МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. РЯДЫ.

Учебное пособие

Белгород
2021

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. РЯДЫ.

Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов очной формы обучения всех специальностей

Белгород
2021

УДК 519.8(07)
ББК 22.1 я7
А64

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технического университета им. В. Г. Шухова *А. С. Горлов*

А64 Дифференциальное и интегральное исчисление. Ряды.: учебное пособие / Г. Л. Окунева, Л. Б. Польшина, Н. В. Овчарова. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2021. – 92 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и охватывает основные разделы дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, тем «Ряды» и «Комплексные числа». Помимо теоретического материала пособие содержит примеры решения задач, контрольные работы по разделу, вопросы к зачету. Пособие может использоваться для самостоятельного изучения лекционного курса и выполнения практических заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения экономических специальностей.

Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 519.08(07)
ББК 22.1 я7

ВВЕДЕНИЕ

Вниманию студентов заочной формы обучения специальности «Экономика» предлагается данное пособие с изложением основных тем по дисциплине «Математика» за второй семестр обучения: дифференциальное и интегральное исчисление, применение производных и определенных интегралов, ряды и их применение, комплексные числа.

В пособии приведено много примеров, которые иллюстрируют изучаемый материал.

В начале пособия студентам предлагаются варианты второй контрольной работы. Номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки.

Контрольную работу следует оформить в обычной тетради или на листах формата $A4$ и сдать преподавателю. После проверки на осенней сессии состоится собеседование студента с преподавателем по работе.

В результате собеседования, ответов на предлагаемые вопросы и решения стандартных задач по темам второго семестра студент получает оценку.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1. Найти производные следующих функций

1.1. а) $y = 2^{\cos 2x} + arctg 3x^2$

б) $y = (3x^2+4)^4 \arccos x^3$

в) $y = \dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^2}$

г) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

1.2. а) $y = arctg x^3 - e^{tg x^2}$

б) $y = \sqrt[5]{2x+1} \cdot \sin^2(3-4x)$

в) $y = \dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x+2)^2}$

г) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

1.3. а) $y = \ln(3x^2+5) + 5^{\sin 5x}$

б) $y = tg^3 2x \cdot e^{x^2}$

в) $y = \dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$

г) $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t) \\ y = 3(\cos t + t\sin t) \end{cases}$

1.4. а) $y = arcctg x^5 + 4^{ctg x^3}$

б) $y = \arcsin^2 2x \cdot \ln(3x+2)$

в) $y = \dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$

г) $\begin{cases} e^{-3t} \sin 3t \\ y = e^{3t} \cos 3t \end{cases}$

1.5. а) $y = \ln(5x^2-4) + 4^{\cos 5x}$

б) $y = \sin^2 3x \cdot ar\cos 5x$

в) $y = \dfrac{e^{-ctg 5x}}{(3x^2-4x+2)^2}$

г) $\begin{cases} x = e^{-4t} \sin 4t \\ y = e^{4t} \cos 4t \end{cases}$

1.6. а) $y = arctg \dfrac{x^2}{2} + 2^{ctg 5x}$

б) $y = \cos^3 2x \cdot \ln(5x^2+4)$

в) $y = \dfrac{e^{-tg 6x}}{(2x^2+3x+1)^2}$

г) $\begin{cases} x = e^{-5t} \sin 5t \\ y = e^{5t} \cos 5t \end{cases}$

1.7. а) $y = \arcsin 2x + 5^{3x^2+4}$

б) $y = \cos^2 3x \cdot arctg 2x^2$

в) $y = \dfrac{e^{\sin 2x}}{(3x^2+4)^2}$

г) $\begin{cases} x = e^{-6t} \sin 6t \\ y = e^{6t} \cos 6t \end{cases}$

1.8. а) $y = artg \dfrac{x}{3} + 4^{\cos tx}$

б) $y = tg^2 3x \cdot e^{5x^3+4}$

в) $y = \dfrac{e^{\sin 2x^2}}{(4x+5)^2}$

г) $\begin{cases} x = \cos^2 3t \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$

1.9. а) $\arccos 3x^2 + 2^{ctg 5x^2}$

б) $y = \sin^3 3x \cdot arctg 4x^2$

в) $y = \dfrac{e^{tg 2x}}{(4x^2+5)^3}$

г) $\begin{cases} x = \cos^3 3t \\ y = 4\sin^3 3t \end{cases}$

1.10. а) $y = \arcsin 7x^2 + 3^{tg 5x}$

б) $y = \cos^3 2x \cdot arctg 3x^2$

в) $y = \dfrac{e^{ctg 3x^2}}{(5x^3+4)^2}$

г) $\begin{cases} x = e^{-4t} \sin 4t \\ y = e^{4t} \cos 4t \end{cases}$

2. Найти производную $n-$го порядка

2.1. $y = \dfrac{1}{3x-2}$

2.2. $y = \dfrac{1}{7x-5}$

2.3. $y = \dfrac{1}{3-3x}$

2.4. $y = \dfrac{1}{5-5x}$

2.5. $y = \dfrac{1}{4x-3}$

2.6. $y = \dfrac{1}{3-4x}$

2.7. $y = \dfrac{1}{6x-3}$

2.8. $y = \dfrac{1}{3-6x}$

2.9. $y = \dfrac{1}{8x-3}$

2.10. $y = \dfrac{1}{3-8x}$

3. Составить уравнения касательных к графику функции и сделать чертеж

3.1. $y = \sqrt{2x-5}$, проходящих через точку $M_0(-1;-3)$

3.2. $y = \dfrac{3x+5}{x+4}$ в точке $x_0 = -3$

3.3. $y = \dfrac{x-3}{x+5}$, в точках ее пересечения с прямой $y+2x+3=0$

3.4. $y = e^{2x-4}$, параллельной прямой $y = +2x-1$

3.5. $y = 4+\ln(3-x)$, перпендикулярной прямой $2y-2x+3=0$

3.6. $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ в точке $x_0 = -1$

3.7. $y = \dfrac{x+2}{x+4}$, параллельных прямой $y = 3x-2$

3.8. $y = \dfrac{2-x}{2x-1}$, проходящих через точку $M_0(2;-2)$

3.9. $y=\dfrac{x+3}{x+5}$, параллельных прямой $y+x+7=0$

3.10. $y=\dfrac{x+3}{x+5}$, параллельных прямой $y+x+7=0$

4. Найти производную неявной функции:

4.1. $\sqrt[3]{xy}-\ln(x+y)=0$, 4.2. $3y^2-e^x\cos y+5x^3=0$,

4.3. $5x^2y^2-\sin(xy)=0$, 4.4 $2^{xy}-e^{x+y}-x^2y^3=0$,

4.5 $(y^2+x)\sin xy=0$, 4.6. $3^{xy}-\ln(y+x)=2$,

4.7. $xy=e^x-\cos(x+3y)$, 4.8. $ctgx+\ln\sqrt{4y+1}=0$,

4.9. $2xy-\sin^2(x+2y)-y^2=0$, 4.10. $y=x^y\sin(xy)$.

5. Используя логарифмическую производную, найти производную функции:

5.1. а) $y=\left(\sin tg\dfrac{x}{2}\right)^{2x}$; б) $y=\sqrt{5x-x^3}\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{(x+2)^2}}$.

5.2. а) $y=\sqrt[5]{x^4\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\cdot(x+1)}$; б) $y=(\sin(x-1))^{tgx}$.

5.3. а) $y=\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^{\sin x}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^5}x}$.

5.4. а) $y=(x^2-1)^{tg(x-1)}$; б) $y=\sqrt[3]{(x+3)^5}\sqrt[7]{(x-1)^9}(x-8)^{-5}$.

5.5. а) $y=[\ln(x-2)]^{\sin x}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{(x-3)^5}{x+1}}\cdot(2x+3)$.

5.6. а) $y=\left(2^{\cos x}x\right)^{tg\sqrt{x}}$;   б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-25}{\cos x\left(x-6\right)^3}}$.

5.7. а) $y=\left(ctgx\right)^{\arcsin x}$;   б) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2\left(x+4\right)^5}}$.

5.8. а) $y=\left(ctgx\right)^{\sin^2 x}$;   б) $y=\dfrac{\left(x-1\right)^3\left(x+2x^2\right)^{10}}{\left(x-5\right)^6}$.

5.9. а) $y=\left(tgx\right)^{\sqrt{x^2+3x-1}}$;   б) $y=\sqrt{2x+x^5}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{\left(x-1\right)^3}{x+3}}$.

5.10. а) $y=\left(\log_3 \sin x\right)^x$;   б) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{\left(x+2\right)^3}}\cdot\sqrt[6]{x^7\left(x+4\right)^8}$.

6. Функция спроса $q=q(p)$ предложения $S=S(p)$, где q и S – количество товара, соответственного покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена единицы товара. Найти эластичность спроса и предложения.

6.1. $q=\dfrac{9p+21}{p+3}, S=p+5$ 6.2. $q=\dfrac{12p+34}{p+4}, S=p+7$

6.3. $q=\dfrac{p+10}{p+1}, S=p-6$ 6.4. $q=\dfrac{8p-1}{p+4}, S=p-2$

6.5. $q=\dfrac{12p-15}{p+5}, S=3p-4$ 6.6. $q=\dfrac{8p}{p+5}, S=2p-3$

6.7. $q=\dfrac{13p-12}{p+6}, S=2p-3$ 6.8. $q=\dfrac{2p+4}{p-3}, S=3p-4$

6.9. $q=\dfrac{p+6}{p-2}, S=2p-7$ 6.10. $q=\dfrac{3p+5}{p-4}, S=p-5$

7. Исследовать функцию и построить график

7.1 а) $y=(x-6)e^{\frac{1}{x}}$

б) $y=x^2(x-1)$

7.2 а) $y=x^2e^{x^2}$;

б) $y=x^3+4x^2-x+1$

7.3 а) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$;

б) $y=(x-4)(x^2-9)$.

7.4 а) $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3}$;

б) $y=x^2(x+4)$.

7.5 а) $y=x\ln x^2$;

б) $y=(x+2)^2x$.

7.6 а) $y=x^2\ln^2 x$;

б) $y=(x-2)(x+3)(x-1)$

7.7 а) $y=\cos x\cos 2x$;

б) $y=x^2(x+5)$.

7.8 а) $y=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-2}$;

б) $y=(x-1)e^x$.

7.9 а) $y=x^3-x+3$;

б) $y=2x+4arctgx$.

7.10 а) $y=(x-1)\sqrt{x}$;

б) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

8. Найти неопределенные интегралы

8.1. а) $\int\dfrac{x}{2x^2-7}dx$

б) $\int(5x+6)\cos 2xdx$

8.2. а) $\int\dfrac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$

б) $\int xe^{5x}dx$

8.3. а) $\int\dfrac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}$

б) $\int(3x-2)\cos 5xdx$

8.4. а) $\int\dfrac{4x}{5x^2-3}dx$

б) $\int(5x-2)e^{3x}dx$

8.5. а) $\int\dfrac{3x^2}{2-5x^3}dx$

б) $\int(2x-1)\cos xdx$

8.6. а) $\int\dfrac{2x}{\sqrt{3-4x^2}}dx$

б) $\int(3x-2)\cos xdx$

8.7. а) $\int x\sqrt{4-5x^2}dx$

б) $\int 2xe^{5x}dx$

8.8. а) $\int x^2\sqrt{3-4x^3}dx$

б) $\int(1-x)e^{6x}dx$

8.9. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-2x^3}}dx$

б) $\int (1-2x)\cos 5x dx$

8.10. а) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2-5}}dx$

б) $\int x \cdot \cos 3x dx$

9. Вычислить определенные интегралы

9.1. $\int\limits_0^1 \frac{x^2-x+1}{x^2+1}dx$

9.2. $\int\limits_0^1 (2-x)e^{-x}dx$

9.3. $\int\limits_{-1/2}^0 \frac{2x-8}{\sqrt{1-x^2-x}}dx$

9.4. $\int\limits_6^9 \frac{dx}{x^2-7x+10}$

9.5. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx$

9.6. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

9.7. $\int\limits_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$

9.8. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} arctgx dx$

9.9. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$

9.10. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$

10. Найти сумму ряда

10.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2+4n+3}$

10.2. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}$

10.3. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2-4n+3}$

10.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2+6n+8}$

10.5. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2-5n+4}$

10.6. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2-11n+28}$

10.7. $\sum\limits_{m=9}^{\infty} \frac{54}{n^2-11n+28}$

10.8. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2-7n+10}$

10.9. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$

10.10. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2-7n+10}$

11. Вычислить приближенно с точностью $\delta = 0{,}001$

11.1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

11.2. $10\sqrt{1027}$

11.3. $\int\limits_0^{0.2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

11.4. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{1+x^4}$

11.5. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{\cos x}{x}dx$

11.6. $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$

11.7. $\int\limits_0^{1} \dfrac{\sin x}{x}dx$

11.8. $\int\limits_0^{0,5} \cos\dfrac{x^2}{4}dx$

11.9. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \dfrac{e^{-x}}{x^3}dx$

11.10. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{arctgx}{x}dx$

12. Определить сходимость ряда.

