**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова**

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Белгород
2020

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.
# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Утверждено ученым советом университета в качестве учебного пособия для студентов очной формы обучения всех специальностей*

Белгород
2020

УДК 519.8(07)
ББК 22.1 я7
А64

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент Белгородского государственного технического университета им. В. Г. Шухова *А. С. Горлов*

А64 **Линейная** алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / Г. Л. Окунева, Л. Б. Польшина, Н. В. Овчарова. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2020. – 88 с.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта высшего профессионального образования и охватывает такие разделы линейной алгебры и аналитической геометрии как матрицы и их применение, определители, системы уравнений, прямая на плоскости и в пространстве, плоскость, кривые второго порядка, функции, предел функции, их применение в экономике. Помимо теоретического материала пособие содержит примеры решения задач, контрольные работы по разделу, вопросы к зачету. Пособие может использоваться для самостоятельного изучения лекционного курса и выполнения практических заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения экономических специальностей.

Издание публикуется в авторской редакции.

**УДК 519.08(07)**
**ББК 22.1 я7**

# ВВЕДЕНИЕ

Вниманию студентов заочной формы обучения специальности «Экономика» предлагается данное пособие с изложением основных тем по дисциплине «Математика» за первый семестр обучения.

В пособии приведено много примеров, которые иллюстрируют изучаемый материал.

В начале пособия студентам предлагаются варианты первой контрольной работы. Номер варианта совпадает с последней цифрой зачетной книжки.

Контрольную работу следует оформить в обычной тетради или на листах формата $A4$ и сдать преподавателю. После проверки на осенней сессии состоится собеседование студента с преподавателем по работе. В результате собеседования и решения стандартных задач по темам первого семестра студент получает оценку.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

1. Два различных по качеству вида сливочного масла продаются в трех магазинах. Матрица $A$ – объемы продаж этих продуктов в магазинах в 1–м квартале, матрица $B$ – объемы продаж масла в магазинах во 2–м квартале (в млн. руб). Определить:1) объем продаж за два квартала; 2) прирост продаж во 2–ом квартале по сравнению с первым.

1.1. $A=\begin{pmatrix}3&4\\7&2\\5&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&5\\6&4\\7&5\end{pmatrix}$ 1.2. $A=\begin{pmatrix}1&4\\5&7\\3&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&5\\6&6\\4&1\end{pmatrix}$

1.3. $A=\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\5&3\\3&3\end{pmatrix}$ 1.4. $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\\4&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\4&1\end{pmatrix}$

1.5. $A=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\\3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&8\\3&4\\2&6\end{pmatrix}$ 1.6. $A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\\5&8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&3\\4&4\\6&7\end{pmatrix}$

1.7. $A=\begin{pmatrix}7&3\\5&2\\4&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}8&4\\6&1\\5&3\end{pmatrix}$ 1.8. $A=\begin{pmatrix}4&3\\5&4\\2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&4\\6&3\\3&3\end{pmatrix}$

1.9. $A=\begin{pmatrix}2&3\\5&4\\3&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&4\\6&3\\7&8\end{pmatrix}$ 1.10. $A=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\\6&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&4\\6&7\\3&4\end{pmatrix}$

2. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если

2.1. $f(x)=x^2-3x+5$, $A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix}$

2.2. $f(x)=2x^2-x+3$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$

2.3 $f(x)=3x^2-2x+4$ $A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}$

2.4. $f(x)=-x^2+3x-4$ $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}$

2.5. $f(x)=4x^2-5x+2$

$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

2.6. $f(x)=x^2+4x-6$

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2.7. $f(x)=-2x^2+5x-1$

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.8. $f(x)=-4x^2+3x-2$

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.9. $f(x)=-3x^2+2x-4$

$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2.10. $f(x)=2x^2+6x-7$

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. Решить систему уравнений тремя способами: а) по правилам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=11 \\ x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=-2 \\ 3x_1+x_2-x_3=8 \\ -2x_1-x_2+3x_3=6 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=9 \\ 2x_1+2x_2=8 \\ 4x_1+2x_2+2x_3=10 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3=61 \\ 2x_1+4x_2+3x_3=11 \\ x_1-5x_2-2x_3=-5 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9 \\ 2x_1-x_2-x_3=10 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9 \\ x_1+x_2-x_3=-2 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12 \\ x_1+2x_2+4x_3=6 \\ 5x_1+x_2+2x_3=3 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3=6 \\ x_1+x_2+2x_3=4 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=10 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5 \end{cases}$

4. Дана матрица прямых затрат $A$. Найти изменение векторов:
а) конечного продукта $\Delta Y$ при данном изменении вектора валового продукта $\Delta X$ ;
б) валового выпуска $\Delta X$ при необходимом изменении вектора конечного продукта $\Delta Y$ .

