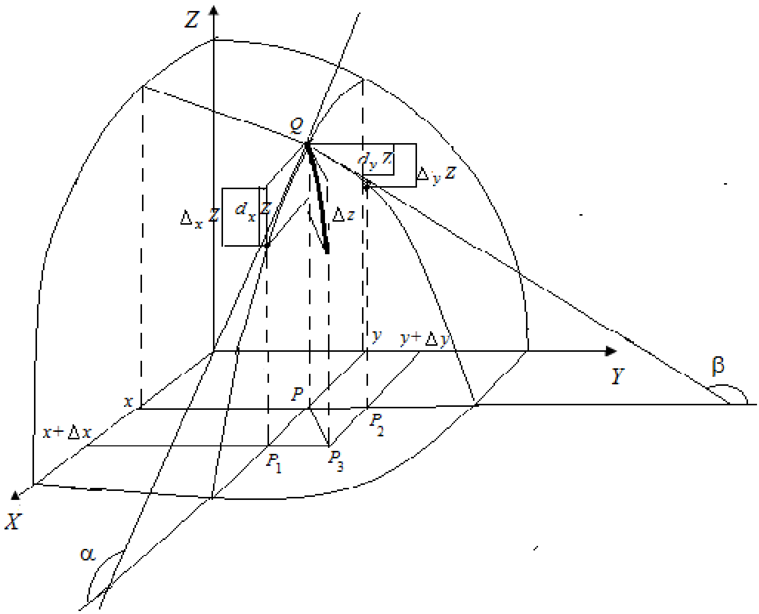

Рис. 5

Разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением по x функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$. Учитывая обозначения, можно записать

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \cdot$$

Теперь зафиксируем значение переменной x, а для y зададим приращение. Получим точку $P_2(x, y + \Delta y)$ и приращение функции

$$\Delta_y z = f(P_2) - f(P) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, то он называется частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной y в точке $P(x;y)$ и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f'_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y\cdot$$

Имеем

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

где $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ – частное приращение по переменной y функции $z=f(x,y)$ в точке $P(x;y)$. А теперь рассмотрим приращение обоих аргументов x и y: $x+\Delta x$ и $y+\Delta y$. Получим точку $P_3(x+\Delta x,y+\Delta y)$.

Тогда $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ – называют полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке $P(x;y)$.

Частные производные вычисляются по правилам и формулам, справедливым для функции одной переменной, при условии, что в момент дифференцирования по одной из переменных вторая переменная рассматривается как постоянная величина.

Пример 14.6. Найти частные производные функции

$$z=x^5-3y^2+7xy+1.$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-0+7y+0=5x^4+7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0-6y+7x+0=-6y+7x.$$

Пример 14.7. Найти частные производные функции $z=\ln\left(x^3+y^3\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^3+y^2}\cdot\left(x^3+y^2\right)'_x=\frac{1}{x^3+y^2}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^3+y^2}\cdot\left(x^3+y^2\right)'_y=\frac{1}{x^3+y^2}\cdot 2y=\frac{2y}{x^3+y^2}\cdot$$

Пример 14.8. Найти частные производные функции z = arctg(xy).

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(xy)^2}\cdot(xy)'_x=\frac{1}{1+(xy)^2}\cdot y=\frac{y}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(xy)^2}\cdot(xy)'_y=\frac{1}{1+(xy)^2}\cdot x=\frac{x}{1+x^2y^2}.$$

14.4. Дифференциал функции

Рассмотрим частное приращение по переменной x:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y).$$

Если существует $f'_x(x,y)$, то на основании теории функции одной переменной это приращение равно

$$\Delta_x z=f'_x(x,y)\Delta x+\alpha(x,y,\Delta x),\text{ где }\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\alpha}{\Delta x}=0.$$

Линейная относительно Δx часть этого приращения называется частным дифференциалом функции $z=f(x,y)$ по переменной x и обозначается символом $d_x z$. Если $d_x z\neq 0$, то он будет главной частью приращения, эквивалентной самому приращению. Таким образом,

$$\Delta_x z=d_x z+\alpha,\quad\text{где}\quad d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx.$$

Как следует из геометрического смысла дифференциала функции одной переменной, геометрически частный дифференциал есть приращение аппликаты касательной в точке $(x;y)$ к линии $z=f(x,y)$, $y=c$, лежащей на поверхности $z=f(x,y)$

Аналогично определяется частное приращение и частный дифференциал по переменной y:

$$\Delta_y z=d_y z+\beta,\quad\text{где}\quad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy\quad\text{и}\quad\lim_{\Delta y\to\infty}\frac{\beta}{\Delta y}=0.$$

Рассмотрим точки $P(x;y)$ и $P_3(x+\Delta x,y+\Delta y)$.

Разность $\Delta f(x,y)=\Delta f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ называется полным приращением функции $z=f(x,y)$ в точке $P(x;y)$. Более кратко будем записывать его в виде $\Delta z=f(P_3)-f(P)$.

Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $P(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\gamma(x,y,\Delta x,\Delta y),$$

где A и B - некоторые выражения, не содержащие Δx и Δy, т. е. постоянные относительно Δx и Δy, а γ является бесконечно малой более высокого порядка, чем

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,, \quad \text{т.е. } \lim_{\rho \to \infty} \frac{\gamma}{\rho} = 0\,.$$

Здесь ρ расстояние между точками P_3 и P.

Линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения дифференцируемой в точке $P(x; y)$ функции $z = f(x, y)$ называется полным дифференциалом этой функции в точке $P(x; y)$ и обозначается символом dz.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке $P(x; y)$, то $\Delta z = dz + \gamma$, причем

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y \qquad \text{и} \qquad \lim_{\rho \to \infty} \frac{\gamma}{\rho} = 0\,.$$

Ограничиваясь дифференциалом функции как главной части приращения, получим приближенное равенство $\Delta z \approx dz$, полезное в приближенных вычислениях. В развернутой форме оно будет:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy\,.$$

Для вычисления значения функции в некоторой точке $(x_1; y_1)$ записывают x_1, y_1 в виде суммы $x_1 = x + \Delta x$, $y_1 = y + \Delta y$, стараясь подобрать Δx, Δy возможно меньшими, но так, чтобы в полученной точке (x, y) легко вычислялись значения функции и ее производных.