12.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

12.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$

12.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{8n-1}\right)^n$

12.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$

12.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

12.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

12.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$

12.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^3}$

12.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$

12.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{5^n}$

13. Решить уравнение.

13.1 $y^2+4y+5=0$

13.2 $y^2+4y+7=0$

13.3 $y^2-3y+5=0$

13.4 $y^2+2y+9=0$

13.5 $2y^2+y+1=0$

13.6 $3y^2-4y+2=0$

13.7 $y^2-7y+9=0$

13.8 $y^2+2y+5=0$

13.9 $5y^2+9y+7=0$

13.10 $4y^2+y+3=0$

Раздел III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ

7.1. Производная функции. Геометрический смысл производной функции в точке

Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b). Тогда тангенс угла наклона секущей MP к графику функции равен (рис. 1):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha,$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

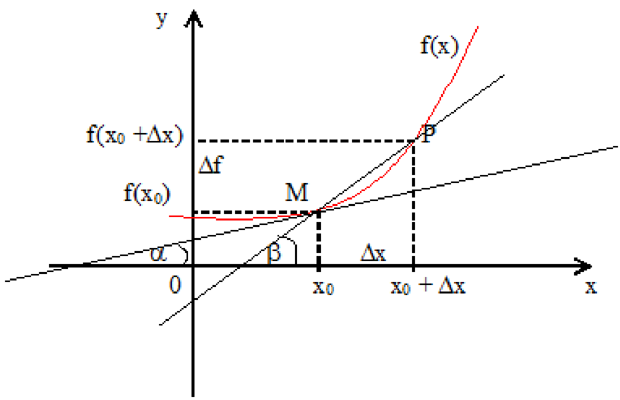

Рис. 1

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает, как изменяется функция при изменении переменной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

7.2. Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в некоторой точке x. Справедливы следующие правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u{\cdot}v)' = u{\cdot}v' + u'{\cdot}v$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Пример 7.1. Найти производную функции

$$y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

Решение. Сначала преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример 7.2. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

Решение.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 7.3. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 7.4. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\frac{2x^4}{1-x^8}$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

Пример 7.5. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$.

Решение.

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2}\,\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2}\,2x\right)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} = xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2\ln x).$$

7.3. Производная сложной и обратной функций

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}.$

Тогда $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$, т.к. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}; \left(\ln(-x)\right)' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется логарифмической производной функции $f(x)$.

Способ логарифмического дифференцирования состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание, и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x) > 0$.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u,$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u},$$

$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right),$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Пример 7.6. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

Решение. По полученной выше формуле получаем:

$$u = x^2 + 3x;\ v = x\cos x.$$

Производные этих функций: $u' = 2x + 3; v' = \cos x - x\sin x.$

Окончательно: $f'(x) =$

$$= x\cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x).$$

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x:

$$1 = g'(y)y',$$

т.к. $g'(y) \neq 0$

$$y' = \frac{1}{g'(y)},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

т. е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример 7.7. Найти формулу для производной функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является функцией, обратной функции $y = \operatorname{tg} x$, т. е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = \operatorname{tg} x;\ x = \operatorname{arctg} y.$$

Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(\operatorname{arctg} y)/dx};\ \frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}.$$

Так как $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$, то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Таким образом, получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

7.4. Производная неявных и параметрических функций

Пусть функция задана параметрически, т. е. задана системой уравнений вида:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

Находим производные:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi'(t). \end{cases}$$

Теперь можно найти производную $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пример 7.8. Найти производную функции $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Применим параметрическое задание данной кривой:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\mathrm{tg}t};$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t;\ \ \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2};$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2 t \Rightarrow \mathrm{tg}^2 t = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2};\ \mathrm{tg}t = \pm\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Если из заданного соотношения нельзя выразить переменную y как функцию от x, то говорят, что функция задана неявно. Например, $y^3\cos(x^2 + y^2) = \mathrm{tg}(2x - 3y)$. Чтобы вычислить производную функции $y(x)$, к y относимся как к сложной функции, домножая полученную производную на y'.

Пример 7.9. Найти производную функции

$$\cos(2x + 3y^2) - e^{xy} - x^2 + 5 = 0.$$

Решение.

$$\sin(2x + 3y^2)(2 + 6y \cdot y') - e^{xy}(y + xy') - 2x = 0;$$

$$2\sin(2x+3y^2)+6y\cdot y'\sin(2x+3y^2)-e^{xy}y-xy'e^{xy}-2x=0;$$
$$y'(6y\cdot\sin(2x+3y^2)-xe^{xy})=e^{xy}y-2\sin(2x+3y^2)+2x;$$
$$y'=\frac{e^{xy}y-2\sin(2x+3y^2)+2x}{6y\cdot\sin(2x+3y^2)-xe^{xy}}.$$

7.5. Производные основных элементарных функций. Понятие о производных высших порядков

Составим табл. 1 производных основных элементарных функций.

Таблица 1

1	$C'=0$;	9	$(\sin x)'=\cos x$;
2	$(x^m)'=mx^{m-1}$;	10	$(\cos x)'=-\sin x$;
3	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;	11	$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;
4	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$;	12	$(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;
5	$(e^x)'=e^x$;	13	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
6	$(a^x)'=a^x\ln a$;	14	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
7	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;	15	$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$;
8	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;	16	$(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y'=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

Если найти производную функции от производной первого порядка $f'(x)$, получим вторую производную функции $f(x)$

$$y'' = f''(x) = (f'(x))' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Производные порядка n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

7.6. Дифференциал функции и его применение

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$ – главная часть приращения Δy.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала найдем из ΔMKL(рис. 2):

$$KL = dy = \text{tg}\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$$

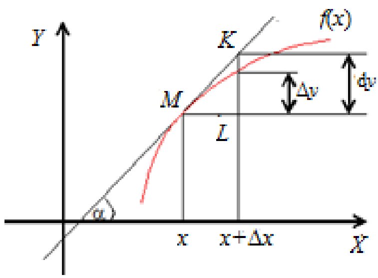

Рис. 2

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Дифференциал функции можно использоваться в приближенных вычислениях

$$f(x) - f(x_0) = f(x - x_0) + \alpha(x - x_0),$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$.

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f(x_0)(x - x_0).$$

Пример 7.10. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{131}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{131} = \sqrt[3]{5^3 + 6} \approx 5 + \frac{6}{3 \cdot 5^2} = 5{,}08 \cdot$$

7.7. Использование понятия производной в экономике

1. **Предельная производительность труда.** Если $g = g(t)$ – количество производственной продукции g за время t, то период Δt количество производственной продукции составляет

$$\Delta g = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0),$$

тогда $g' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta t}$, есть производительность труда в момент t_0.

2. **Предельные затраты (издержки) производства**. Если $y = c(x)$ – функция затрат производства, где x – количество выпускаемой продукции, тогда Δx – прирост продукции, Δc – приращение затрат производство, тогда производная

$$c' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta c(x)}{\Delta x}$$

выражает предельные затраты производства при неограниченном уменьшении прироста объема производства $\Delta x \to 0$

Аналогично можно определить предельный спрос и предельное предложение.

3. **Предельный спрос**: $d' = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta d(p)}{\Delta p}$,

где $d(p)$ – функция спроса; p – цена на товар

4. **Предельное предложение**: $S' = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \dfrac{\Delta S(p)}{\Delta p}$,

где $S(p)$ – функция предложения.

При увеличении цены p на единицу производная S' оценивает увеличение предложения товара от производителей, а производная от функции спроса d' позволяет оценить уменьшение спроса со стороны покупателя.

В экономике часто предельные величины называют маржинальными и обозначают

1) MC – предельные затраты,
2) MS – предельное предложение,
3) Md – предельный спрос и прочее.

В отличие от предельных при записи средних (average) величин используют обозначения:

1) AS – среднее предложение,
2) Ad – средний спрос,
3) Ar – средний доход

Данные показывают, что с увеличением цены спрос на продукцию падает; с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, а также уменьшает средний доход; это характерно для монопольного рынка, когда одна или несколько фирм контролируют цены на определенную продукцию.

Пример 7.11. Найти предельный и средний доход на единицу продукции x, если функция спроса равна $d(x) = -2x + 4$.

Решение. Суммарный доход от реализованной продукции в количестве x равен $r(x) = d(x) \cdot x$, $r(x) = (-2x + 4) \cdot x = -2x^2 + 4x$.

Тогда, средний доход на единицу продукции

$$Ar = \frac{r}{x} = \frac{-2x^2 + 4x}{x} = -2x + 4;$$

предельный доход (дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции) равен $Mr = r' = -4x + 4$ (рис. 3).

В условиях свободного конкурентного рынка, когда участников рынка достаточно много, цены не контролируются.

Пример 7.11. Пусть рыночная цена $p = 4$, а, например, суммарный

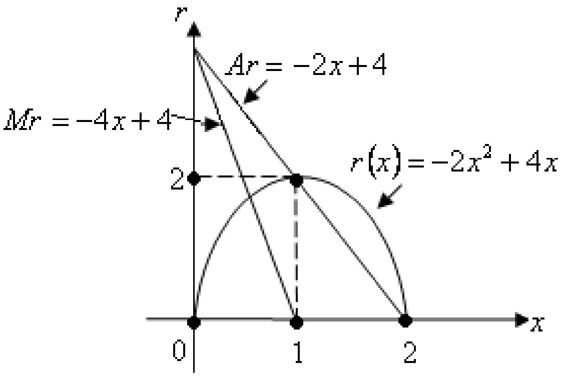

Рис. 3

доход равен $r(x) = 4x$. В этом случае средний и предельный доходы равны $Ar = \frac{r(x)}{x} = \frac{4 \cdot x}{x} = 4$, $Mr = r' = 4$ (рис. 4).

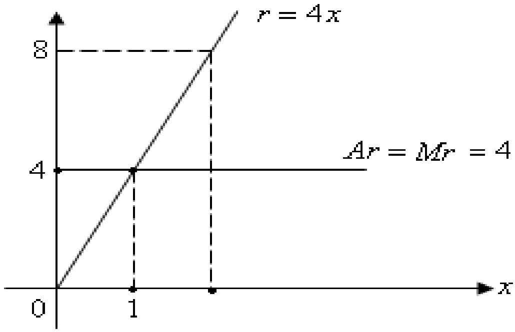

Рис. 4

Пример 7.13. Известна функция затрат производства

$$y = c(x) = 30x - 0{,}01x^3 \text{ (у.е.).}$$

Найти предельные затраты, если объем выпускаемой продукции равен 20 ед.

Решение. Предельные затраты производства равны производной: $y' = c'(x) = 30x - 0{,}03x^2$; при заданном объеме $x = 20$ ед., найдем $y'(20) = c'(20) = 30 - 0{,}03 \cdot 20^2 = 30 - 12 = 18$ (у.е.).

7.8. Экономический смысл производной второго порядка

Если $y = f(x)$ – функция выпуска продукции, она выражает зависимость объема производства от наличия или потребления ресурса x (частный вид производственной функции).

Производная $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ есть предельная производительность ресурса, она характеризует увеличение или уменьшение выпуска продукции, вызванное увеличением затрат данного ресурса x

Если x есть количество работников в данный момент времени, то производная $f'(x)$ выражает добавочную продукцию, производимую новым работником за единицу времени.

Производную второго порядка $y'' = f''(x) = (f'(x))'$, равную скорости изменения предельной производительности, называют темпом изменения функции $y = f(x)$.

Очевидно, что при положительном темпе $f''(x) > 0$ возрастает скорость изменения предельной производительности при увеличении x; при отрицательном темпе $f''(x) < 0$ увеличения x приводит к уменьшению скорости изменения функции.

Пример 7.14. Количество произведенной продукции за рабочее время t, $1 \le t \le 8$ задано функцией: $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 20t + 10$. Найти производительность труда, скорость и темп ее изменения через два часа после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда в момент t равна производной

$$g'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^3 + \frac{7}{2} \cdot 2t^2 + 20 = -t^2 + 7t + 20 \cdot$$

Скорость изменения производительности равна второй производной $g''(t) = -2t + 7$. Темп τ изменения производительности равен

$$\tau = \frac{g''(t)}{g'(t)} = \frac{-2t + 7}{-t^2 + 7t + 20} = \frac{2t - 7}{t^2 - 7t - 20} \cdot$$

Найдем их значения в заданный момент времени при $t_1 = 2$ и $t_2 = 7$

$$g'(2) = 30;\ g''(2) = 3;\ \tau(2) = 0{,}1$$

$$g'(7) = 20;\ g''(7) = -7;\ \tau(7) = -0{,}35.$$

К концу рабочего дня производительность труда снижается, и снижается скорость и темп ее изменения $(g'' < 0; \tau < 0)$.