4.1. $A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}100\\ 120\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}92\\ 138\end{pmatrix}$

4.2. $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.4\\ 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}140\\ 100\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}52\\ 104\end{pmatrix}$

4.3. $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.1\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}200\\ 100\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}82\\ 110\end{pmatrix}$

4.4. $A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.1 & 0.5\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}150\\ 100\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}82\\ 110\end{pmatrix}$

4.5. $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.4\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}200\\ 100\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}44\\ 88\end{pmatrix}$

4.6. $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.5\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}100\\ 300\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}130\\ 260\end{pmatrix}$

4.7. $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.3 & 0.4\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}200\\ 150\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}144\\ 96\end{pmatrix}$

4.8. $A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.4\\ 0.2 & 0.5\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}50\\ 100\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}28\\ 14\end{pmatrix}$

4.9. $A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.1\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}150\\ 60\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}57\\ 114\end{pmatrix}$

4.10. $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.5\\ 0.4 & 0.3\end{pmatrix}$ а) $\Delta X=\begin{pmatrix}200\\ 150\end{pmatrix}$ б) $\Delta Y=\begin{pmatrix}86\\ 129\end{pmatrix}$

5. Выяснить, в каком отношении должны находиться национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли $A$.

5.1. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$ 5.2. $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$

5.3. $A=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$ 5.4. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

5.5. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$ 5.6. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$

5.7. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$ 5.8. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

5.9. $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ 5.10. $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

6. Даны вершины $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$ треугольника. Найти уравнения и длины высоты $CD$ и медианы $CE$..

6.1. $A(3;\ 0), B(-5;\ 6), C(-4;\ 1)$ 6.2. $A(10;\ 2), B(2;\ 8), C(3;\ 3)$

6.3. $A(6;\ 2), B(-2;\ 8), C(-4;\ 1)$ 6.4. $A(8;\ 3), B(0;\ 9), C(1;\ 4)$

6.5. $A(1;\ 7), B(-3;\ -1), C(11;\ -3)$ 6.6. $A(1;0), B(-1;4), C(9;5)$

6.7. $A(1;\ -2), B(7;\ 1), C(3,\ 7)$ 6.8. $A(-3;\ 8), B(-6;\ 2), C(0;\ -5)$

5.9. $A(-1;\ -4), B(9;\ 6), C(-5;\ 4)$ 6.10. $A(10;\ -2), B(4;\ 5), C(3;\ -1)$

7. Привести уравнения кривой второго порядка $f(x,y)=0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax+By+C=0$. Построить графики кривой и прямой.

7.1. $\begin{matrix} x^2+y^2-4y+3=0 \\ 3x+y-3=0 \end{matrix}$ 7.2. $\begin{matrix} 2x^2+y^2-12x+10=0 \\ x+y-2=0 \end{matrix}$