Пример 14.9. Дана функция $z = 3x^2 + 2xy - 2x$ и две точки $A(2;3)$, $B(1,98;1,04)$. Требуется 1) вычислить значения z_1 в точке B; 2) вычислить приближенное значение z функции в точке B, исходя из значения z_0 функции в точке A, заменяя приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом; 3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение. По условию $A(2;3)$, $B(1,98;1,04)$, следовательно

$$x_0 = 2; \quad y_0 = 3; \qquad x = x_0 + \Delta x = 1{,}98; \qquad \Delta x = -0{,}02;$$

$$y = y_0 + \Delta y = 3{,}04; \qquad \Delta y = 0{,}04.$$

Тогда

1) $z_1(B)=3\cdot(1,98)^3+2\cdot 1,98\cdot 3,04-1,98=31,3656$.

2)
$$z(B)=f(x_0,y_0)+dz(x_0,y_0),$$
$$dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$
$$z(A)=f(2,3)=3\cdot 2^3-2\cdot 2\cdot 3-2\cdot 2=32,$$
$$f'_x(x,y)=9x+2y-2,\qquad f'_x(2,3)=40,$$
$$f'_y(x,y)=2x,\quad f'_y(2,3)=4.$$

Тогда
$$z(B)=f(x_0,y_0)+dz(x_0,y_0)=32+40(-0,02)+4\cdot 0,004=31,36.$$

3).относительная погрешность вычисляется по формуле
$$\delta=\left|\frac{z-z_1}{z}\right|\cdot 100\%=\left|\frac{31,36-31,3656}{31,36}\right|\cdot 100\%\approx 0,014\%.$$

14.5. Свойства дифференцируемой функции. Непрерывность дифференцируемой функции

1. Теорема. Всякая функция $z=f(x,y)$, дифференцируемая в точке P, непрерывна в этой точке.

2.Теорема. Ели функция $z=f(x,y)$ в точке $P(x,y)$ дифференцируема (т.е. имеет дифференциал $dz=A\Delta x+B\Delta y$), то она имеет в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x}=A$, $\frac{\partial z}{\partial y}=B$.

Как и в случае одной переменной, приращение аргумента равно его дифференциалу, т.е. $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, поэтому полный дифференциал имеет вид
$$dz=Adx+Bdy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ или } dz=d_xz+d_yz.$$

Сформулированные теоремы выражают только необходимый признак дифференцируемости функции и ни одна из них не содержит достаточного признака дифференцируемости.

Так, из существования частных производных не всегда следует дифференцируемость функции. Более того, даже наличие в точке производной по любому направлению еще не влечет дифференцируемости функции в этой точке.

Достаточный признак дифференцируемости следует из теоремы.

Теорема. Ели функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P(x, y)$, непрерывные в самой точке $P(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

Все сказанное легко распространяется на функции трех и большего числа переменных. Так, например, для дифференцируемой функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полное приращение выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \omega(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

при условии $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{\omega}{\rho} = 0$ ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), а ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \cdot$$

14.6. Производная сложной функции

Пусть $z = f(u,v)$, причем $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, т.е. z зависит от x и y через посредство двух других функций u и v.

В этом случае функция $z = f(u,v)$ называется сложной функцией переменных x и y. Подставляя u и v в выражение для z, получим непосредственную зависимость z от переменных x и y

$$z = f\left[u(x, y), v(x, y)\right].$$

Теорема. Если функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x; y)$, а функция $z = f(u,v)$ дифференцируема в соответствующей точке $(u; v)$, то сложная функция $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ дифференцируема в точке $(x; y)$, причем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

Эти формулы обобщаются на случай любого числа независимых переменных. В частности, если $u = u(x)$ и $v = v(x)$, то функция

$z = f\left(u(x), v(x)\right)$ будет сложной функцией одной переменной x и ее полная производная по этой переменной будет

$$\frac{dz}{dx} = f'_u \cdot \frac{du}{dx} + f'_v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Если здесь положить $u = x$, т.е. $z = f\left[x, v(x)\right]$, то получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Пример 14.10. $z = u^2 + uv$, $u = y \sin x$, $v = x \cos y$.

Решение. Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2u + v) y \cos x + u \cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2u + v) \sin x - u \sin y \cdot$$

Пример 14..11 Для функции $z = x^2 y - y^2 x$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ найти $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \left(y^2 + 2xy\right) \cdot u \sin v + \left(x^2 + 2xy\right) \cdot u \cos v =$$

$$= u^3 (\sin v + \cos v)(1 - 3 \sin v \cos v).$$

Пример 14.12.Найти $\frac{du}{dx}$ для функции $u = y^2 + yz + z^2$, если $y = \sin x$, $z = -x^2$.

Решение.

$$\frac{du}{dx} = (2y + z) cisx - (y + 2z) \cdot 2x = \sin 2x - x^2 \cos x - 2x \sin x + 4x^3.$$

Пример 14.13. Дана функция $z = f\left(x^3, \cos x^2\right)$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

Решение. $\frac{dz}{dx} = f'_u \cdot 3x^2 - f'_v \cdot \sin x^2 \cdot 2x$, где $u = x^3$, $v = \cos x^2$.

Пример 14.14. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = arctg(xy) - \ln\left(1 + x^2 y^2\right)$, $y = x^n$
.

Решение. $\frac{dz}{dx} = \frac{y(1-2xy)}{1+x^2y^2} + \frac{x(1-2xy)}{1+x^2y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{(1-2xy)}{1+x^2y^2}\left(x^n + nx^n\right) =$

$$= \frac{(n+1)x^n\left(1-2x^{n+1}\right)}{1+x^{2(n+1)}}.$$

14.7. Производная функции, заданной неявно

Будем говорить, что функция $z = z(x, y)$ задана неявно, если она определяется некоторым уравнением вида $F(x, y, z) = 0$, т.е. уравнением, не разрешенным относительно z.