7.9. Эластичность функции.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$ и обозначается

$$E = \lim_{\Delta x \to x} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{x}{y} = \frac{x}{y} y'.$$

Пример 7.15. Найти эластичность себестоимости, если известна функциональная зависимость себестоимости единицы продукции y от выпуска продукции x: $y = -0{,}3x + 100$.

Решение. Найдем эластичность себестоимости

$$E = \frac{x}{-0{,}3x + 100} \cdot (-0{,}3) \text{ или } E = \frac{3x}{-3x + 1000} \cdot$$

Если выпуск продукции равен $x = 300$ у.е., то эластичность равна

$$E = \frac{900}{-900 + 1000} = \frac{900}{100} = 9,$$

следовательно, при выпуске продукции на 300 у.е., увеличение его на 1% приведет к увеличению себестоимости на 9%.

Если выпуск продукции равен 400 у.е., то эластичность

$$E = \frac{1200}{-1200 + 1000} = \frac{1200}{-200} = -6,$$

тогда увеличение выпуска продукции на 1% приведет к снижению себестоимости на 6%

Пример 7.16. Найти эластичность функции спроса $d = \frac{400}{p + 5}$ при равновесной цене, если функция предложения равна $S = \frac{p^2}{p + 5}$.

Решение. Найдем равновесную цену p, решив уравнение

$$d(p) = s(p) \text{: } \frac{400}{p + 5} = \frac{p^2}{p + 5};\ p^2 = 400;\ p > 0;\ p = 20.$$

При равновесной цене 20 у.е. спрос равен $d(20) = \frac{400}{20 + 5} = 16$.

Оценим эластичность функции спроса

$$E = \frac{-p}{d} \cdot d^{/}(p) = \frac{p \cdot (p+5)}{40} \cdot \left(-\frac{400}{(p+5)^2} \right) = -\frac{p}{p+5};$$

при $p = 20$ эластичность $E(20) = -\frac{20}{25} = -0{,}8$.

Так как $E = -0.8 < 0$, то при увеличении цены p на 1%, от 20 у.е. до 20,2 у.е. спрос уменьшится на 0,8%, от 16 до 15,872, т.к. $16 - \frac{0{,}8}{100} \cdot 16 = 16 - 0{,}128 = 15{,}872$.

Пример 7.17. Найти и построить график функции подоходного налога $y(x)$, при условиях: 1) если доход $x \le k$, то y составляет 8% от x; 2) если доход $k < x < t$, то налог взимается по ставке 20% от дохода, превышающего k, 3) если доход $x \ge t$, то ставка составляет 40%.

Решение. Найдем аналитическое выражение для функции $y(x)$, по условию задачи функцию можно описать тремя различными формулами:

$$y(x) = \begin{cases} 0{,}08x, \text{ если } 0 < x \le k; \\ 0{,}08x + 0{,}2(x-k), \text{ если } k < x < t; \\ 0{,}08x + 0{,}2(x-k) + 0{,}4(x-t), \text{ если } x \ge t \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0{,}08x, \quad \text{если } 0 < x \le k; \\ 0{,}28x - 0{,}2k, \quad \text{если } k < x < t; \\ 0{,}68x - 0{,}2k - 0{,}4t, \quad \text{если } x \ge t \end{cases} \cdot$$

Построим график функции $y(x)$(рис. 5).

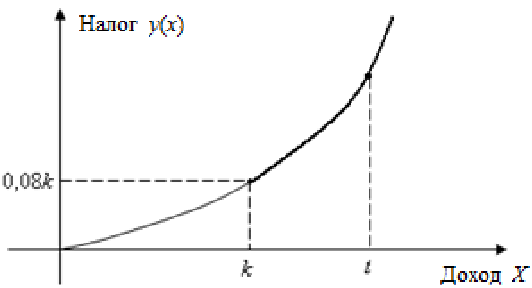

Рис. 5

Глава 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

1. **Теорема Тейлора**. (Тейлор (1685 – 1731) – английский математик).

1) Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные порядка до $(n+1)$ включительно, т. е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.

2) Пусть x – любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

– это выражение называется формулой Тейлора, а выражение:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Формулой Маклорена (Колин Маклорен (1698 – 1746) – шотландский математик) называется формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \qquad 0 < \theta < 1 \cdot$$

Эта формула называется формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

2. **Теорема Ролля**. (Ролль (1652 – 1719) – французский математик).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Теорема Ролля имеет несколько следствий:

1. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует, по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$, т. е. между двумя нулями

функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

2. Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n - 1)$ – го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $(n - 1)$ – го порядка равна нулю.

3. **Теорема Лагранжа**. (Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813) французский математик). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon) \cdot$$

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB (рис. 6).

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B. Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Выражение

$$f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$$

называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

4. **Теорема Коши**. (Коши (1789 – 1857) – французский математик).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует, по крайней мере, одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} \cdot$$

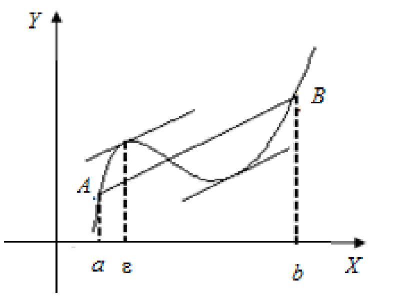

Рис. 6

8.2. Правило Лопиталя

При решении пределов можно получить так называемые «неопределенности». К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty\cdot 0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty.$$

Теорема (правило) Лопиталя (Лопиталь (1661 – 1704) – французский математик). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и значения функций в точке a равны: $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 8.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. При попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]\cdot$ Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби, удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x};\quad g'(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}\cdot$$

Пример 8.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

Решение.

$$f'(x)=-\frac{2}{1+x^2};\qquad g'(x)=e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\frac{2}{3}\cdot$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример 8.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

Решение.

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x);\qquad g'(x)=1+e^x;$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x);\ g''(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}};$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4};\quad g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0.$$

8.3. Возрастание и убывание функций

Теорема.

1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т. е. $f'(x)\ge 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$ (рис. 7).

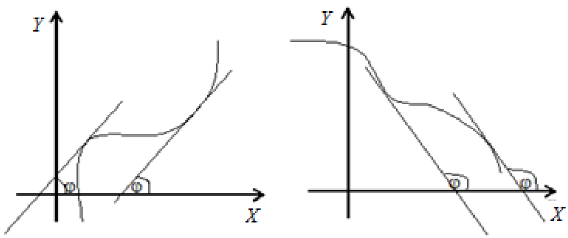

Рис. 7

8.4. Экстремум функции

Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку $x_1: f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$ Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2+\Delta x) > f(x_2)$при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема (необходимое условие существования экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример 8.4. $f(x) = |x|$. В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной (рис. 8).

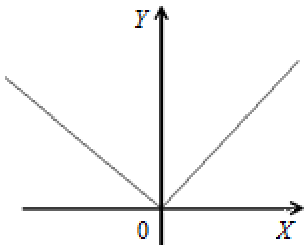

Рис. 8

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема (достаточные условия существования экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с «–» на «+»–то функция имеет минимум.

8.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1. Найти критические точки функции.
2. Найти значения функции в критических точках.
3. Найти значения функции на концах отрезка.
4. Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пример 8.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2} \text{ на отрезке } [0; 2,5].$$

Решение. Найдем значение функции на концах отрезка:

$$y(0) = 2, \quad y(2,5) = \frac{51}{28}.$$

Найдем производную функции: $y' = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} = 0,$

$$\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}, \quad (x+1)^2 = 4,$$

$$x+1 = 2, \quad x = 1 \in [0;\ 2,5],$$

$$x+1 = -2, \quad x = -3 \notin [0;\ 2,5].$$

Найдем значение функции в точке x=1: $y(1) = 1,5$. Тогда наименьшее значение равно 1,5, а наибольшее – равно 2.

8.6. Выпуклость функции. Точки перегиба

Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой (рис.9).

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

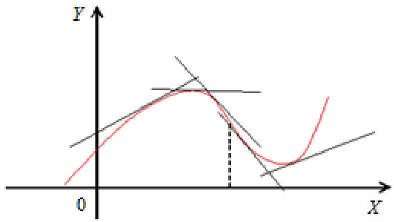

Рис. 9

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Пример 8.6. Определить промежутки возрастания и убывания, вогнутости и выпуклости функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Решение. Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Стационарные точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках (рис. 10):

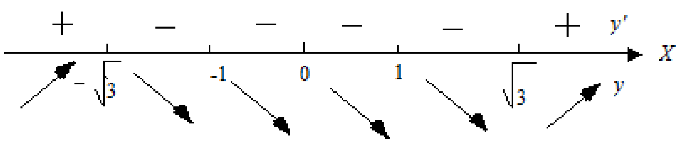

Рис. 10

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой минимума. Значения функции в этих точках равны соответственно $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ и $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках:

$-\infty < x < -1,\ y'' < 0,$ кривая выпуклая;

$-1 < x < 0,\ y'' > 0,$ кривая вогнутая;

$0 < x < 1,\ y'' < 0,$ кривая выпуклая;

$1 < x < \infty,\ y'' > 0,$ кривая вогнутая.

Построим график функции (рис. 11).

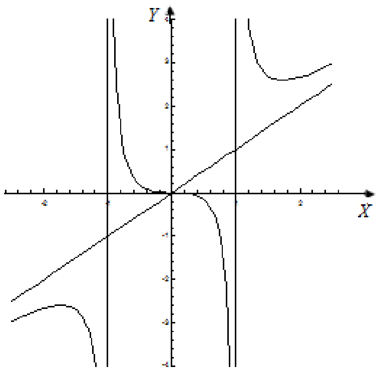

Рис. 11

8.7. Асимптоты графика функции

Прямая называется асимптотой кривой, если график функции неограниченно приближается, не пересекая ее.

1. **Вертикальные асимптоты**. Из определения асимптоты следует, что если

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

то прямая $x=a$ – асимптота кривой $y=f(x)$.

2. **Наклонные асимптоты**. Предположим, что кривая $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ (рис. 12):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx].$$

Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

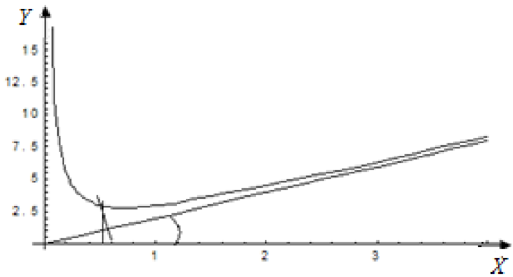

Рис. 12

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y=x+e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота $y=x$ (рис. 13).

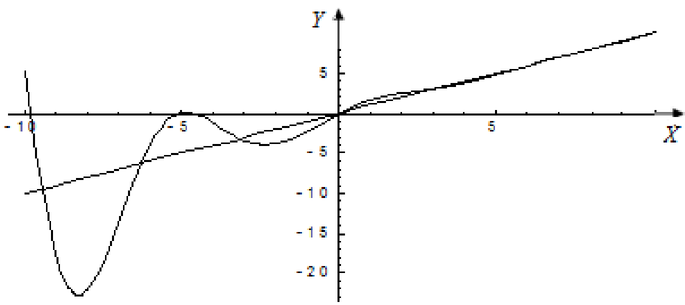

Рис. 13

Пример 8.7. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Решение.

Вертикальные асимптоты: $y \to +\infty; x \to 0_{-0}; y \to -\infty; \; x \to 0_{+0}$, следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой (рис. 14).

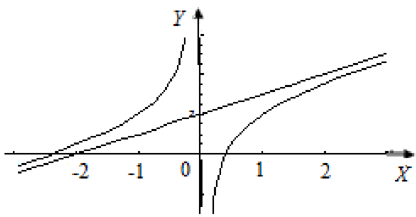

Рис. 14

Пример 8.8. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{9x}{9 - x^2}$.

Решение. Прямые x = 3 и x = –3 являются вертикальными асимптотами кривой (рис. 15).

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0, \; b = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0,$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.