7.3. $2x^2+8x+y+7=0$
$2x+y+3=0$

7.4. $y^2+x+4y+3=0$
$x+2y+2=0$

7.5. $x^2-2x+y^2+6y+6=0$
$2x-y-3=0$

7.6. $x^2-2x+y=0$
$y+x-2=0$

7.7. $x^2-4x-4y^2=0$
$\sqrt{3}x-2y=0$

7.8. $4x^2+8x+9y^2-18y-23=0$
$2x-3y-1=0$

7.9. $x^2+4x-y+5=0$
$3x+5y-13=0$

7.10. $x^2+8x+y^2-2y+1=0$
$2x+y-1=0$

8. а) Найти точку $Q$, симметричную точке $M$ относительно плоскости

8.1. $M(1;\,0;\,1)$
$2x+6y+4z-25=0$

8.2. $M(-1;\,0;\,-1)$
$2x+6y-2z+11=0$

б) Найти точку $Q$ ,симметричную точке $M$ относительно прямой

8.3. $M(0;\,-3;\,-2)$
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}$$

8.4. $M(2;\,-1;\,1)$
$$\frac{x-4{,}5}{1}=\frac{y+3}{-0{,}5}=\frac{z-2}{1}$$

8.5. Найти точку $Q$ ,симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$

8.6. Найти проекцию точки $P(5;1-1)$ на плоскости $2x-t+32+23=0$

8.7. Найти точку $Q$ симметричную $A(1;2;1)$ относительно прямой
$$\frac{x+2}{3}=\frac{7}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

8.8. Найти точку $Q$, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$

8.9. Найти точку $Q$, симметричную точке $P(3;4;5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$

8.10. Найти точку $Q$, симметричную точке $P(3;4;5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$

9. Решить задачу, используя определение и свойства окружности.

9.1 Составить уравнение окружности, если центр окружности находится в точке $C(-4;\,5)$, а окружность проходит через точку $M(-1;\,1)$.

9.2. Составить уравнение окружности, если концы одного из диаметров окружности имеют координаты $A(0;\,4)$ и $B(6;\,0)$.

9.3. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(0;\,1)$; $M_2(2;\,0)$; $M_3(3;\,-1)$.

9.4. Найти точки пересечения окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ и прямой $y=2x$.

9.5. Найти точки пересечения окружности $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ и прямой $y=x-3$.

9.6. Найти уравнение окружности, касающейся оси $OX$ в начале координат и пересекающей ось $OY$ в точке $A(0;\,10)$.

9.7. Найти уравнение окружности, касающейся оси $OY$ в начале координат и пересекающей ось $OX$ в точке $B(-12;\,0)$.

9.8. Написать уравнение касательных, проведенных из точки $M(0;\,3)$ к окружности: $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

9.9. Найти уравнение окружности, которая касается осей координат и проходит через точку $A(4;\,-2)$.

9.10. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $3x+4y-12=0$, $4x-3y+12=0$, $y=0$.

10. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

10.1. его полуоси равны 6 и 4;

10.2. расстояние между фокусами равно 10, а большая ось равна 16;

10.3. малая полуось равна 4, и расстояние между фокусами равно 10;

10.4. большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,5;

10.5. малая полуось равна 8, а эксцентриситет равен 0,6;

10.6. сумма полуосей равна 12, расстояние между фокусами равно $6\sqrt{2}$.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

10.7. его полуоси равны соответственно 9 и 4;

10.8. расстояние между фокусами 12 и эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;

10.9. его малая ось равна 16, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;

10.10. его большая ось равна 20, расстояние между фокусами равно 16.

11. Заданы функция спроса $q = q(p)$ и предложения $s = s(p)$, где $q$ и $s$ – количество товара, соответственного покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, $p$ – цена единицы товара. Найти а) равновесную цену, т. е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются.

11.1. $q = \dfrac{9p+21}{p+3}$, $s = p+5$ 11.2. $q = \dfrac{12p+34}{p+4}$, $s = p+7$

11.3. $q = \dfrac{p+10}{p+1}$, $s = p-6$ 11.4. $q = \dfrac{8p-1}{p+4}$, $S = p-2$

11.5. $q = \dfrac{12p-15}{p+5}$, $s = 3p-4$ 11.6. $q = \dfrac{8p}{p+5}$, $s = 2p-3$

11.7. $q = \dfrac{13p-12}{p+6}$, $s = 2p-3$ 11.8. $q = \dfrac{2p+4}{p-3}$, $s = 3p-4$

11.9. $q = \dfrac{p+6}{p-2}$, $s = 2p-7$ 11.10. $q = \dfrac{3p+5}{p-4}$, $s = p-5$

12. Найти область определения функции.