Обе части уравнения $F(x, y, z) = 0$ продифференцируем по переменной x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

В частности, если дана неявная функция одной переменной уравнением $F(x, y) = 0$, то из тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

Откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Пример 14.15. Найти частные производные неявной функции

$$F(x, y, z) = z^2 - 3xyz + 1 = 0.$$

Решение.

$$F'_x = -3yz, \qquad F'_y = -3xz, \qquad F'_z = 3z^2 - 3xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{xy-z^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{xy-z^2}.$$

14.8. Частные производные высших порядков

Если функция $z=f(u,v)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y),$$

то они снова являются функциями переменных x и y, и если эти функции дифференцируемы в точке $(x;y)$, то от каждой из них можно снова находить частные производные по x и y. В результате получим вторые частные производные, которые обозначаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{x^2}=f''_{x^2}(x,y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{y^2}=f''_{y^2}(x,y).$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называются смешанными. Они получаются последовательным дифференцированием функции $f(x,y)$ сначала по x, затем по y или наоборот. Производные второго порядка можно снова дифференцировать, получим частные производные третьего порядка. Их будет уже восемь:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x};\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Пример 14.16. Найти частные производные третьего порядка для функции $z=x^3y^2+xy^3+1$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + y^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y + 3y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 3xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 6xy,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 12xy,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 12xy,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 12xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 6x^2 + 6y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 6x^2 + 6y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = 6x^2 + 6y.$$

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} определены и непрерывны в точке $P(x, y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке вторые смешанные производные равны между собой, т. е.

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Следствие. При непрерывности соответствующих частных производные результат повторного дифференцирования функции двух независимых переменных не зависит от порядка дифференцирования.

Например, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

Пример 14.17. Дана функция $z = 3x^2 - 5x^2y - y^2$. Найти частные производные первого и второго порядка. Убедиться, что смешанные производные равны.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2 - 10xy,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 2y \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 18x - 10y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -10x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -10x.$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.\text{у}$$

Пример 14.18. Проверить, что функция $\omega = x + \frac{x - y}{y - z}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=1$.

Решение. Найдем частные производные функции

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=1+\frac{1}{y-z}\ \ (y,\ z\ \text{- постоянные}),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{(-1)(y-z)-1(x-y)}{(y-z)^2}=\frac{z-x}{(y-z)^2}\ \ (x,z\ \text{- постоянные}),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=-(x-y)\frac{1}{(y-z)^2}(-1)=\frac{x-y}{(y-z)^2}\ \ (x,z\ \text{- постоянные}).$$

Суммируем найденные производные:

$$1+\frac{1}{y-z}+\frac{z-x}{(y-z)^2}+\frac{x-y}{(y-z)^2}=\frac{(y-z)^2+y-z+z-x+x-y}{(y-z)^2}=1,$$

что и требовалось доказать.

14.9. Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом n-ого порядка $d^n z$ функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка, как от функции независимых переменных x и y.

Таким образом, dx и dy рассматриваются при этом как величины, не зависящие от x и y. Поэтому

$$d^2z=d(dz)=\frac{\partial}{\partial x}(dz)dx+\frac{\partial}{\partial y}(dz)dy=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

или, при условии непрерывности смешанных производных:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогично

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

14.10. Экстремум функции двух переменных.

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана в некоторой области *D*.

Точка $P_0(x_0; y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x; y)$ этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (рис. 6).

Точка $P_0(x_0; y_0)$ называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x; y)$ этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство $f(P_0) < f(P)$ (рис. 7).

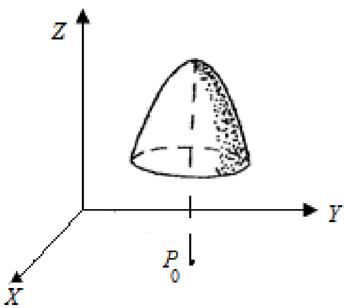

Рис. 6

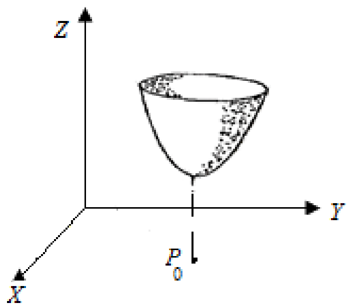

Рис. 7

Как и в случае функции одной переменной, точка максимума (или минимума) не следует смешивать с точкой, в которой функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение в области *D*.

Значение функции z в точке максимума (точке минимума) называют максимумом (минимумом) функции или экстремумом.

Теорема **(необходимый признак существования экстремума)**.

Если $P_0(x_0; y_0)$ есть точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = 0,$$

в предположении, что указанные частные производные существуют в точке

Функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, имеет минимум в точке $O(0;0)$, но в этой точке частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не существуют.

Точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в ноль или не существуют, называются критическими точками этой функции. Из изложенного выше следует, что точка экстремума функции следует искать среди ее критических точек. Однако не всякая критическая точка будет точкой экстремума функции.

Теорема 15. **(достаточный признак существования экстремума)**.

Пусть $P_0(x_0; y_0)$ - критическая точка функции $z = f(x, y)$.

Обозначим $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и составим выражение $\Delta = A \cdot C - B^2$. Тогда,

1) если $\Delta(P_0) > 0$, то $P_0(x_0; y_0)$ – точка экстремума, причем это точка минимума в случае $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ и точка максимума в случае $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$,

2) если $\Delta(P_0) < 0$, то в точке $P_0(x_0; y_0)$ – экстремума нет,

3) если $\Delta(P_0) = 0$, то требуется дополнительные исследования (сомнительный случай).

Пример 14.19. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 18 \cdot$$

Приравнивая эти производные к нулю, после элементарных преобразований получим систему уравнений:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-30=0, \\ 6xy-18=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2xy=6. \end{cases}$$

Из системы уравнений получим:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=16, \\ x^2-2xy+y^2=4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+y)^2=16, \\ (x-y)^2=4, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=\pm 4, \\ x-y=\pm 2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений (равносильную данной), находим четыре критические точки: $P_1(3;1)$, $P_2(1;3)$, $P_3(-1;-3)$, $P_4(-3;-1)$.

Теперь найдем частные производные второго порядка:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x\,,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x\,,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y\,,$$

составим выражение $\Delta = A\cdot B-C^2=36\left(x^2-y^2\right)$. Так как

1. $\Delta\left(P_1\right)=288>0,\quad A\left(P_1\right)=18>0 \ \Rightarrow\ P_1$ – точка минимума;
2. $\Delta\left(P_2\right)=-288<0,\ \Rightarrow$ в точке P_2 экстремума нет;
3. $\Delta\left(P_3\right)=-288<0,\ \Rightarrow$ в точке P_3 экстремума нет;
4. $\Delta\left(P_4\right)=288>0,\quad A\left(P_4\right)=-18<0 \ \Rightarrow\ P_4$ – точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке P_1 – минимум $f\left(P_1\right)=-72$ и в точке P_4 – максимум $f\left(P_4\right)=72$.