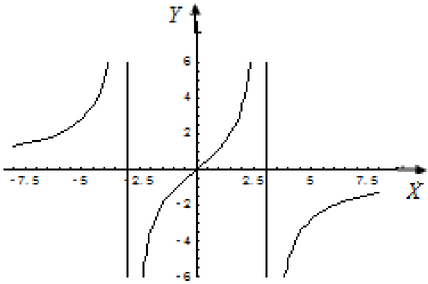

Рис. 15

8.8. Общая схема исследования функций и построение графиков

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Схема исследования функции является гибкой и включает в себя следующие пункты:

1. область существования функции;
2. точки разрыва (если они имеются);
3. интервалы возрастания и убывания;
4. точки максимума и минимума;
5. максимальное и минимальное значение функции на ее области определения;
6. области выпуклости и вогнутости;
7. точки перегиба (если они имеются);
8. асимптоты (если они имеются);
9. построение графика.

Пример 8.9. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции являются все действительные числа $(-\infty;\ \infty)$.

2. Функция является функцией общего вида.

3. Точки пересечения с координатными осями:

$$\text{с осью } OY: x=0, y=1; \text{ с осью } OX: y=0,\ x=1.$$

4. Точки разрыва и асимптоты. Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: общее уравнение $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{1-x^3} + x^2\right]} = 0.$$

Прямая $y = -x$ – наклонная асимптота.

5. Возрастание и убывание функции, точки экстремума. Найдем производную

$$y' = \frac{1}{3}(1-x^3)^{2/3}\cdot\left(-3x^2\right).$$

Видно, что $y' < 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов. В точке $x = 0$ первая производная функции равна нулю, однако в этой точке убывание не сменяется на возрастание, следовательно, в точке $x = 0$ функция скорее всего имеет перегиб. Для нахождения точек перегиба, находим вторую производную функции

$y'' = \dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$ $y'' = 0$ при $x = 0$ и $y'' = \infty$ при $x = 1$.

Точки (0,1) и (1,0) являются точками перегиба, т.к. $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для любого $h > 0$.

6. Построим график функции (рис. 16).

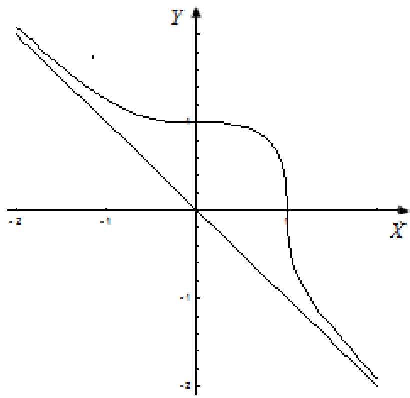

Рис.16

Пример 8.10. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения x, кроме $x=0$.

2. Функция является функцией общего вида.

3. Точки пересечения с координатными осями:

с осью $Ox: y=0,\ x=-\sqrt[3]{4}$; с осью $Oy: x=0, y$ – не существует.

4. Точка $x=0$ является точкой разрыва $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$, следовательно, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}=0.$$

Наклонная асимптота $y=x$.

5. Находим точки экстремума функции (рис. 17).

$$y'=1-\frac{8}{x^3};\quad \frac{x^3-8}{x^3}=0;\quad x^3-8=0;\quad x=2;\quad x\neq 0.$$

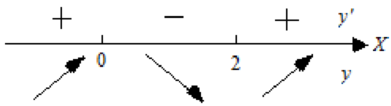

Рис. 17

Таким образом, $x=2$ – минимум функции. Точка (2, 3) является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную:

$y''=\dfrac{24}{x^4}>0$ при любом $x\neq 0$, следовательно, функция – вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции (рис. 18).

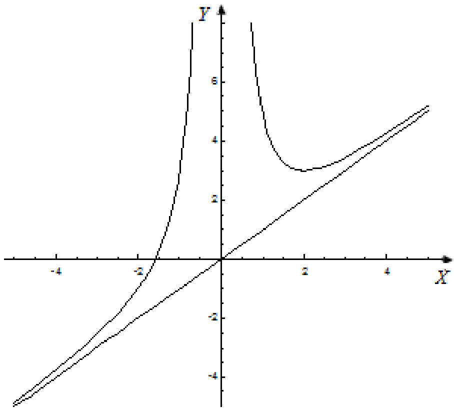

Рис. 18

Глава 9. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

9.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость

Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется действительной частью числа $(a = \operatorname{Re} z)$, а b – мнимой частью $(b = \operatorname{Im} z)$.

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = \operatorname{Im} z = 0$, то число z будет действительным.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно–сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2; b_1 = b_2$.

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части $a = b = 0$.

Комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная – мнимой осью (рис. 19).

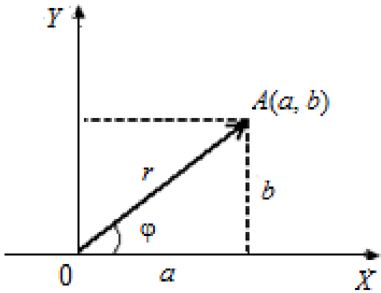

Рис. 19

Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1. Сложение и вычитание:

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2);$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}.$$

2. Умножение:

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2;$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

В случае комплексно–сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3. Деление:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy;$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2};$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

9.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Из геометрических соображений (рис.19) видно, что

$$a = r\cos\varphi; b = r\sin\varphi.$$

Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

При этом величина r называется модулем комплексного числа, а угол наклона φ – аргументом комплексного числа

$$r = |z|;\ \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\ \varphi = Arg\, z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Очевидно, что комплексно–сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы

$$|z| = |\bar{z}|;\ Arg\, z = -Arg\, \bar{z}.$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);$$

1. Умножение:

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2. Деление:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

3. Возведение в степень:

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется формулой Муавра. (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и большего числа углов.

Пример 9.1. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Решение. Рассмотрим некоторое комплексное число

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тогда с одной стороны

$$z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi).$$

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Приравнивая, получим:

$$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi.$$

Так как два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Получили известные формулы двойного угла.

4. Извлечение корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r};\ n\psi = \varphi + 2\pi k; k \in z;$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Данное равенство называется уравнением Эйлера. Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3. $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Для комплексно–сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y.$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}.$$

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}.$$

Полученное равенство и есть показательная форма комплексного числа.

Пример 9.2. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \dfrac{7}{2}i;\ z_2 = -7 - 2i$.

Требуется а) найти значение выражения $\left(\dfrac{1 - \frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме; б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Решение. Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}.$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i} = \frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)} = \frac{-14-49i-4i+14}{4+49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где $r = |z| = \sqrt{4+12} = 4;\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0.$

Тогда $z = 4(\cos 60^0 - i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра:

$$z^{20}=4^{20}(\cos 1200^0-i\sin 1200^0)=4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi+120^0)-$$

$$-i\sin(3\cdot 2\pi+120^0))=4^{20}\left(\cos 120^0-i\sin 120^0\right)=-4^{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3+z=0$, то $w=\sqrt[3]{z}$,

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-60^0+2\pi k}{3}\right);\ k\in Z.$$

Пример 9.3. Решить квадратное уравнение $x^2-4x+5=0.$

Решение. Оценим дискриминант $D=16-20=-4.$

Найдем корни уравнения

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i.$$

Пример 9.4. Найти $e^{3+0.5\pi i}$.

Решение. $e^{3+0,5\pi i}=e^3e^{0,5\pi}=e^3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=ie^3.$

Глава 10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. Неопределенный неопределенного интеграла и его свойства

Основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции по ее производной. Эта операция является обратной дифференцированию и называется интегрированием.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b) если для любых $x\in(a,b)$ выполняется равенство

$$F'(x)=f(x).$$

Например, если $F(x)=\cos x$, то $f(x)=-\sin x.$

Задача определения первообразной функции неоднозначна. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$ является первообразной, где $C-$ константа, так как

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на множестве X, то множество $F(x)+C$, $C-\mathrm{const}$, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией.

Выражение $f(x)dx$ называется подинтегральным выражением.

Переменная x называется переменной интегрирования.

Пример 10.1. Найти интеграл $\int x^4 dx.$

Решение. $\int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5}+C.$

Проверим результат: $\left(\dfrac{x^5}{5}+C\right)' = \dfrac{5x^4}{5}+0 = x^4.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$
3. $\int dF(x) = F(x)+C,$
4. $f(x)\int kf(x)dx = k\int F(x)dx, \quad k \neq 0,$
5. $f(x)\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

10.2. Интегралы простейших функций

1 $\quad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad n \neq -1$

2 $\quad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C$

3 $\quad \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$

4 $\quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

5 $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

6 $\int e^x dx = e^x + C$

7 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8 $\int \cos x dx = \sin x + C$

9 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

10 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11 $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

12 $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

13 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

Эти интегралы принято называть табличными.

10.3. Основные методы интегрирования

1. **Табличное интегрирование.**

Этот метод заключается в том, что подинтегральная функция подводится под табличные функции и используются свойства неопределенного интеграла.

Пример 10.2. Вычислить интеграл $\int \left(e^x + 2x^3 - \sin x\right) dx.$

Решение. $\int \left(e^x + 2x^3 - \sin x\right) dx = e^x + \dfrac{1}{2} x^4 + \cos x + C.$

Приме 10.3. Вычислить интеграл $\int \left(\cos \dfrac{x}{2} - \sin \dfrac{x}{2}\right)^2 dx.$

Решение.

$$\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C.$$

2. **Метод подстановки.**

Во многих случаях введение новой переменной позволяет свести интеграл к табличному интегралу. Этот метод основан на теореме.

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X. Тогда, если на промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула:

$$\int f(x)dx=[x=(t)]=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется формулой замены переменной. Сам прием можно разделить на два подхода.

1. Подведение под дифференциал.

Пример 10.4. Вычислить интеграл $\int\sin^4 x\cos xdx.$

Решение. Так как дифференциалом функции $\sin x$ является выражение $\cos xdx$, то получим:

$$\int\sin^4 x\cos xdx=[t=\sin x,\ dt=\cos xdx]=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Пример 10.5. Вычислить интеграл $\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx.$

Решение.

$$\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx=[t=x-1,\ x=t+1,\ dx=dt]=\int\frac{(t+1)^3}{t^2}dx=$$

$$=\int\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}dt=\int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t}+C=\frac{(x-1)^2}{2}+3(x-1)+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

3. **Метод интегрирования по частям.**

Метод основан на использовании формулы дифференцирования даух функций.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и диффеернцируемы на некотором промежутке X и пусть $u'(x)v(x)$ функция имеет первообразную на промежутке X. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X и справедлива формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Эту формулу можно записать короче:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Пример 10.6. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx.$

Решение.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, \ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x^2+1}, \ v = x \end{bmatrix} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x^2+1, \\ dt = 2xdx, \ xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{bmatrix} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

10.4. Интегрирование специальных функций

1. **Интегрирование дробно-рациональных функций.**

Дробно-рациональные функции можно представить в виде $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,

где $P_n(x), Q_m(x) -$ многочлены степени n, m.

Выпишем известные формулы табличных интегралов.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a}\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C.$

4. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

5. $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + C.$

Следующие интегралы можно решить, используя приемы.

6. $\int \frac{(ax+b)dx}{x^2+px+q}.$

а) если квадратный трехчлен в знаменателе x^2+px+q раскладывается на множители ($D > 0$), то имеет место равенство:

$$\int \frac{(ax+b)dx}{x^2+px+q} = \left[\begin{array}{l} x^2+px+q=0, \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a} \end{array}\right] = \int \frac{(ax+b)dx}{(x-x_1)(x-x_2)};$$

б) если квадратный трехчлен в знаменателе x^2+px+q не раскладывается на множители ($D < 0$), то выделяется полный квадрат многочлена и вводится новая переменная $t = x + 0{,}5p.$

Пример 10.7. Вычислить интеграл $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx.$

Решение.

Найдем корни уравнения $x^2+4x+9=0,\ D=16-36=-20<0.$

Многочлен не раскладывается на множители. Выделим полный квадрат: $x^2+4x+9 = x^2+4x+4+5 = (x+2)^2+5.$

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx = \left[\begin{array}{l} t=x+2, \\ x=t-2, \\ dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5}dt =$$

$$\int \frac{6t}{t^2+5}dt - 7\int \frac{dt}{t^2+5} = 3\ln\left|t^2+5\right| - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= 3\ln\left|x^2+4x+9\right| - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

7. $\int \frac{(ax+b)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}.$

В этом случае выделяют полный квадрат квадратного трехчлена и вводят новую переменную:

$$z=\frac{x+0{,}5p}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}},\ x=z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2},\ \ dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dz.$$

8. Интегрирование дробно-рациональных функций $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

а) Если степень многочлена в числителе больше степени в знаменателе (n > m), то выделяют целую часть, деля числитель на знаменатель.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[n>m\right]=W_{n-m}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_m(x)},\quad r<m.$$

б) Если степень многочлена в числителе меньше степени в знаменателе (n < m), то раскладывают знаменатель на простые множители

$$Q_m(x)=(x-x_1)(x-x_2)^k...(x^2+px+q)...(x^2+p_1x+q_1)^s,$$

где $x_1,\,x_2-$корни многочлена, $k,\,s-$кратности корней или неразложимых м трехчленов (D < 0).