12.1 $y = \dfrac{\sqrt{35-2x-x^2}}{\lg x}$, 12.2. $y = \dfrac{\lg\left(-x^2+3x+4\right)}{\sqrt{x-2}}$,

12.3. $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-6x+9}} + \dfrac{3-x}{x-1}$, 12.4 $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-4}} + \lg\left(x^2-6x+9\right)$

12.5. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}} + \lg\left(x^2-3x+2\right)$, 12.6., $y = \sqrt{\sin x}\,\dfrac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}$

12.7. $y = \dfrac{2x}{x^2-1} + \log_2\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$, 12.8. $y = \arcsin\dfrac{x^2+1}{x-1} + \sqrt{x^2-1}$,

12.9. $y = \dfrac{\sqrt{x(x-1)^5}}{x+2}$, 12.10. $y = \log_3(x+21) - \dfrac{27x}{3^{x-7}-3}$.

13. Вычислить пределы:

13.1. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-6}}{3x^2-17x+10}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-4}\right)^{5-2x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 6x}{x}$

13.2. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x-4}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x-2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 6x}{5x}$

13.3. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6x^2-23x-4}{\sqrt{1+2x}-3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x+7}{2x^2+5x+3}\right)^{2x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-tg2x}{x}$

13.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-10x+7}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{2x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x+tg4x}{5x}$

13.5. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-4}}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+3}\right)^{4x+5}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{3x^2}$

13.6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x-2}-\sqrt{6x-4}}{7x^2-3x-4}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{3x^2-2x-1}\right)^{4x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\sin 2x}{x^2}$

13.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{\sqrt{8-3x}-\sqrt{3x-4}}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+4}{2x^2+4x-3}\right)^{8x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

13.8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{4-x}}{4x^2+3x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-3}{8x+4}\right)^{5x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

13.9. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+5x+6}{\sqrt{1-3x}-\sqrt{3-2x}}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+5}{4x^2-3x+8}\right)^{2x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13.10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-2}}{x^2-2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x-7}\right)^{4x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$

14. Исследовать функцию на непрерывность:

14.1. $y=\dfrac{4x+1}{(x+4)x}$ в точках $x_1=-4$, $x_2=-4$, $x_3=4$;

14.2. $y=\dfrac{3x-1}{(x^2-4)x}$ в точках $x_1=0$, $x_2=2$;

14.3. $y=\dfrac{2x-5}{x(x-2)}$ в точках $x=0$, $x=2$, $x=4$;

14.4. $y=\dfrac{x-3}{x(x+2)}$ в точках $x=0$, $x=-2$, $x=3$;

14.5. $y=\dfrac{4x-9}{(x+1)(x-3)}$ в точках $x=0$, $x=-1$, $x=3$;

14.6. $y=\dfrac{2x}{x+3}e^{\frac{x}{x-2}}$ в точках $x=0$, $x=2$, $x=-3$;

14.7. $y=2^{\frac{x}{(x-3)(2-x)}}$ в точках $x=0$, $x=2$, $x=3$;

14.8. $y=3^{\frac{6x}{(x+3)(2-x)}}$ в точках $x=4$, $x=2$, $x=-3$;

14.9. $y=e^{\frac{2(x-7)}{(x-4)(9-x)}}$ в точках $x=4$, $x=2$, $x=9$;

14.10. $y=5^{\frac{x+8}{(x-5)(2+x)}}$ в точках $x=0$, $x=-2$, $x=5$.

# **Раздел I**. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

## Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

### 1.1. Основные сведения о матрицах

Определение. Матрицей размера $m \times n,$ где $m -$ число строк, $n -$ число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы и обозначаются $a_{ij,}$ где $i -$ номер строки, $j -$ номер столбца. Обозначаются матрицы большими латинскими буквами $A, B, C$ .

Например, задана матрица $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Виды матриц:

1. матрица размером $1 \times n$ называется матрицей-строкой;
2. матрица размера $m \times 1$ называется матрицей-столбцом;
3. матрица размера $m \times m$ называется квадратной порядка $m$ ;
4. матрица, у которой число строк и столбцов не равны, называется прямоугольной;
5. матрица, элементами которой являются нули, называется нулевой матрицей и обозначается $0$ .
6. квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется диагональной;
7. диагональная матрица называется единичной, если элементы по главной диагонали равны единице $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 1.2. Операции над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены для матриц одинакового размера.

Пример 1.1. Два различных по качеству вида хлебной продукции продаются в трех магазинах. Матрица $A-$объемы продаж этих продуктов в 1–ом квартале, матрица $B-$во 2–ом квартале. (в млн. руб.)