14.11. Условный экстремум

Экстремум функции, найденный при условии, что изменения ее аргументов ограничены некоторыми дополнительными уравнениями, называется условным экстремумом.

Уравнения, налагающие ограничения (связи) на аргументы данной функции, называются уравнениями связей. Геометрически это будут уравнения некоторых кривых или поверхностей.

Найти экстремум функции $z=f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y)=0$, означает отыскание экстремальных значений функции $z=f(x,y)$ вдоль кривой $\varphi(x,y)=0$.

Для нахождения экстремума функции двух переменных $z=f(x,y)$

при условии $\varphi(x,y)=0$ в уравнение функции, получим задачу на экстремум для функции одной переменной $z=f(x,y(x))$.

Пример 14.20. Найти экстремум функции $z=x^2+y^2$ при условии $x+y=1$.

Решение. Из уравнения связи находим $y=1-x$. Тогда

$$z=x^2+(1-x)^2=x^2+1-2x+x^2=2x^2-2x+1.$$

$$z'=4x-2,\ z'=0,\ 4x-2=0,\ x=\frac{1}{2}.$$

Так как $z''=4>0$, то $x=\frac{1}{2}$ – точка минимума.

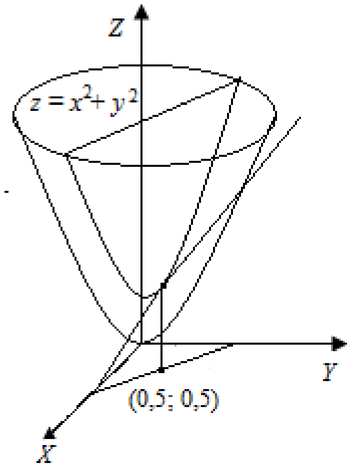

Рис. 8

Тогда $y=1-x=\frac{1}{2}\Rightarrow$ $z_{\min}=x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

Ответ: $z_{\min}=\frac{1}{2}$.

Если уравнение связи не разрешимо ни относительно ни одной из переменных, то для нахождения условного экстремума используют метод множителей Лагранжа.

Решение методом Лагранжа сводится к исследованию функции Лагранжа на обычный экстремум:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Пример 14.21. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны условием $2x + 3y – 5 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + +\lambda(2x + 3y\text{-}5)$$

и найдем частные производные по каждой переменной. Необходимые условия экстремума функции примут вид системы, а стационарная точка будет иметь координаты: $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Проверим достаточные условия экстремума функции. Для этого найдем вторые частные производные и второй дифференциал функции.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(dy)^2 = 2dxdy.$$

Связь между дифференциалами найдем, продифференцировав уравнение связи

$$2dx = -3dy,$$

$$d^2 L = 2dxdy = -2(dy)^2 < 0.$$

Это условие означает, что в стационарной точке $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$ находится минимум. Он равен $z = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}$.

14.12. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области *D* и дифференцируема внутри этой области. Тогда она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе.

Если наибольшее или наименьшее значения функции принимает во внутренних точках области *D*, то эти точки, очевидно, являются точками экстремума функции $z = f(x, y)$.

Таким образом, точки, в которых функция имеет наибольшее или наименьшее значения, являются либо точками экстремума, либо граничными точками области *D*.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

1. Находим критические точки функции $z = f(x, y)$ в области *D* из условий: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Вычисляем значения функции z в этих точках.

2. Находим наибольшее и наименьшее значения функции на границе области *D*.

3. Сравнивая все полученные значения функции z, выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример 14.22. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - x - 5y$ в замкнутом треугольнике $O(0;0)$, $A(5;0)$, $B(0;5)$.

Решение. 1. Найдем критические точки функции внутри области *D*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 5 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 2x + 1 \\ -x + 2(2x + 1) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x + 1 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

Получили критическую точку $P_1(1;3)$ (рис. 9).

Вычислим значения функции $z(P_1) = z(1;3) = -7$.

2. Исследуем функцию на границе области:

I. рассмотрим участок *OA*: $y = 0$, $z(x,0) = x^2 + x$, $0 \le x \le 5$,

$$z'_x = 2x + 1,\ z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \notin [0;5].$$

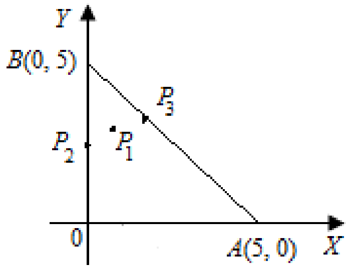

Рис. 9

Тогда наибольшее и наименьшее значения функции может принимать на концах отрезка $x \in [0;5]$.

Вычислим $z(O) = z(0;0) = 0,\ \ z(A) = z(5;0) = 30$.

II. Рассмотрим участок *OB*: $x = 0$, $z(0, y) = y^2 - 5y$, $0 \le y \le 5$,

$$z'_y = 2y - 5,\ z'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2} \in [0;5].$$

Получили точку $P_2(0;2{,}5)$ (рис. 9).

Вычислим значения функции в найденной точке P_2 и на концах отрезка $y \in [0;5]$: $\quad z(P_2) = z(0;0{,}25) = -\frac{25}{4}, z(B) = z(0;5) = 0$.

III. Рассмотрим участок *AB*: $y = 5 - x$,

$$z = x^2 - x(5 - x) + (5 - x)^2 + x - 5(5 - x) = 3x^2 - 9x,$$

$$z'_x = 6x - 9,\ z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \text{ и } y = \frac{7}{2}.$$

Получили точку $P_3(1{,}5;3{,}5) \in D$ (рис. 9).

Вычислим $z(P_3) = z(1{,}5;3{,}5) = -\frac{27}{4}$.

Обобщая полученные результаты имеем:

$$z(P_1) = -7,\ z(P_2) = -\frac{25}{4},\ z(P_3) = -\frac{27}{4}, z(O) = 0,\ \ z(A) = 30,\ z(B) = 0,$$

следовательно $z_{наим} = -7$; $z_{наиб} = 30$.