Дробь тогда можно представить в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B_1}{x-x_2}+...+\frac{B_k}{(x-x_2)^k}+\frac{Cx+D}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+p_1x+q_1)^s}.$$

В итоге интеграл можно свести к простейшим интегралам, найдя неизвестные коэффициенты.

Пример 10.8.. Вычислить интеграл $\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Решение. Так как знаменатель уже разложен на простые множители, то представим дробь в виде суммы простейших дробей и найдем неизвестные коэффициенты разложения:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Найдем дополнительные множители для дробей и выпишем равенство числителей правой и левой части равенства:

$$x^2-5x+9=A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменных. Из полученной системы уравнений найдем неизвестные коэффициенты A, B, C, D.

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A + C, \\ x^2 &: 1 = A + B - 2C + D, \\ x^1 &: -5 = 2B + C - 2D, \\ x^0 &: 9 = -2A + 2B + D, \end{aligned} \qquad A = -\frac{7}{5}, \quad B = 1, \qquad C = \frac{7}{5}, \quad D = \frac{21}{5}.$$

Получим следующие интегралы6

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{7}{5}\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Вычислим каждый интеграл.

1. $-\frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{7}{5}\ln|x-1| + C_1;$

2. $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C_2;$

3. $\frac{7}{5}\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 2} dx = \begin{bmatrix} x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1, \\ t = x+1,\ x = t-1,\ dx = dt \end{bmatrix} = \frac{7}{5}\int \frac{t+2}{t^2 + 1} dt =$

$$= \frac{7}{5}\int \frac{t}{t^2+1} dt + \frac{14}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{7}{10}\ln|t^2 + 1| + \frac{14}{5}\operatorname{arctg} t + C_3 =$$

$$= \frac{7}{10}\ln|x^2 + 2x + 2| + \frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x+1) + C_3$$

В итоге получим:

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{7}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10}\ln|x^2 + 2x + 2| + \frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x-1) + C.$$

2. **Интегрирование тригонометрических выражений.**

Выпишем табличные интегралы от тригонометрических выражений.

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C.$

5. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C.$

6. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C.$

7. $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(\alpha x - \beta x) + \cos(\alpha x + \beta x)\big)dx.$

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(\alpha x - \beta x) - \cos(\alpha x + \beta x)\big)dx.$$

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int \big(\sin(\alpha x - \beta x) + \sin(\alpha x + \beta x)\big)dx.$$

8. $\int R(\sin x, \cos x\ \mathrm{tg}x, \mathrm{ctg}x)dx.$

Для вычисления такого вида интегралов используется универсальная подстановка: $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2\mathrm{arctg}y,\ dx = \frac{2dy}{y^2+1}$.

Все тригонометрические функции можно выразить через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}, \quad \mathrm{tg}x = \frac{2\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Через подстановку находим выражения для тригониметрических функций:

$$\sin x = \frac{2y}{y^2+1}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{y^2+1}, \quad \mathrm{tg}x = \frac{2y}{1-y^2}, \quad \mathrm{ctg}x = \frac{1-y^2}{2y}.$$

Пример 10.9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Решение. Применим универсальную подстановку.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \left[y = \mathrm{tg}\frac{x}{2},\ x = 2\mathrm{arctg}y,\ dx = \frac{2dy}{y^2+1},\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \right] =$$

$$=\int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}}\frac{2dy}{y^2+1}=\int dy = y+C=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

9. $\int \sin^n x\cos^m xdx = -\cos x + C.$

В зависимости от четности или нечетности показателя степени функций используются разные подстановки.

1) $n-$ четное, $m-$ четное, положительные.

Воспользуемся формулами понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

2) $n-$ нечетное, $m-$ четное ($n-$ четное, $m-$ нечетное), положительные.

От функции в нечетной степени следует отщепить функцию в первой степени и ввести новую переменную: $t=\cos x,\ dt=-\sin xdx$ $(t=\sin x,\ dt=\cos xdx).$

3) $n-$ четное, $m-$ четное, отрицательные.

Используем подстановку $t=\mathrm{tg}x,\ dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx,\ \dfrac{1}{\cos^2 x}=1+t^2$, или $t=\mathrm{ctg}x,\ dt=-\dfrac{1}{\sin^2 x}dx,\ \dfrac{1}{\sin^2 x}=1+t^2.$

4) $n-$ нечетное или $m-$ нечетное, отрицательные.

В этом случае необходимо домножить и числитель и знаменатель на любую функцию в первой степени и ввести переменную: $t=\sin x,\ dt=\cos xdx$ или $t=\cos x,\ dt=-\sin xdx.$

Пример 10.10. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x\cos^2 xdx.$

Решение.

$$\int \sin^3 x\cos^2 xdx=\int \sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=\left[t=\cos x,\ dt=-\sin xdx\right]=$$

$$=-\int(1-t^2)t^2dt=-\int(t^2-t^4)dt=-\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x\cos^2 xdx.$

Решение.

$$\int \sin^2 x\cos^2 xdx=\left[\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x), \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2x\right)dx=\left[\cos^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Пример 10.11. Вычислить интеграл $\int\sin x\cos 5xdx.$

Решение.

$$\int\sin x\cos 5xdx=\frac{1}{2}\int\sin(x-5x)+\sin(x+5x)dx=\frac{1}{2}\int(\sin 6x-\sin 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 4x\right)+C=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x+C.$$

3. **Интегрирование простейших иррациональностей.**

Выпишем табличные интегралы, где используются иррациональные выражения.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$

3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}+C.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

Необходимо выделить полный квадрат квадратного трехчлена и привести выражение к первым двум интегралам.

Пример 10.12. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}.$

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}=\left[\begin{array}{l}x^2-6x+3=x^2-6x+9-6=(x-3)^2-6,\\ t=x-3,\ dt=dx\end{array}\right]=$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{t^2-6}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-6}\right|+C=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right|+C.$$

5. $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx,\ a\neq 0.$

При решении таких интегралов используется подстановка

$$t=\sqrt[n]{ax+b},\ x=\frac{t^n-b}{a},\ dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

После использования подстановки интеграл сводится к двум первым.

Пример 10.13. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}=\left[t=\sqrt[3]{x+1},\ x=t^3-1,\ dx=3t^2dt\right]=\int\frac{t^3-1}{t}3t^2dt=$$

$$=3\int\left(t^4-t\right)dt=3\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2\right)+C=\frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+C.$$

6. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ a\neq 0,\ c\neq 0.$

Интеграл вычисляется с помощью подстановки

$$t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad k=HOK(n,m),\ (cx+d)t^k=ax+b,\ x=\frac{b-dt^k}{ct^k-a}.$$

Пример 10.14. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}=\begin{bmatrix}HOK(2,3)=6,\ t=\sqrt[6]{x},\\ x=t^6,\ dx=6t^5dt\end{bmatrix}=\int\frac{6t^5dt}{(t^2+4)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{(t^2+4)}=$$

$$=6\int\frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=6\int\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=6\left(t-2\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)+C=$$

$$=6\left(\sqrt[6]{x}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}\right)+C.$$

7. $\int\frac{dx}{(ma+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}},\ r=1;2.$

Для этих интегралов используется подстановка $t=\frac{1}{mx+n}$.

8. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$

Сначала следует выделить полный квадрат квадратного трехчлена и ввести новую переменную $t = x + \dfrac{b}{2a}$.

После этого получим один из интегралов, каждый из которых вычисляется соответствующей подстановкой:

1) $\int R\left(t, \sqrt{m^2 - t^2}\right)dt, \quad t = m\sin u \quad$ или $\quad t = m\cos u,$

2) $\int R\left(t, \sqrt{m^2 + t^2}\right)dt, \quad t = m\mathrm{tg}u \quad$ или $\quad t = m\mathrm{ctg}u,$

3) $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - m^2}\right)dt, \quad t = \dfrac{m}{\sin u} \quad$ или $\quad t = \dfrac{m}{\cos u}.$

Пример 10.15. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x^2 - 2x + 10}dx.$

Решение.

$$\int \sqrt{x^2 - 2x + 10}dx = \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 10 = x^2 - 2x + 1 + 9 = (x-1)^2 + 9, \\ t = x - 1,\ dt = dx \end{array}\right] =$$

$$= \int \sqrt{t^2 + 9}dt = \left[t = 3\mathrm{tg}u,\ dt = \frac{3du}{\cos^2 u},\ t^2 + 9 = 9\mathrm{tg}^2 u + 9 = 9\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)\right] =$$

$$= \int \sqrt{\frac{9}{\cos^2 u}}\frac{3du}{\cos^2 u} = 9\int \frac{du}{\cos^3 u} = 9\int \frac{\cos u}{\cos^4 u}du =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = \sin u,\ dy = \cos u du, \\ \cos^4 u = (1 - \sin^2 u)^2 \end{array}\right] = 9\int \frac{dy}{(1 - y^2)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{(1-y^2)^2} = \dfrac{A}{1-y} + \dfrac{B}{(1-y)^2} + \dfrac{C}{1+y} + \dfrac{D}{(1+y)^2}, \\ 1 = A(1+y)^2(1-y) + B(1+y)^2 + C(1-y)^2(1+y) + D(1-y)^2, \\ y^3 : 0 = -A + C, \qquad A = 0{,}25 \\ y^2 : 0 = -A + B - C + D, \qquad B = 0{,}25 \\ y^1 : 0 = A + 2B - C - 2D, \qquad C = 0{,}25 \\ y^0 : 1 = A + B + C + D, \qquad D = 0{,}25 \end{array}\right] =$$

$$= = 0{,}25\int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right)dy =$$

$$= 0{,}25\left(-\ln|1-y|+\frac{1}{1-y}+\ln|1+y|-\frac{1}{1+y}\right)+C =$$

$$= 0{,}25\left(\frac{2y}{1-y^2}+\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|\right)+C.$$

9. $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx, \quad a,b\in R, \quad m,n,p\in Q.$

В зависимости от значения переменной p используется разная подстановка.

1) $p\in Z, \quad x=t^r, \quad r=НОК(m,n),$

2) $p=\dfrac{k}{s}$ и $\dfrac{m+1}{n}\in Z, \quad ax^n+b=t^s,$

3) $p=\dfrac{k}{s}$ и $\dfrac{m+1}{n}\notin Z, \quad \left(\dfrac{m+1}{n}+p\right)\in Z, \quad t^s=\dfrac{ax^n+b}{x^n}.$

Пример 10.16. Вычислить интеграл $\int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$

Решение.

$$\int x^{\frac{1}{5}}\left(3-2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{5},\ n=\frac{3}{5},\ p=-\frac{1}{2},\ s=2,\ \frac{m+1}{n}=\frac{0{,}2+1}{0{,}6}=2\in Z,\ 3-2x^{\frac{3}{5}}=t^2, \\ x^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x=\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{5}{3}}, \quad dx=-\frac{5}{3}\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}tdt \end{array}\right]=$$

$$=\int\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{5}{3}\left(\frac{3-t^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}tdt\right)=-\frac{5}{3}\int\frac{3-t^2}{2}dt=-\frac{5}{6}\left(3t-\frac{t^3}{3}\right)+C=$$

$$=-\frac{5}{6}\left(3\sqrt{3-2x^{\frac{3}{5}}}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{3-2x^{\frac{3}{5}}}\right)^3\right)+C.$$

Глава 11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ неотрицательная функция.

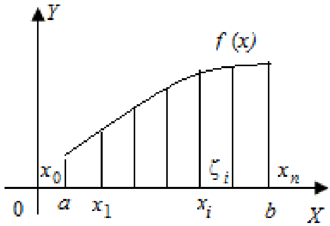

Рис. 20

Определим площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной прямыми $x=a, x=b, y=0$ и графиком функции $y=f(x)$

Разобьем $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

Выберем на каждом из частичных отрезков $[x_j;x_{j+1}]$ $(j=1,2,...,n-1)$ по произвольной точке ζ_j, определим значение функции $f(\zeta_j)$ и составим сумму: $S=\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j, (\Delta x_j=x_{j+1}-x_j)$.

Эта сумма равна сумме площадей n прямоугольников. Устремим $\max\{\Delta x_j\}\to 0$ Если при этом $S_n=S$, и S не зависит от способа разбиения и выбора точек ζ_j, то величина S называется площадью данной криволинейной трапеции:

$$S=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j.$$

Указанный предел называется определённым интегралом и обозначается: $\int\limits_b^a f(x)dx=\lim\limits_{\max\Delta x\to 0}\sum\limits_{j=1}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j$.