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

Определить: 1) объем продаж за два квартала; 2) прирост продаж во 2–ом квартале по сравнению с первым

Решение.

1) $A+B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+6 & 3+5\\ 4+5 & 2+4\\ 1+2 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 9 & 6\\ 3 & 7\end{pmatrix},$

2) $B-A=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5 & 5-3\\ 5-4 & 4-2\\ 2-1 & 4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

2. Умножение (деление) матрицы любого размера на произвольное число, не равное 0, сводится к умножению (делению) каждого элемента на это число.

3. Умножение матриц.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой определяются по формуле

$$C_{ij}=\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\cdot b_{hj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+..+a_{in}b_{nj},$$

т. е. определяется сумма произведений соответствующих элементов $i-$строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j-$ го столбца матрицы $B$. Матрицы можно умножать, если внутренние размерности совпадают.

Свойства операции умножения матриц:

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3. $E \cdot A = A \cdot E = A$;
4. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot A ... A}_{m}$.

Если выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы $A$ и $B$ называются перестановочным.

Пример 1.2. Найти значение матричного множителя

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \text{если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение. Подставим вместо переменной $x$ матрицу $A$ и получим

$$f(A) = A^2 - 3A + 2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2(-2) \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 - 2(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 3 + 2 & -2 - 6 + 0 \\ -3 - 9 + 0 & 7 + 6 + 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -12 & 15 \end{pmatrix}.$$

4. Транспонирование матриц.

Матрица $A^T$ называется транспонированной к матрице $A$, если в матрице $A$ строчки и столбцы поменять местами.

Свойства транспонированных матриц:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$;
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

## 1.3. Определители квадратных матриц

1. Определители второго порядка.

Пусть задана матрица второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда таблица четырех чисел называется определителем матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Элементы $a_{11}a_{12}$ - образуют первую строку.

Элементы $a_{21}a_{22}$ - образуют вторую строку.

Элементы $a_{11}a_{21}$ - образуют первый столбец.

Элементы $a_{12}a_{22}$ - образуют второй столбец.

Определителем второго порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

и обозначаются $\Delta A$ или $\det A$.

2. Пусть квадратная матрица третьего порядка. Для нее можно составить определитель третьего порядка, состоящий из девяти чисел, расположенных в три столбца и в три строки.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для вычисления определяется третьего порядка можно использовать правило, которое называется правилом «треугольника»:

– три первых слагаемых в формуле берутся со знаком плюс и мысленно строятся треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали и с вершинами в элементах, находящихся на побочной диагонали (рис.1)

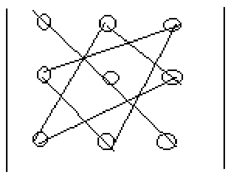

Рис.1.

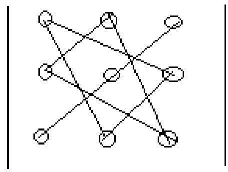

Рис. 2

– три следующих слагаемых берутся со знаком минус и мысленно строятся треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали и с вершинами в элементах, стоящих на главной диагонали (рис.2)

3. Минор определителя. Пусть задан определитель третьего порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минором любого элемента $a_{ij}$ определителя $\Delta_3$ называется определитель 2-го порядка, который получен из элементов определителя, оставшихся после вычеркивания элементов $i-$строки и $j-$столбца. Обозначается минором $M_{ij}$.

Пример 1.3. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ найти $M_{32}, M_{12}$.

Решение.

а) минор $M_{32}$ получен, вычеркивая третью строку и второй столбец

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4(-1) = 15 + 4 = 19,$$

б) для получения минора $M_{12}$ вычеркнем первую строку и второй столбец

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 4 - 10 = -6.$$

4. Алгебраические дополнения. Алгебраическим дополнением любого элемента определителя $a_{ij}$ называется минор этого элемента с определенным знаком $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 1.4. Для определителя $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ найти алгебраическое дополнение $A_{32}$.

Решение. $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -19.$

5. Разложение определителя по строке или столбцу. Вычисление определителя $n-$го порядка.