РАЗДЕЛ IX. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Глава 15. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

15.1. Определение двойного интеграла

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное замкнутой областью *D* плоскости *OXY*, поверхностью $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательная в области *D*, и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси *OZ*, и направляющей – границей области *D*. Область *D* – основание цилиндрического тела. Объем цилиндрического тела можно представить как сумму объемов цилиндрических тел.

Разобьем область *D* на *n* произвольных областей ΔS_i, тогда объем V цилиндрического тела можно представить в виде n элементарных цилиндров v_i, где основание каждого элементарного цилиндра v_i будет ΔS_i и высотой $z_i = f(x_i, y_i)$

$$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \Delta S_1 f(x_1, y_1) + \dots + \Delta S_n f(x_n, y_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i f(x_i,\ y_i).$$

Назовем диаметром *d* замкнутой ограниченной области наибольшее расстояние между точками ее границы. Тогда при увеличении числа разбиений $n \to \infty$ диаметр $d \to 0$

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \qquad (*)$$

Сумма $(*)$ называется интегральной суммой для функции в области *D*.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области *D* называется предел интегральной суммы $(*)$ при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей, при этом пишут

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i f(x_i,\ y_i) = \iint\limits_D f(x, y) dS.$$

Геометрический смысл двойного интеграла – объем цилиндрического тела $\boldsymbol{V = \iint_D f(x,y)dS}$.

15.2. Свойства двойных интегралов

1. $\iint_D \left(f_1(x,y) + f_2(x,y) + \cdots + f_n(x,y)\right)dS =$

$$= \iint\limits_D f_1(x,y)dS + \iint\limits_D f_2(x,y)dS + \ldots \iint\limits_D f_n(x,y)dS.$$

2. $\iint_D Cf_n(x,y)dS = C\iint_D f_n(x,y)dS.$

3. $\iint_D f_n(x,y)dS = \iint_{D_1} f_n(x,y)dS + \iint_{D_2} f_n(x,y)dS,$, где $D = D_1 + D_2$

4. Если любые $x, y \in D$ $g(x, y) \le f(x, y)$, то

$$\iint_D g(x,y)dS \le \iint_D f(x,y)dS.$$

5. Если $m \le f(x,y) \le M$ для любых $x, y \in D$, то

$$.mS \le \iint_D f(x,y)dS \le MS.$$

6. $\iint_D f(x,y)dS = f(\xi,\eta)S$. (Формула среднего значения).

15.3. Вычисление двойного интеграла

Пусть область D заключена внутри прямоугольника

$$a \le x \le b,\ c \le y \le d,$$

стороны которого касаются границы области в точках A, B, C, E.

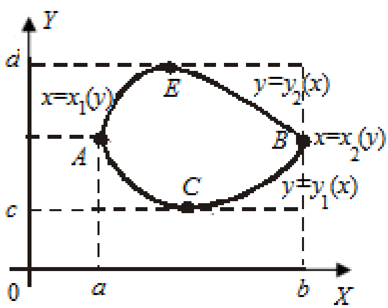

Рис. 10

Пусть $f(x, y)$ задана на области D. Входить в эту область можно вдоль разных осей координат. При входе в область D вдоль оси OY двойной интеграл представляется в виде повторного интеграла с внешним интегрирование по переменной x и внутренним по переменной y:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

При входе в область D вдоль оси OX двойной интеграл представляется в виде повторного интеграла с внешним интегрирование по переменной y и внутренним по переменной x:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Замечание. Пределы интегрирования внешнего интеграла в повторном интеграле всегда являются числами.

Пример 15.1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+2y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

Решение. Изобразим заданную область на рис. 11.

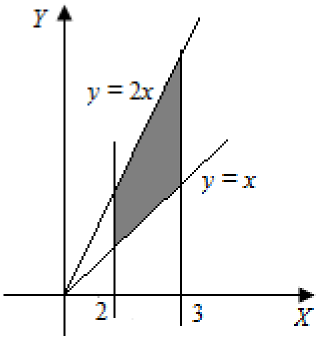

Рис. 11

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)\,dy = \int\limits_2^3 \left((xy+y^2) \Big|_x^{2x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2)dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 \Big|_2^3 = 25\frac{1}{3}$$

Пример 15.1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$$

Решение. Область интегрирования ограничена прямой $y = x$ и параболой $y = \sqrt{x}$ (рис. 12). Будем входить в область вдоль оси *OX*.

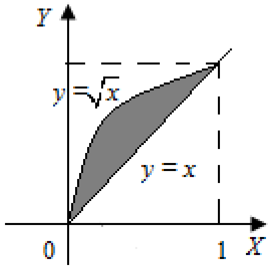

Рис. 12

$$x = x_1(y) = y^2, \; x = x_2(y) = y, \quad 0 \le y \le 1$$

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx$$

15.4. Геометрические приложения двойных интегралов

1. Вычисление площади плоской области

Если $f(x,y)=1$, то двойной интеграл выражает площадь области *D*:

$$S = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \big(y_1(x) - y_2(x)\big)\,dx.$$

Пример 15.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения линий (рис. 13)

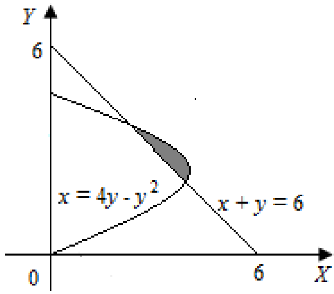

Рис. 13

$$\begin{cases} x = 4y - y^2 \\ x + y = 6 \end{cases}, \quad y^2 - 4y + 6 - y = 0, \quad y^2 - 5y + 6 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}, \quad y_1 = 2, \; y_2 = 3.$$

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 \left(\int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx \right) dy = \int_2^3 \left(x \Bigg|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy =$$

$$= \int\limits_2^3 (-y^2 + 5y - 6)dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}$$

2. Вычисление объемов тел

Объем тел, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ является неотрицательной, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси OZ, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dS .$$

Пример 15.4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x = 0, y = 0, \; x + y + z = 1, \; z = 0$.

Решение. Объем ограниченный данными поверхностями представляет объем тетраэдра.

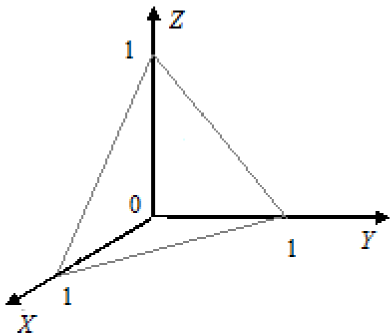

Рис. 14

Объем этого тетраэдра вычислим по формуле

$$V = \iint_D (1 - x - y)dydx,$$

где D – треугольная область в плоскости OXY, ограниченная прямыми $x = 0, y = 0, x + y + z = 1$.