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Определенный интеграл – это число.

Для вычисления на практике используют формулу Ньютона – Лейбница.

Пусть задана непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ – ее первообразная. Тогда

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ или } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \text{ –}$$

определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) \text{ – функция } x.$$

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$ и по формуле Ньютона – Лейбница получим: $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = \Phi(x)$.

Дифференцируем данный интеграл:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(x) - F(a)\right] = O'(x) = f(x)$$

– производная по верхнему пределу равна подынтегральной функции.

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ – не зависит от значения переменной интегрирования.

2. $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

4.Для любых чисел *a, b, c*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$$

5. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx,\ A = const$.

6. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

7. Если $m \le f(x) \le M$ на отрезке $[a, b]$ и $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. Теорема о среднем $\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(\varsigma)$, где $\varsigma \in [a, b]$.

Пример 11.1. Вычислить интеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Решение.

$$\int_1^5 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^5 \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)}dx = \int_1^5 \left(\frac{x^2+1}{x(x^2+1)} - \frac{x^2}{x(x^2+1)}\right)dx =$$

$$= \int_1^5 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_1^5 =$$

$$= \ln 5 - \ln 1 - \frac{1}{2}\ln(5^2+1) + \frac{1}{2}\ln(1^2+1) = \ln 5 - \frac{1}{2}\ln 26 + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \ln\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \ln\frac{5}{\sqrt{13}}.$$

11.2. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле

1. **Интегрирование по частям**.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две непрерывные дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$, тогда $d(uv) = vdu + udv$. Проинтегрируем равенство от *a* до *b*:

$$\int_a^b d(u\cdot v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv.$$

Из данного равенства получим формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример 11.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx.$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{bmatrix} = \left(x\sin x \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \left(x\sin x + \cos x \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. **Замена переменной в определённом интеграле**.

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная функция на $[a,b]$. Введем новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$.

Если $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$; $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, $f[\varphi(t)]$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

11.3. Несобственные интегралы

1. **Несобственные интегралы с бесконечными пределами.**
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех $a \le x \le \infty$.

Тогда

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом первого рода. Если предел существует, то интеграл существует или сходится, если предел не существует, то интеграл расходится (не существует), т.е. не имеет конечного значения.

Геометрический смысл несобственного интеграла заключается в том, что он выражает площадь бесконечной области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ (рис. 3).

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла с нижним бесконечным пределом

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \cdot$$

Можно рассмотреть несобственный интеграл, у которого оба предела бесконечные, при этом должны существовать оба интеграла, c – число:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Пример 11.3. Исследовать на сходимость несобственный интеграл (рис. 21): $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

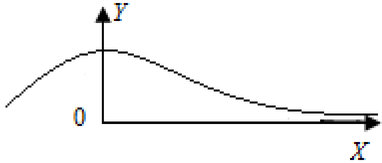

Рис. 21

Решение.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 11.4. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b = -\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b = \pi.$$

Если требуется установить, сходится ли данный интеграл или расходится, выгодно применять теоремы:

1. Если для всех $x(x\ge\alpha)$ выполняется неравенство $0\le f(x)\le\varphi(x)$ и если $\int_\alpha^\infty\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ тоже сходится и справедливо равенство $\int_\alpha^\infty f(x)dx \le \int_\alpha^\infty\varphi(x)dx$.

2. Если для всех $x(x\ge\alpha)$: $0\le\varphi(x)\le f(x)$, причем $\int_\alpha^\infty\varphi(x)dx$ расхо-

дится, то и $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ расходится.

3. Если $\int\limits_{\alpha}^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ сходится.

2. **Несобственные интегралы от функций, имеющих разрыв**

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x \le b$, а при $x = b$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, как о пределе интегральной суммы, поскольку этот предел может не существовать. Интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx \ ,$$

если предел существует, сходится, иначе – расходится.

Если функция имеет разрыв при $x = a$, то интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$$

если предел существует, сходится, иначе – расходится.

Если $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 внутри отрезка $[a,b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{x_0} f(x)dx + \int\limits_{x_0}^{b} f(x)dx$$

– существует, если существуют оба интеграла в правой части.

Пример 11.5. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c \to 1-0} \int\limits_{0}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{c \to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_{0}^{c} = -\lim_{c \to 1-0} 2(\sqrt{1-c} - 1) = 2$$

Интеграл сходится.

Пример 11.6. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0} \int\limits_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} + \lim_{a \to 0} \int\limits_{a}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{b \to 0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{b} - \lim_{a \to 0} \frac{1}{x}\Big|_{a}^{1} = \infty.$$

Интеграл расходится.

Несобственные интегралы от функций, имеющих разрыв, называются несобственными интегралами второго рода.

11.4. Геометрические приложения определенного интеграла

1. **Вычисление площади плоской фигуры**.

Площадь плоской фигуры $S=\int_a^b f(x)dx$, если $f(x)\geq 0$ (рис. 22).

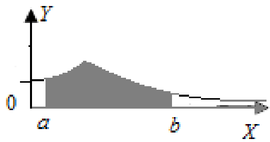

Рис. 22

Если фигура образована двумя функциями $f_2(x)\geq f_1(x)$ (рис. 23),

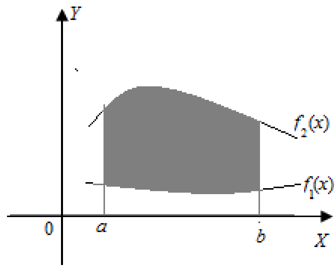

Рис. 23

то площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

Пример 11.7. Найти площадь, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $x+y=3$.

Решение. Найдем точки пересечения прямых и построим фигуру (рис. 24).

$$\begin{cases} x^2+1=y; \\ x+y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-2; \\ x_2=1. \end{cases}$$

$$S\int_a^b f(x)dx=\int_{-2}^{1}(3-x-x^2-1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

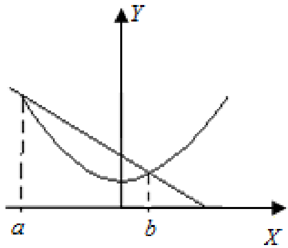

Рис. 24

Пусть функция задана в параметрической форме: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Тогда площадь фигуры вычисляют по формуле

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Пример 11.8. Вычислить площадь одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(t - \cos t),\ x = 0, t = 0, x = 2\pi a, t = 2\pi \cdot$$

Решение.

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_\alpha^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_\alpha^{2\pi} a(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= \left(a^2\left(t - 2\sin t\right) + \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^3.$$

Если кривая задана в полярных координатах: $r = f(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$, то площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi$$

Пример 11.9. Найти площадь, ограниченную кардиоидой:

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Решение. Так как фигура симметрична относительно оси OX, то вычислим половину площади (рис. 25).

$$S = \int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \left(1{,}5 + 2\cos\varphi + \cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

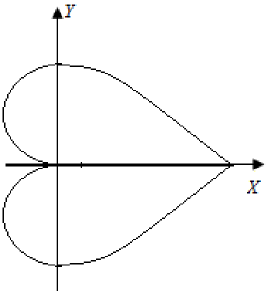

Рис. 25

Площадь фигуры равна $3a^2\pi$.

2. **Длина дуги кривой**.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Возьмем на дуге $\overset{\cup}{AB}$ точки $A, M_1, M_2, ..., M_i, B$,(рис. 26) и проведем хорды, которые обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$.

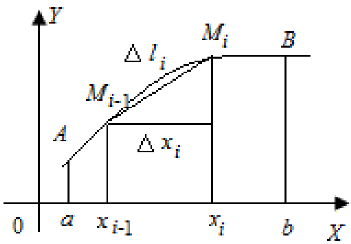

Рис. 26

Получим ломанную $AM_1...M_{n-1}...B$, вписанную в дугу AB. Длина ломаной: $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$. Длина дуги – предел: $L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Если на отрезке $[a,b]$ $f(x)$, $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует.

Пусть $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, тогда

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}.$$

По теореме Лагранжа оценим

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=\frac{f'(\zeta)\Delta x}{\Delta x},\ x<\varsigma<x+\Delta x.,\ l_n=\sum\sqrt{1+\left[f'(\varsigma)\right]^2}\Delta x_i.$$

По условию, $f(x)$ и $f'(x)$ – непрерывны, поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$L=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f')^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Пример 11.10. Найти длину дуги кривой $y=x^{\frac{3}{2}},\ 0\le x\le 4$.

Решение. Найдем производную функции:

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ 1+y'^2=1+\frac{9}{4}x=\frac{4+9x}{4}$$

$$L=\int_0^4\frac{\sqrt{4+9x}}{2}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{4+9x}=t,\ t_н=2,\ t_в=\sqrt{40}\\ x=\dfrac{(t^2-4)}{9},\ dx=\dfrac{2}{9}tdt\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{40}}t\frac{2}{9}tdt=\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^{\sqrt{40}}=$$

$$=\frac{1}{27}(40\sqrt{40}-8)=\frac{1}{27}8(10\sqrt{10}-1).$$

Если кривая задана параметрически: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\frac{\psi'^2}{\varphi'^2}}\varphi'dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}dt;\ a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta).$$

Пример 11.11. Найти длину дуги кривой с точностью до 2-х знаков после запятой, если она задана уравнениями $x=5\cos^3 t$, $y=5\sin^3 t$.

Решение.

Так как линия задана параметрическими уравнениями, то используем формулу:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'_t\right)^2+\left(\psi'_t\right)^2}\,dt.$$

Посчитаем производные функций:

$$\varphi'=5\cdot 3\cos^2 t\cdot\left(-\sin t\right)=-15\cos^2 t\sin t,$$

$$\psi'=5\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t=15\sin^2 t\cos t.$$

Для всей дуги изменение параметра $0\le t\le 2\pi$, вычислим четвертую часть длины, изменяя параметр $0\le t\le 0{,}5\pi$. Тогда

$$\frac{l}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(-15\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(15\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{15^2\cos^4 t\sin^2 t+15^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{15^2\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=$$

$$=15\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt=\frac{15}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=\frac{15}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{15}{4}\cdot\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-\frac{15}{4}\cdot(-1-1)=\frac{15}{2}\cdot$$

Тогда $l=4\cdot\frac{15}{2}=30$ ед.

Пусть кривая задана в полярных координатах: $r=r(\varphi)$

Тогда $x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi;\ x=r(\varphi)\cos\varphi;\ y=r(\varphi)\sin\varphi$.

$$x'_\varphi=\frac{dx}{d\varphi}=r'\cos\varphi-r\sin\varphi;\ y'_\varphi=\frac{dy}{d\varphi}=r'\sin\varphi+\cos\varphi;$$

$$x'^2+y'^2=r'^2\cos^2\varphi-2rr'\cos\varphi\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi+r'^2\sin^2\varphi+$$

$$+2rr'\sin\varphi\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi=r'^2+r^2.$$

Тогда $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$.

3. **Вычисление объема и площади поверхности вращения**.

Пусть имеется тело, для которого известна площадь сечения, перпендикулярного оси *OX* т.е. $S=S(x)$ (рис. 27).

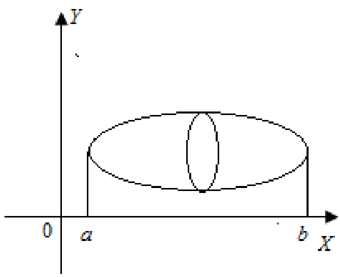

Рис. 27

Проведем плоскости, перпендикулярные оси OX. Они разобьют тело на слои, $V_{слоя} = S(x_i)\Delta x_i$ (цилиндр), тогда $V_n = \sum_{i-1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.\cdot$$

4. **Объем тела вращения**.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Ее можно вращать вокруг любой координатной оси и получать тело вращения.

Если ось вращения – ось OY, то объем тела вращения:

$$V_y = \pi\int_l x^2 dy.$$

Если ось вращения – ось OX, то объем тела вращения:

$$V_x = \pi\int_l y^2 dx..$$

5. **Площадь поверхности вращения**.

Разобьем $[a,b]$ на n частей и проведем ломаную. При вращении ломаной получаются усеченные конусы (цилиндры) (рис. 10).

Площадь поверхности $\Delta P_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1} + f(x_i)}{2} l_i$, длина хорды

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)}\Delta x_i,$$

$$D = \lim_{n\to\infty}\sum_i 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)}\Delta x_i = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Пример 11.12. Найти объем тела вращения вокруг оси OX кривой $2y = x^2$, ограниченной прямой $2x + 2y - 3 = 0$ (рис. 28).