Теорема. Определитель $n-$го порядка равен сумме произведений элементов выбранной строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{ia} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j + \dots + a_{nj}} A_{nj}.$$

Пример 1.5. С помощью разложения по второй строке вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Запишем разложение определителя по второй строке:

$$\Delta_3 = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2-11} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(2+1) - 5(3-4) = -12 + 5 = -7.$$

## 1.4. Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится, если строчки и столбцы определителя поменять местами.
2. Значение определителя изменится на противоположное по знаку, если две строки или два столбца определителя поменять местами.
3. Общий множитель элементов строки или столбца определителя можно вынести за знак определителя.
4. Определитель равен нулю, если он имеет строку или столбец состоящих из нулей.
5. Определитель равен нулю, если он имеет две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца.
6. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на какое-то число не равное нулю.

Пример 1.6. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix},$$

используя свойства определителя и разложение по элементам третьего столбца.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(-2)+S_2 \\ S_1(-1)+S_3 \\ S_1(-4)+S_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & 7 & 0 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & -3 \\ -3 & 7 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= -112 + 18 + 216 - 21 = 101.$$

## 1.5. Обратная матрица

Матрица $A^{-1}$ называется обратной матрицей, для матрицы $A$, если справедливо следующие условие:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

Необходимые условия существования обратной матрицы:
1) матрица $A$ должна быть квадратной;
2) определитель матрицы $A$ не равен нулю, т.е. матрица $A$ должна быть невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:
1. составить определитель матрицы $A$ и его вычислить;
2. если $\det A = 0$, то обратной матрицы не существует;
3. если $\det A \neq 0$, составить присоединенную матрицы $A_{np}$, состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы $A$;
4. транспонировать присоединенную матрицу $A^T{}_{np}$;
5. записать обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^T{}_{np}$.

## 1.6. Ранг матрицы

Минором матрицы $A_{m\times n}$ называется определитель, полученный вычеркиванием $k-$строк и $k-$столбцов. Минором может быть определитель любого порядка $k \le \min(m;m) : M^k = \Delta_k$.

Пример 1.7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ найти все миноры второго порядка.

Решение. $M_1^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7.$ $M_2^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5,$ $M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.$

Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок не равного нулю минора. Обозначается ранг $rangA$ или $r(A)$. В примере 1.7 миноры второго порядка не равны нулю, то $rangA = 2$.

Свойства ранга матрицы:
1. $rangA \le \min(m;n);$
2. $rangA = 0,$ если все элементы матрицы $A$ равны нулю;
3. если $dat(A)_{m\times m} \neq 0,$ то $rangA = m.$

Существуют разные способы вычисления ранга матрицы. Рассмотрим следующие методы: метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований матриц.

1. Метод окаймляющих миноров. Пусть задана матрица $A_{3\times 4}$;

а) выбирается любой элемент матрицы, неравный нулю, и около него строится определитель второго порядка;

б) если построенный определитель не равен нулю, то около него строится определитель третьего порядка;

в) если все определители третьего порядка равны нулю, и миноры большего порядка построить нельзя, то $rangA=2$, если найдется хотя бы один определитель третьего порядка не равный нулю, то $rangA=3$.

2. Метод элементарных преобразований матриц. Теорема: ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

К элементарным преобразованиям матриц относятся6

1) отбрасывание строки, состоящей из нулей;

2) умножение элементов строки на любое число, не равное нулю;

3)изменение порядков строк;

4) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на любое число, не равное нулю;

5) транспонирование матрицы.

После элементарных преобразований матрицу приводят к матрице трапецеидального вида.

Пример 1.8. Найти ранг матрицы обоим методами

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Первый метод. Найдем миноры первого, второго и третьего порядков, выстраивая их около первого члена матрицы:

$$M_1^1=2,\ M_1^2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6,\ M_1^3=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-73,$$

Ответ: $rangA=3$.

2) Второй метод. Приведем матрицу к трапециидальному виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & -5 & 2\\ 0 & -11 & 22 & -8\\ 0 & -7 & -10 & -7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 & 2\\ 0 & -3 & 22 & -8\\ 0 & 0 & -10 & -7\end{pmatrix}.$$

Протокол действий:

1) переставили первый и четвертый столбцы местами;

2) от второй строки отняли четыре первых строки $(C_2 - 4C_1)$;

3) от третьей строки отняли две первых $(C_3 - 2C_1)$;

4) из второго столбца вычли четвертый столбец.