Расставим пределы интегрирования и вычислим объем:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)dydx = \int_0^1 [(1-x)y - \frac{y^2}{2}]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

Замечание. Если тело, объем которого ищется, ограничено сверху поверхностью $z = z_1(x, y)$, а снизу – поверхностью $z = z_2(x, y)$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость OXY является область D, то объем этого тела равен разности объемов двух цилиндрических тел; первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область D, а верхним – поверхность $z = z_2(x, y)$; второе тело имеет нижним основанием также область D, а верхним – поверхность $z = z_1(x, y)$. Поэтому объем V равен разности двух двойных интегралов:

$$V = \iint_D z_2(x, y)dS - \iint_D z_1(x, y)dS.$$

Раздел X. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава 16. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

16.1. Вариационные ряды и их графическое изображение

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, подлежащих изучению. Объем генеральной совокупности обозначается N.

Выборочной совокупностью, или выборкой называется совокупность объектов случайно отобранных из генеральной совокупности. Объемом выборки n называется число ее объектов.

Выборка бывает повторной (с возвращением исследуемого объекта в генеральную совокупность) и бесповторной, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Выборка должна быть репрезентативной (представительной), т. е. она должна правильно отображать все свойства и характеристики объектов генеральной совокупности.

Пусть в результате независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, из генеральной совокупности данных, выбраны числовые значения $x_1, x_2, \ldots x_n$, характеризующие некоторый признак (здесь n – объем выборки). Последовательность наблюдаемых значений x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, записанных в возрастающем порядке, называется дискретным вариационным рядом, а элементы этой последовательности x_i называют вариантами. Если среди вариант есть равные значения, тогда дискретный вариационный ряд записывают в виде табл. 1.

Таблица 1

Значения x	x_1	x_2	…	x_k
Частоты	n_1	n_2	…	n_k

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – частоты (количества повторений) значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$; при этом должно выполняться условие

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Полигоном частот называют ломаную, составленную из отрезков, которые соединяют точки (x_1, n_1), $(x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$; здесь x_i – варианты, n_i – частоты (рис. 15).

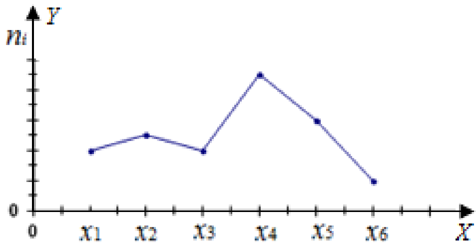

Рис. 15

Интервальный вариационный ряд – это ряд, в котором значения признака могут меняться непрерывно или число значений признака велико. Для построения такого ряда промежуток изменения признака разбивается на ряд отдельных интервалов и подсчитывается количество значений величины в каждом из них. Если все интервалы имеют одинаковую длину, то число интервалов в случае нормально распределенной совокупности рекомендуется находить по формуле Стерджесса

$$k = 1 + 3{,}322\,\lg(n);$$

обычно, $6 \le k \le 12$.

Длина частичного интервала определяется по формуле

$$h = (x_{max} - x_{min})/k;$$

величина $(x_{max} - x_{min})$, называется размахом вариации. Это разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура (рис. 16), состоящая из прямоугольников с основаниями $h_i = (x_{i-1};\, x_i)$ и высотами n_i / h_i. Если интервалы имеют одинаковую длину, то прямоугольники имеют одно и тоже основание h; их высоты равны n_i / h.

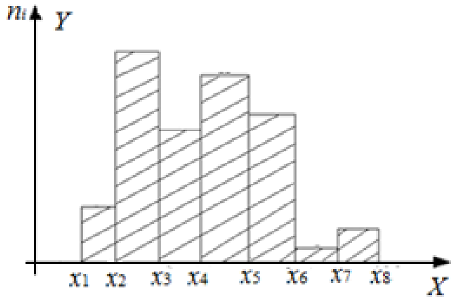

Рис. 16

Кумулятивная кривая – кривая накопительных частот. Для дискретного ряда кумулята представляет ломаную, соединяющие точки $(x_i, n_i^{нак})$ (рис. 17). Для интервального ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте, равной нулю.

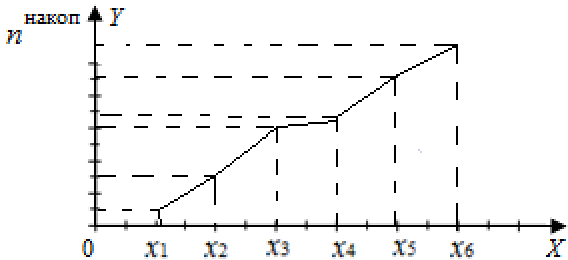

Рис. 17

Эмпирической функцией распределения, или функцией распределения выборки, называется функция, определяющая для каждого значения X относительную частоту события $X < x$. Обозначим функцию распределения через $F^*(x)$; если n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки, то по определению

$$F^*(x) = n_x / n.$$

Свойства функции $F^*(x)$:

1) значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку [0; 1];

2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;

3) если x_{min} – наименьшая, x_{max} – наибольшая варианта, то

$$F^*(x) = 0,\ \text{при } x < x_{min};\quad F^*(x) = 1,\ \text{при } x \geq x_{max}.$$

Выборочную функцию распределения можно задать аналитически,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0,\ \text{если } x \leq x_1, \\ p_1,\ \text{если } x_1 < x \leq x_2, \\ p_2,\ \text{если } x_2 < x \leq x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_n,\ \text{если } x_{n-2} < x \leq x_{n-1}, \\ 1,\ \text{если } x_{n-1} > x_n. \end{cases}$$

таблично (табл. 2)

Таблица 2

Варианты x_i	x_i	x_i	x_i	x_i
Частоты n_i	n_i	n_i	n_i	n_i

или графически для дискретных – рис. 18, для непрерывных – рис. 19.