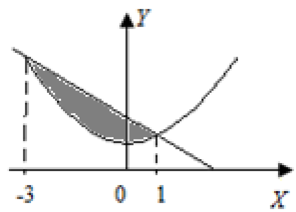

Рис. 28

Решение. Найдем точки пересечения кривых

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-2x}{x} \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}; \quad 2x + x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \; x_2 = -3.$$

Вычислим объем тела вращения полученной фигуры:

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^{1} \frac{x^4}{4} dx = \pi \left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{272}{15}\pi.$$

11.5. Определенный интеграл в экономике

1. Вычисление дневной выработки P за некоторое время t при известной производительности $p(t)$:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt.$$

Пример 13. Производительность труда некоторого цеха при выпуске продукции определяется формулой: $p(t) = 5t^2 - 3t - 10$. Найти дневную выработку за смену (смена – 6 часов).

Решение. Найти дневную выработку за смену

$$P = \int_{0}^{6} (5t^2 - 3t - 10)dt = \left(\frac{5t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} - 10t\right)\Bigg|_{0}^{6} = 246.$$

2. Вычисление стоимости перевозки груза C на некоторое расстояние l при заданном тарифе перевозки:

$$C = \int_{l_1}^{l_2} Mtdl.$$

Пример 14. Найти стоимость перевозки M тонн груза по железной дороге на расстояние 1 км при условии, что тариф y перевозки 1 тонны убывает на a рублей на каждом последующем километре.

Решение. Найдем функцию тарифа в общем виде: $T = y - al$. Тогда стоимость перевозки можно посчитать так:

$$C = \int_{0}^{l} MTdl = \int_{0}^{l} M(y - al)dl,$$

$$C = \int_0^1 M(y - al)dl = M\left(yl - a\frac{l^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = M\left(yl - a\frac{l^2}{2}\right).$$

3. Прогнозирование материальных затрат.

Пример 15. Мощность потребления y городом электроэнергии выражается формулой:

$$y = \begin{cases} a, \ \ t < 6; \\ a + b sin\left(\dfrac{\pi}{18}(t - 6)\right), \ \ t \leq 6, \end{cases}$$

где $t -$ текущее время суток. Найти суточное потребление энергии при условиях $a = 15000$ кВт, $b = 12000$кВт.

Решение. Суточное потребление энергии вычислим по формуле

$$\Pi = \int_0^t y dt.$$

Так как в сутках 24 часа, то

$$\Pi = \int_0^{24} y dt = \int_0^6 a dt + \int_6^{24}\left(a + b sin\left(\frac{\pi}{18}(t - 6)\right)\right)dt =$$

$$= at\Big|_0^6 + \left(at - \frac{b\pi}{18}\cos\left(\frac{\pi}{18}(t - 6)\right)\right)\Bigg|_6^{24} =$$

$$= 6a + \left(24a + \frac{b\pi}{18} - 6a + \frac{b\pi}{18}\right) = 24a - \frac{b\pi}{9}.$$

Подставим значения параметров, получим:

$$\Pi = 24a + \frac{b\pi}{9} = 24 \cdot 15000 + \frac{12000\pi}{9} \approx 364187.$$

4. Дисконтирование денежного потока.

Определение начальной суммы A_0 через время t по ее конечной величине $A(t)$ при процентной ставке p.

1) для простых процентов: $A(t) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}t\right)$, $A_0 = \frac{A(t)}{\left(1+\frac{p}{100}t\right)}$,

2) для сложных процентов: $A(t) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, $A_0 = A(t)e^{-\frac{pt}{100}}$,

3) общая сумма, вложенная в банк:

$$U_d(T) = \int_0^T A_0 dt = \int_0^T A(t)e^{-\frac{pt}{100}}dt,$$

где $A(t) -$ ежегодный поступающий доход, $U_d(T) -$ дисконтная сумма за время $[0, \ T]$.

Пример 16. Какую сумму следует внести за время $[0,\ T]$ в сбербанк под $p = 10\%$ годовых, чтобы ежегодный доход равнялся $A(t) = 1000$ рублей?

Решение. Будем проводить вычисления в тысячах :

$$U_d(T) = \int_0^T 1e^{-\frac{10t}{100}}dt = -10e^{-0,1T} + 10.$$

Пусть $T = 3$ года, тогда $U_d(3) = 2,59$ (тыс. рублей).

При $T = 10$ лет $U_d(10) = 6,23$ (тыс. рублей).

Глава 12. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

12.1. Основные понятия

Числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$, записанная в виде суммы

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом или просто – рядом.

$a_1, a_2, ..., a_n$ – члены ряда, a_n, – общий член ряда.

Ряд считается заданным, если известна формула общего члена или несколько членов ряда.

Например, гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ..$ или ряд членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Суммы конечного числа членов ряда называются частичными суммами $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Сами частичные суммы образуют последовательность частичных сумм.

Ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность частичных сумм сходится к какому-нибудь числу S, которое называется суммой ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если последовательность частичных сумм не имеет предела, является расходящейся, то и ряд расходится.

Пример 12.1. Показать, что ряд сходится: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Рассмотрим сумму $n-$ первых членов

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

Представим общий член ряда в виде суммы простых дробей:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

$$1 = A(n+1) + Bn, \quad A = 1, \quad B = -1,$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Так как сумма равна числу, то ряд сходится.

Пример 12.2. Определить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 - 1 + 1 - 1 + ...) = \begin{cases} 0, n - \text{четное}; \\ 1, n - \text{нечетное}. \end{cases}$

Так как сумма не определена, то ряд – расходится.

12.2. Свойства сходящихся рядов

Теорема1. Если сходится ряд вида

$a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} + ... + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,то сходится ряд вида $a_{k+1} + ... + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и наоборот, т. е. на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа первых членов ряда.

Теорема 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, C – константа.

Теорема 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то их суммы и разности сходятся: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$.

Теорема 4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член ряда стремится к нулю, т. е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Данную теорему называют необходимым признаком сходимости ряда.

Теорема 5. Если общий член ряда не стремится к нулю $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд – расходится.

Пример 12.3. Определить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$.

Решение. Оценим предел общего члена ряда $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Следовательно, ряд – расходится.

12.3. Знакоположительные числовые ряды. Признаки сходимости

Любая последовательность неотрицательных членов представляет собой ряд с неотрицательными членами.

Теорема. Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограниченной.

1. **Признак сравнения**.

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство: $a_n \le b_n$. Тогда возможны два случая: 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; 2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

На практике этот признак часто используется в предельной форме.

Если предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = q$ (число), то ряды являются равно сходящимися, т. е. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится; если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Пример 12.4. Определить, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^n}$.

Решение. Для сравнения выберем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$. Этот ряд как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия имеет сумму:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{2(1-0{,}5)} = \frac{1}{4},$$

следовательно – сходится.

Так как для всех n выполняется неравенство: $a_n \le b_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^n}$ тоже сходится.

Пример12.5. Определить, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Решение. Для сравнения выберем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$. Этот ряд сходится. Найдем предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{n\,(n+1)}{n^2} = 1,$$

так как предел равен числу, то искомый ряд сходится.

2. **Признак Д'аламбера**.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами и существует

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$ Тогда возможны три случая:

1. если $q<1,$ ряд сходится;
2. если $q>1,$ ряд расходится;
3. если $q=1,$ ничего определенного о поведении ряда сказать нельзя.

Пример 12.6. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$

Решение. Определим члены ряда $a_n = \frac{1}{n!},\ \ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$

следовательно, по признаку Д'аламбера ряд сходится.

3. **Признак Коши**.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами и существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда возможны три случая:

1. если $q<1,$ ряд сходится;
2. если $q>1,$ ряд расходится;
3. если $q=1,$ ничего определенного о поведении ряда сказать нельзя.

Пример 12.7. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

Решение. Оценим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

4. **Интегральный признак Коши**.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами можно заменить значениями некоторой функции $f(x) = a_n -$ положительной, непрерывной, убывающей на полуинтервале $[1, +\infty)$ и существует $\int_1^{+\infty} f(x)dx,$ то если интеграл сходится, то и ряд сходится, если интеграл расходится, то и ряд расходится.

Пример 12. 8. Найти области сходимости и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^k}$ $(x \geq 1).$

Вычислим интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{x^{k-1}}\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \begin{cases} 0, k > 1, \text{ряд сходится} \\ +\infty \text{ или неопределен}, k \leq 1, \text{ряд расходится} \end{cases}$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \begin{cases} \text{сходится}, \ k > 1, \\ \text{расходится}, \ k \leq 1. \end{cases}$

Данный ряд называется гармоническим.

12.4. Знакочередующиеся ряды

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + .a_2 - ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

называется знакочередующимся рядом.

Признак Лейбница. Если абсолютные члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ монотонное убывают: $a_1 > a_2 > a_3 > ...$ и общий член ряда стремится к нулю $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд сходится.

Следствие из признака Лейбница: погрешность при приближенных вычислениях суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превосходят значения первого члена остатка ряда.

Пример 12. 9. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) члены ряда монотонно убывают: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}...$, 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Условия признака выполняются, следовательно, ряд сходится.

12. 5. Знакопеременные ряды

Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным рядом $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Рассмотрим ряд состоящий из абсолютных членов знакопеременного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

Признак является достаточным, но не необходимым, так как существуют ряды, которые сами сходятся, а ряды из их модулей расходятся.

Если ряд, составленный из абсолютных членов ряда сходится, то сам ряд сходится абсолютно и называется абсолютно сходящимся рядом.

Если ряд из модулей членов ряда расходится, то сам ряд называется условно сходящимся.

Пример 12. 10. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение. Предложенный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Следовательно, ряд сходится условно.

Пример 12.11. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

Решение. Предложенный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, ряд сходится абсолютно.

12. 6. Функциональные ряды

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$ называется функциональным рядом, $x \in R, n \in N$.

Если при $x_0 \in R$ функциональный ряд сходится, то говорят, что этот ряд сходится в точке x_0.

Если функциональный ряд сходится в каждой точке области $R_1 \in R$, то этот ряд называется сходящимся в области R_1.

Сама область R_1 называется областью сходимости.

Критерий Коши. Для того, что функциональный ряд сходился в области R_1, необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого положительного числа ε и любого $x \in R_1$ существовал такой номер члена ряда n_0, для которого бы выполнялось условие:

$$\left| f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+2}(x) + \ldots + f_{n_0+k}(x) \right| < \varepsilon, \quad k \in N.$$

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используют признак Д'аламбера или признак Коши. При этом решают неравенства:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| < q < 1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(x)\right|} < q < 1,$ если находят область сходимости,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| > q > 1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(x)\right|} > q > 1,$ если находят область расходимости, Пример 12. 12. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}.$

Решение. Оценим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^{n+1}x}{n+1}\frac{n}{\ln^n x}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^n x\ln x}{n+1}\frac{n}{\ln^n x}\right| = |\ln x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = |\ln x|,$$

$$|\ln x|<1, \quad -1<\ln x<1, \quad \frac{1}{e}<x<e.$$

Получили область абсолютной сходимости $\frac{1}{e}<x<e.$

Необходимо исследовать поведение ряда на границах области.

1) Пусть $x=\frac{1}{e}.$ Подставим точку в ряд и получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\ln\frac{1}{e}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Этот ряд сходится, хоть и условно.

2) Пусть $x=e$. Подставим точку в ряд и получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln e)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Этот ряд расходится.

Таким образом, область сходимости ряда имеет вид: $\left[\frac{1}{e}, e\right).$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области R_1, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε и любого $x\in R_1$ существует такой номер члена ряда n, что для остатка ряда выполняется условие:

$$\left|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+k}(x)+\ldots=\sum_{k=n}^{\infty}f_k(x)\right|<\varepsilon, \quad k>n.$$

Признак Вейерштрасса. Если для сходящегося в области R_1 функционального ряда найдется сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. такой, что для любого $x \in R_1$ найдется такой номер члена ряда N_0, что для $n > N_0$ выполняется условие:

$$\left| f_n(x) \right| \le a_n,$$

то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно в области R_1.

Числовой ряд в этом случае называется мажорирующим рядом для функционального ряда.

12. 7. Свойства равномерно сходящихся рядов

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится в области R_1.

Тогда

1. равномерная сходимость ряда не нарушится, если умножить ряд на ограниченную функцию, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x) f_n(x)$;

2. если функции $f_n(x)$ непрерывны в области R_1, частичная сумма S_n тоже непрерывна в области R_1;

3. если функции $f_n(x)$ непрерывны в области R_1, имеет место равенство: $\int\limits_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_l f_n(x) dx, \quad l \in R_1$,

т. е. равномерно сходящиеся ряды можно интегрировать

4. если на отрезке $[a, b]$ функции $f_n(x)$ дифференцируемые, то имеет место равенство $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$,

т. е. равномерно сходящиеся ряды можно дифференцировать.