Теперь легко найти неравный нулю минор максимального порядка и ранг матрицы: $rangA = 3.$

# Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1. Основные понятия и определения

Системой $m$ линейных уравнений с $x$ неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .......... .......... .......... .......... .......... ......, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (**)$$

где $a_{ij}$ – коэффициент при неизвестных, $b_i$ – свободные члены, $x_i$ – неизвестные.

Если система $(**)$ имеет решение, то она называется совместной.

Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

Если система $(**)$ имеет единственное решение, то она называется определенной.

Если система имеет множество решений, она называется неопределенной.

Если все свободные члены системы $(**)$ равны нулю, система называется однородной. Такая система всегда совместна, имеет правильные решение – нулевое.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

1) коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & ..... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$;

2) неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix}$; 3) свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тогда система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$A \cdot X = B.$$

Вопрос о совместности системы помогает решить теорема Кронекера – Капелли.

Теорема. Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$rang(A) = rang(A/B).$$

Матрица $A/B$ называется расширенной матричной системы.

Если ранг матрицы $A$ равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы $A$ меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

При условии $rang(A) < m$ уравнения системы зависимые. При условии $rang(A) = m$ уравнения системы независимые.

Пусть $rang(A) < m$. Переменные $x_1, x_2, ..x_r$ называются базисными, основными, если базисный минор (определитель из коэффициентов при этих переменных) не равен нулю. Их число равно рангу $(A)$. Остальная $(n-r)$ неизвестных называется не основными (свободными). Свободным переменным в решении могут присваиваться следующие значения:

1) $C = 0$ для базисных решений;

2) $C = C_i$ для общего решения;

3) константа $C$ равно строкам единичной матрицы для фундаментального решения.

## 2.2. Система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными. Формулы Крамера и метод обратной матрицы

1. Метод Крамера решения систем линейных уравнений. (Габриель Крамер (1704 – 1752) швейцарский математик).

Данный метод применим в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно-независимые, т. е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0: $\det A \neq 0.$

Если $\det A = 0$ ,но хотя бы один из определителей для неизвестных не равен нулю, то система не имеет решения.

Если $\det A = 0$ и все определители для неизвестных равны нулю, то система имеет множество решений.

Теорема (Правило Крамера). Система из $n$ уравнений с $n$ неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

В случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формуле

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta},$$

где $\Delta = \det A,$ а $\Delta x_i -$определитель матрицы, получаемых из матрицы системы заменой $i -$го столбца столбцом свободных членов $b_i$.

Для систем уравнений третьего порядка: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Пример 2.1. Найти решение системы $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

Решение. Ведем обозначения: строка – $S$, столбец – $C$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left[S_2(-4) + S_1\right] = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left[C_3(2) + C_2\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \left[S_2(3) + S_3\right] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left[C_2(-2) + C_1\right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -22,$$

$$x_1 = \frac{-11}{-11} = 1, \ \ x_2 = \frac{11}{-11} = -1, \ \ x_3 = \frac{-22}{-11} = 2$$

Ответ $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применения к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Метод удобен для решения систем невысокого порядка. Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Систему линейных уравнений запишем в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ .... & ..... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ то } A \cdot X = B$$

Сделаем следующие преобразования

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{т.к. } A^{-1} \cdot A = E, \text{то } X = A^{-1} \cdot B$$

Пример 2.2. Найти решение системы матричным методом

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Введем матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Определитель матрицы $A$ уже был найден $\det A = -11$. Следовательно, обратная матрица существует. Найдем обратную матрицу

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4(-3) \\ 1\cdot 0 - 4\cdot 1 - 5(-3) \\ 1\cdot 0 - 4\cdot 1 + 6(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

## 2.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса иначе называется методом исключения переменных. Метод основан на преобразовании уравнений с использованием преобразований, называемых гауссовым.

К преобразованиям Гаусса относятся следующие действия:

а) можно менять уравнения системы местами;

б) умножать уравнение на любое число, не равное нулю;

в) к любому уравнению, умноженному на число, не равное нулю, можно прибавить другое уравнение, умноженное на любое число, не равное нулю.

Суть метода Гаусса:

1) в системе выбираем уравнение, в котором имеется неизвестное с ненулевым коэффициентом (лучше выбрать коэффициент единица).