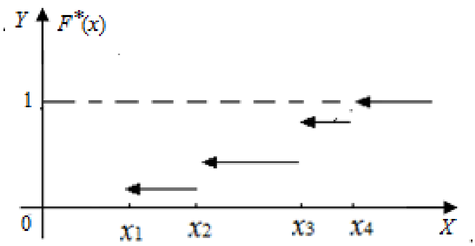

Рис. 18

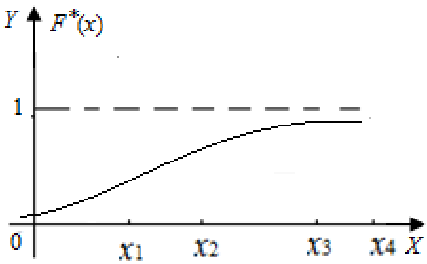

Рис. 19

16.2. Оценки параметров вариационного ряда

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются статистическими. Оценку параметра θ обозначим через $\tilde{\theta}$, статистическая оценка является случай-ной величиной и зависит от $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е.

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}\,(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Оценки параметров распределения обладают разными характериститками. Оценка параметра $\tilde{\theta}$ называется несмещенной, если математическое ожидание $\tilde{\theta}$ равно θ, т.е.

$$M(\tilde{\theta}) = \theta$$

и смещенной, если

$$M(\tilde{\theta}) \neq \theta.$$

Оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ называется состоятельной, если при любом

$$\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\tilde{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Оценка $\tilde{\theta}$ называется эффективной, если при заданном n она имеет наименьшую дисперсию, т.е. $D(\tilde{\theta}) = D_{min}$.

Оценка $\tilde{\theta}$ имеет практическую ценность, если она является несмещенной, состоятельной и эффективной.

Если статистическая оценка характеризуется одним числом, она называется точечной. К числу таких оценок относятся выборочная средняя и выборочная дисперсия.

16.3. Числовые характеристики

1. Выборочной средней $x_в$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности. Если все значения x_1, $x_2, \dots, x_n$ различны, то

$$x_В = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Если значения $x_1, x_2, \dots, x_k$, имеют соответственно частоты n_1, n_2, $\dots, n_k$, $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$, то

$$x_{\text{в}} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_k \cdot x_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (n_i \cdot x_i) .$$

Выборочную среднюю иногда обозначают так: $x_{\text{в}} = \overline{X}$.

Величину $x_{\text{в}} = \overline{X}$ принимают в качестве оценки генеральной средней. Можно показать, что эта оценка является несмещенной и состоятельной.

2. Выборочной дисперсией $D_{\text{в}}$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений выборки от их среднего значения $x_{\text{в}}$.

Если все значения x_1, x_2, … , x_n признака выборки объема n различны, то

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{\text{в}}\right)^2$$

Если среди значений выборки есть равные числа, но сами значения $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ различные числа, повторяющиеся с частотами $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - x_{\text{в}}\right)^2 .$$

Для вычисления выборочной дисперсии можно также пользоваться формулой

$$D_{\text{в}} = \left(x^2\right)_{\text{в}} - \left(x_{\text{в}}\right)^2 .$$

Выборочная дисперсия оценивает дисперсию генеральной совокупности и является смещенной оценкой. Чтобы получить несмещенную оценку генеральной дисперсии выборочную дисперсию умножают на величину $\dfrac{n}{n-1}$ и получают так называемую эмпирическую (или «исправленную») дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}} ;$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - x_{\text{в}}\right)^2 .$$

При $n \geq 50$ практически нет разницы между оценками $D_{\text{в}}$ и S^2 . Эти оценки являются состоятельными оценками генеральной дисперсии.

3. Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{В}}$ определяется формулой $\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}}$.

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности служит «исправленное» среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - x_{\text{В}}\right)^2}.$$

4) Медианой $\tilde{M}_e$ вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на середину ранжированного ряда наблюдений.

Для дискретного вариационного ряда с нечетным числом членов медиана равна серединному варианту, а для ряда с четным числом членов – полу сумме двух серединных вариаций.

$$\tilde{M}_e = \frac{x_{2n} + x_{2n+2}}{2}.$$

5) Модой $\tilde{M}_0$ вариационного ряда называется вариант, которому соответствует наибольшая частота.

Пример. 16.1. Дано распределение признака X – тарифный разряд рабочих механического цеха: 4, 1, 3, 5, 5, 6, 5, 2, 6, 3, 4, 5, 5, 1, 4, 5, 6, 5, 4, 2, 5, 3, 5, 6, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 5, 5, 5, 3, 6, 4, 5, 5, 6, 5, 4, 3, 5, 6, 5, 4, 5, 5, 6, 5. Составить вариационный ряд, построить полигон и кумуляту. Найти числовые характеристики.

Решение. Всего объем выборки равен 50. Случайная величина X – тарифный разряд рабочих механического цеха может принимать значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Посчитаем количество этих значений и составим табл. 3.

Таблица 3

Тарифный разряд x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Частота (кол-во рабочих) n_i	2	3	6	8	22	9	50
Накопительная частота	2	5	11	19	41	50	

На рис 20 показан полигон данного распределения. Используя накопленные частоты распределения, построим кумуляту (рис 21).

Найдем числовые характеристики вариационного ряда.

$$\tilde{X} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 6 + 4\cdot 8 + 5\cdot 22 + 6\cdot 9}{50} = \frac{225}{50} = 4{,}5$$

$$\tilde{M}_0 = 5 \quad \tilde{M}_e = \frac{6+8}{2} = 7.$$

$$S^2 = \frac{(1-4{,}5)^2 2 + (2-4{,}5)^2 3 + (3-4{,}5)^2 6 + (4-4.5)^2 8 + (5-4.5)^2 22 + (6-4{,}5)^2 9}{50} =$$

$$= \frac{(-35)^2 2 + (-2{,}5)^2 3 + (-1{,}5)^2 6 + (-0{,}5)^2 8 + (0{,}5)^2 22 + (1{,}5)^2 9}{50} =$$

$$= \frac{(12{,}25\cdot 2) + (6{,}25\cdot 3) + (2{,}25\cdot 6) + (0{,}25\cdot 8) + (0{,}25\cdot 22) + (2{,}25\cdot 9)}{50} =$$

$$= \frac{25 + 18{,}75 + 13{,}5 + 2 + 5{,}5 + 20{,}25}{50} = \frac{85}{50} = 1{,}7$$