12. 8. Степенные ряды

Ряд виды

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

называется степенным рядом, где $a_0, a_1, ..., a_n$ – коэффициенты степенного ряда.

Множество значений x, при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости. Эта область для степенного ряда не является пустой, так как степенной ряд всегда сходится при $x = 0$.

Теорема Абеля 1. Теорема состоит из двух частей.

1) Если степенной ряд сходится при $x = x_0$ ($x \neq 0$), то он сходится, причем абсолютно, для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| < |x_0|.$$

2) Если степенной ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится не при всех x и не только в точке $x = 0$, то существует такое число $R > 0$, что ряд сходится абсолютно при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$ (рис. 11).

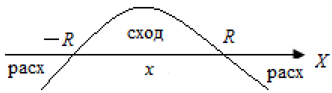

Рис. 11

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости, Число R называется радиусом области сходимости степенного ряда.

Поведение степенного ряда на границах области в точках $x = \pm R$ решается отдельно.

Теорема. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, радиус сходимости степенного ряда равен $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Пример 12. 13. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Решение. Определим радиус области сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1.$$

Следовательно, область сходимости имеет вид $(-R,\,R)=(-1,1)$.

Исследуем поведение ряда на границах области.

1) $x=-1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$ – знакочередующийся ряд, по признаку Лейбница сходится;

2) $x=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится.

Таким образом, область сходимости имеет вид $[-1,1)$.

Пример 12. 14. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$.

Решение. Определим радиус области сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Следовательно, область сходимости имеет вид $(-R,\,R)=\{0\}$.

Пример 12. 15. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

Решение. Определим радиус области сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, область сходимости имеет вид $(-R,\,R)=(-\infty,\,+\infty)$.

12. 9. Свойства степенных рядов

Пусть некоторая функция $f(x)$ является суммой степенного ряда с интервалом сходимости $(-R,\,R)$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R,\,R)$ и пишут:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R,\,R)$, то она на нем дифференцируема и производная равна

$$f'(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)'=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

Интервал сходимости тот же.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, то она на нем интегрируема и интеграл равен

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right)dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} a_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1 x dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx + \ldots, \quad \text{где } x_1,\, x_2 \in (-R,\, R).$$

Интервал сходимости тот же.

Иногда рассматривается разложение функции в ряд более общего вида

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

Он приводится к предыдущему ряду заменой $t = x - x_0$. В этом случае говорят, что функция раскладывается в ряд по степеням $x - x_0$.

Данный ряд можно интегрировать и дифференцировать.

Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд.

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, то такое разложение единственное.

Доказательство. Так как $f(x)$ разлагается в степенной ряд, значит сама функция является его суммой. Ряд можно многократно дифференцировать. Найдем производные функции до (n) порядка включительно:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \ldots$$

....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_n + \ldots = n!a_n + \ldots$$

Пусть $x = 0$. Найдем значения производных функции при этом x:

$$f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 3\cdot 2a_3, \ldots, \; f^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Выразим коэффициенты разложения:

$$a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots, \; a_n. = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Следовательно, все коэффициенты выражены единственным образом, т. е. функция разлагается в ряд и имеет вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

Данный ряд называется рядом Маклорена для функции $f(x)$.

Более общий ряд используют при разложении в окрестности точки $x-x_0$. Он называется рядом Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

12. 10. Разложение функций в ряд Маклорена

Запишем разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.

1. $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots,\ (-R,R)=(-\infty,+\infty),$

2. $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\ldots,$
$(-R,R)=(-\infty,+\infty),$

3. $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,$
$(-R,R)=(-\infty,+\infty),$

4. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,\ (-R,R)=[-1,1),$

5. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n+\ldots,\ (-R,R)=(-1,1],$

6. $\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,\ (-R,R)=(-1,1],$

7. $\mathrm{arctg}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\ldots,\ (-R,R)=[-1,1],$

8. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$
$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ \ (-R,R)=(-1,1).$

Пример 12. 16. Разложить многочлен $f(x)=x^3-5x^2-8x+3$ по степеням $(x-2)$.

Решение. Используем разложение в ряд Тейлора при $x = 2.$ Найдем производные функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 8, \quad f''(x) = 6x - 10, \quad f'''(x) = 6.$$

Найдем значения производных и функции в точке $x = 2.$

$$f(2) = 7, \quad f'(2) = 0, \quad f''(2) = 2, \quad f'''(2) = 6.$$

Разложение имеет вид

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 7 + \frac{x-2}{1!}0 + \frac{(x-2)^2}{2!}2 + \frac{(x-2)^3}{3!}6 = 7 + (x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Пример 12. 17. Разложить функцию $f(x) = (1-x)e^{-2x}$ в ряд по степеням $x.$

Решение. Воспользуемся разложением функции e^t в ряд Маклорена:

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + ... + \frac{1}{n!}t^n + ...$$

Пусть $t = -2x.$ Получим

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{1}{3!}8x^3 + ... + \frac{(-1)^n}{n!}(2x)^n + ...,$$

$$(1-x)e^{-2x} = (1-x) - 2x(1-x) + 2x^2(1-x) - \frac{4}{3}x^3(1-x) + ... + \frac{(-1)^n}{n!}(2x)^n(1-x) + ...$$

12. 11. Применение степенных рядов для приближенных вычислений

Степенные ряды имеют разные приложения. С их помощью с разной степенью точности можно вычислять значения функций, пределов, находить приближенное значение определенных интегралов, приближенное решение дифференциальных уравнений.

1. Вычисление значений функций.

Пример 12.18. Найти значение $f(x) = \sin x$ функции в точке $x = 1.$

Решение. Используем разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена.

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1 + \frac{1}{5!}1 - \frac{1}{7!}1 + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}1 + ...,$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

Начиная с четвертого элементы, сумма ряда не превосходит значения $\varepsilon = \dfrac{1}{5040} = 0{,}0002.$

Пример 12.19. Вычислить значение $f(x) = \sqrt[3]{9}.$

Решение. Представим функцию в виде:

$$f(x)=\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=\sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{8}\right)}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся разложением бинома при x:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[x=\frac{1}{8};\,m=\frac{1}{3}\right]=2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2\cdot 64}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6\cdot 64\cdot 8}+\ldots\right]=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{24}-\frac{1}{576}+\frac{5}{41472}-\ldots\right]=2[1+0{,}0417-0{,}0017+0{,}00012]=$$

$$=2{,}0801;\quad \varepsilon=0{,}0001.$$

Пример 12. 20. Вычислить значение натурального логарифма $\ln 3$.

Решение. Используем разложение

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,\ (-R,R)=(-1,1],$$

$$\ln(x-1)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\ldots-\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\ldots,\ (-R,R)=(-1,1],$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\ldots\right)\ (-R,R)=(-1,1].$$

Пусть $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{N+1}{N}$ $(N>0)$. Тогда $x=\dfrac{1}{2N+1}$.

$$\ln(N+1)-\ln N=\ln\frac{N+1}{N}=2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\ldots\right).$$

Пусть $N=1$.

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right)\approx 0{,}6932.$$

Вычислим

$$\ln(2+1)-\ln 2=(N=2)=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ldots\right),$$

$$\ln 3=\ln 2+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right)\approx 1{,}0985.$$

2. Вычисление определенных интегралов.

Пример 12.21. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$

Решение. Используем разложение на $(-R, R) = (-\infty, +\infty)$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \ldots.$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{1}{3!\cdot 3}x^3 + \frac{1}{5!\cdot 5}x^5 - \frac{1}{7\cdot 7}x^7 + ..\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots \approx 0{,}94611.$$

Точность вычислений $\varepsilon = \frac{1}{35280} < 0{,}00003.$

3. Решение дифференциальных уравнений.

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Воспользуемся разложением функции в ряд Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Здесь $y(x) = y(x_0),\ y'(x_0) = f(x_0, y_0),\ y''(x_0) = (y'(x_0))',\ldots.$

Пример 12.22. Записать пять членов решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$

Решение. Выпишем или найдем значений функции и производных от нее в точке (0, 1).

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

$$y'' = \left(x^2 + y^2\right)' = 2x + 2yy', \quad y''(0) = 2,$$

$$y''' = (2x + 2yy')' = 2 + 2y'y' + 2yy'', \quad y'''(0) = 8,$$

$$y^{(4)} = (2 + 2y'y' + 2yy'')' = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \quad y^{(4)}(0) = 28.$$

Тогда решение уравнения можно представить так:

$$y = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4.$$

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
2. Дифференцируемость функции.
3. Основные правила дифференцирования.
4. Таблица производных основных элементарных функций. Выводы производных элементарных функций.
5. Уравнения касательной и нормали к графику функций в точке.
6. Дифференцирование сложной функции.
7. Дифференцирование обратной функции.
8. Производные параметрических и неявных функций.
9. Логарифмическая производная.
10. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной.
11. Дифференциал функции, геометрический и физический смысл дифференциала.
12. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
13. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши.
14. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
15. Интервалы монотонности. Необходимый и достаточный признаки монотонности функции.
16. Экстремумы функции. Необходимый и достаточный признаки экстремума.
17. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
18. Выпуклость и вогнутость кривой. Признак выпуклости и вогнутости.
19. Асимптоты линий.
20. Точки перегиба. Необходимый и достаточный признаки нахождения точек перегиба.
21. Общая схема исследования функции.
22. Производные в экономике
23. Экономический смысл производной второго порядка
24. Эластичность функции
25. Комплексные числа и операции над ними.
26. Разные формы записи комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа.
27. Тригонометрическое представление комплексного числа.
28. Вычисление степени и коня n степени из комплексного числа.
29. Неопределенный интеграл и его свойства.
30. Таблица основных интегралов.

31. Методы интегрирования (табличное интегрирование и метод подстановки).
32. Метод интегрирования по частям.
33. Разложение многочленов на простые множители.
34. Интегрирование рациональных функций.
35. Интегрирование тригонометрических функций.
36. Интегрирование простейших иррациональностей.
37. Определение определенного интеграла его геометрический смысл.
38. Основные свойства определенного интеграла.
39. Основные оценки определенного интеграла.
40. Вычисление определенного интеграла.
41. Методы вычисления определенного интеграла(замена, по частям).
42. Интегрирование четных и нечетных функций.
43. Вычисление площади криволинейной трапеции.
44. Вычисление длины дуги кривой.
45. Вычисление объема тела вращения.
46. Вычисление площади тела вращения.
47. Несобственный интеграл.
48. Числовой ряд. Что называется общим элементом ряда?
49. Что называется частичной суммой ряда? Что такое сумма ряда?
50. Необходимый признак сходимости ряда.
51. Достаточный признак расходимости ряда.
52. Теорема о сравнении двух рядов с положительными элементами.
53. Признак Даламбера.
54. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши.
55. Доказать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $p>1$
56. Какой ряд называется знакочередующимся?
57. Признак Лейбница для знакочередующегося ряда.
58. Абсолютная сходимость ряда, условная сходимость ряда.
59. Какой ряд называется функциональным?
60. Что называется областью сходимости функционального ряда?
61. Какой ряд называется степенным?
62. Теорема Абеля.
63. Радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда.
64. Теоремы о дифференцировании и интегрировании степенных рядов.
65. Что называется рядом Тейлора функции $f(x)$? Как определяются коэффициенты ряда Тейлора?
66. Какой ряд называется рядом Маклорена?
67. Применение разложения в ряд Маклорена функций

$$e^x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad (1+x)^n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Практикум по высшей математике для экономистов: учебное пособие для вузов / Кремер Н. Ш., Тришин И. М., Путко Б. А. и др.; под ред. Проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТА-ДАНА, 2005. – 423 с.

2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. Д. ф. – м. н. А. П. Рябушко. – Минск, Изд-во Вышэйшая школа, в трех частях, Ч. 1, 1990. – 270 с.

3. Математический анализ. Ч.1: учебное пособие / Редькин Г. М., Горлов А. С., Красюкова Е. И. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2019. – 128 с.

4. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие / Феоктистов Ю. А. – Белгород: Изд-во БГТУ, 201 . – с.

5. Математика.Ч.1: учебное пособие / Никифоров В. М. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. – 333 с.

Содержание

Учебное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. РЯДЫ.

Составители**: Окунева** Галина Леонидовна
Польшина Лидия Борисовна
Овчарова Наталья Васильевна

Подписано в печать 10.03.21. Формат 60х84/16. Усл. печ. л 5,6.. Уч.-изд. л. 5,4.
Тираж 60 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46