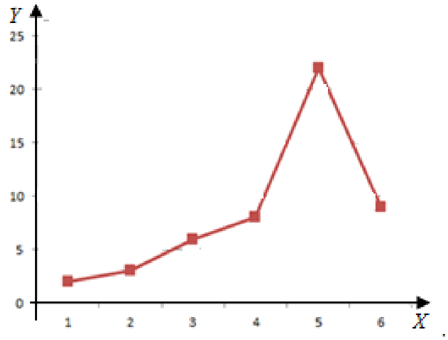

Рис. 20

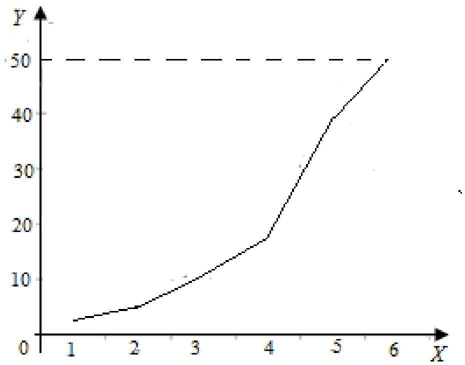

Рис. 21

16.4. Определение параметров выборочного уравнения линейной регрессии по несгруппированным данным

Пусть в результате n независимых испытаний получены n пар независимых чисел $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, …, $(x_n;\ y_n)$. Заметим, что вид зависимости $y = f(x)$ предполагается заранее известным или из теоретических соображений, или в результате анализа расположения точек $(x_i;\ y_i)$ на координатной плоскости.

Будем искать линейное выборочное уравнение регрессии Y на X в виде

$$\bar{y}_x = ax + b\,.$$

По выборочным данным можно получить только приближенные значения (оценки) параметров a и b.

Подставим в формулу $y = ax + b$ значения величины $x = x_i$, получим «теоретические» результаты

$$y_i^{\mathrm{T}} = ax_i + b\,,\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты a и b найдем методом наименьших квадратов из предположения, что опытные и теоретические результаты мало отличаются между собой. В методе наименьших квадратов условие близости опытных и теоретических данных записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_i^T\right)^2 = \min,$$

или, более подробно

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - ax_i - b\right)^2 = \min.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varPhi(a,\ b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - ax_i - b\right)^2.$$

Эта функция достигает минимума при тех значениях a и b, при которых обращаются в нуль частные производные

$$\frac{\partial \varPhi}{\partial a} = 0\,,\ \frac{\partial \varPhi}{\partial b} = 0\,.$$

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем эту систему уравнений и запишем ее в виде

$$\begin{cases} a\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля и, значит, решение всегда существует и единственно. Решив эту систему, получим значение параметров a и b и можем записать выборочное уравнение линейной регрессии Y на X

$$\bar{y}_x = ax + b .$$

Пример 16.2. В результате некоторых испытаний получены значения (x_i; y_i), которые представлены в табл. 4

Таблица 4

x_i	3	5	6	9	10
y_i	2	5	9	16	14

Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X.

Решение. Результаты вычислений записаны в табл. 5.

Таблица 5

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	3	2	9	6
2	5	5	25	25
3	6	9	36	54
4	9	16	81	144
5	10	14	100	140
Σ	33	46	251	369

Таким образом, для нахождения коэффициентов a и b уравнения $\bar{y}_x = ax + b$ необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 251a + 33b = 369 \\ 33a + 5b = 46 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим a = 1,97; b = -3,80.

Уравнение регрессии $\bar{y}_x = 1{,}97 - 3{,}80 \cdot x$.

ВОПРОСЫ К ЗЧЕТУ

1. Определение функции нескольких переменных. Область определения.
2. Предел функции нескольких переменных.
3. Основные свойства непрерывных функции нескольких переменных.
4. Частные производные функции нескольких переменных.
5. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
6. Необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
7. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
8. Производные сложных функций нескольких переменных.
9. Производные неявных функций нескольких переменных.
10. Дифференциал функции нескольких переменных.
11. Применение дифференциала функции нескольких переменных для приближенных вычислений.
12. Дифференциалы и производные высших порядков функции нескольких переменных.
13. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
14. Градиент функции нескольких переменных.
15. Производная функции нескольких переменных по направлению вектора l .
16. Необходимое условие локального экстремума функции нескольких переменных.
17. Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.
18. Вычисление экстремума функции нескольких переменных.
19. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в области.
20. Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод Лагранжа.

21. Дифференциальные уравнения. Общие понятия. Линии уровня.
22. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
23. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод постановки.
24. Уравнения Бернулли.
25. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
26. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка.
27. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение.
28. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.
29. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
30. Что такое интегральная сумма?
31. Дать определение двойного интеграла.
32. Привести свойства двойного интеграла.
33. Каков геометрический смысл двойного интеграла?
35. Каков геометрический смысл двойного интеграла, если $f(x,y)=1$
36. Измениться ли результат при вычислении двойного интеграла, если изменить порядок интегрирования?
37. Сформулировать достаточные условия интегрируемости двойного интеграла.
38. Генеральная совокупность и выборка.
39. Эмпирическая функция распределения.
40. Полигон и гистограмма. Кумулята.
41. Точечные оценки параметров распределения.
42. Числовые характеристики вариационного ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атурин, В. В.* Высшая математика. Задачи с решениями для студентов экономических специальностей: учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / В. В. Атурин, В. В. Годин. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 304 с.

2. *Кремер Н. Ш.* и др. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для ВУЗов. – М., 1997. – 530 с.

3. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статис-тика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2004. – 543с.

4. Практикум по высшей математике для экономистов: учебное пособие для вузов / Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др.; под ред. Проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТА-ДАНА, 2005. – 423 с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. Д. ф. – м. н. А. П. Рябушко. – Минск, Изд-во Вышэйшая школа, в трех частях, Ч. 1, 1990. – 270 с.

6. Математический анализ. Ч.1: учебное пособие / Редькин Г. М., Горлов А. С., Красюкова Е. И. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2019. – 128 с.

7. Математика.Ч.1: учебное пособие / Никифоров В. М. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. – 333 с.

Содержание

Учебное издание

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Составители**: Окунева** Галина Леонидовна
Польшина Лидия Борисовна
Овчарова Наталья Васильевна

Подписано в печать 25.05.22. Формат 60х84/16. Усл. печ. л.. Уч.-изд. л..
Тираж 60 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46