Это уравнение объявляем ведущим, а неизвестное, подлежащие исключению, называем главным;

2) ведущее уравнение ставим на первое место и с помощью преобразований Гаусса исключаем главное неизвестное из остальных уравнений;

3) данную процедуру применяем к следующим уравнениям.

Пример 2.3. Найти решение системы методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Поменяем местами 1 и 2 уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) = \left[S_1(-4) + S_2\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Поменяем местами вторую и третью строчки матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -5 & -4 \end{array}\right) = \left[S_2(6) + S_3\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ -11x = -22_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{array}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

В результате исключения неизвестных последнее уравнение может иметь вид:

1) $a^* x_n = b^*$, то система имеет единственное решение;

2) $0 \cdot x_n = b^*$ ,то система не имеет решения;

3) $0 \cdot x_n = 0,$ то система имеет бесчисленное множество решений.

## 2.4. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)

Предположим, что рассматривается к отраслевой промышленности, каждая из которых производит свою продукцию часть продукции идет на внутри производство потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного личного и общественного потребления. Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год). Введем следующие обозначения:

$x_i$ – общий(валовый) объем продукции $i$ – ой отрасли $(i = 1, 2, ..., n)$

$x_{ij}$ – объем продукций $i$ – ой отрасли, потребляемой $j$ – й отраслью в процессе производства $(i, j = 1, 2, ..., n)$;

$y_i$ – объем конечного продукта $i$ – й отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой $i$ – й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой и отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Данное уравнение называется соотношениями баланса.

Введем коэффициенты прямых затрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \; (i, j = 1, 2, ...., n).$$

Показывающие затраты продукции $i$ – ой отрасли на производство единицы продукции $j$ – ой отрасли

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \, (x_{1j} = 1, 2, ..., n),$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i.$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$,

$X$ – вектор валового выпуска; $Y$ – вектор конечного продукта;

$A$ – матрица прямых затрат.

$$X = A \cdot X + Y,$$

$$(E - A)X = Y,$$

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ – называется матрицей полных затрат.

Пример 2.4. Дана матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$. Найти изменение векторов:

а) конечного продукта $\Delta Y$ при данном изменении вектора валового продукта $\Delta X = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$;

б) валового выпуска $\Delta X$ при необходимом изменении вектора конечного продукта $\Delta Y = \begin{pmatrix} 86 \\ 129 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) Найдем вектор конечного продукта

$$Y = (E - A)X = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9 \cdot 200 - 0,5 \cdot 150 \\ -0,4 \cdot 200 + 0,7 \cdot 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 - 75 \\ -80 + 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

б) Найдем вектор валового продукта

$$X = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 86 \\ 129 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.43} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 350 \end{pmatrix}.$$

# Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

## 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Любые две точки $A, B$ определяют направлений отрезок, если точка $A$ определяет начало, точка $B -$ конец отрезка, направление задается от $A$ к $B$.

Направленный отрезок называется вектором. Обозначается $\overrightarrow{AB}, \bar{a}$. Расстояние между началом и концом вектора называется длиной (или модулем) вектора, обозначается $\left|\overline{AB}\right|, \left|\bar{a}\right|$. .

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными, при этом если их направление совпадает

$a \uparrow\uparrow \overline{b}$ то они называются сонаправленными, если направления не совпадает $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b},$ то называются противоположно направленными. Векторы называются равными $\left(\overline{a} = \overline{b}\right)$,если они коллинеарные, одинаково направлены и их длины равны: $\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|.$

Векторы $\overline{a}$ и $-\overline{a}$ называются противоположными, если они коллинеарные, противоположно направленные и их длины равны:

$$\overline{a} \uparrow\downarrow \left(-\overline{a}\right), \ \left|\overline{a}\right| = \left|-\overline{a}\right|.$$

Три вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются коллинеарными, если они лежат в одной плоскости или ей параллельны.

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b},$ который идет из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ (рис. 3).

Разностью векторов $\overline{a} - \overline{b}$ называется вектор $\overline{c},$ который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a} : \overline{a} - \overline{b} = \overline{c} \Rightarrow \overline{c} + \overline{b} = \overline{a}.$ (рис 4).

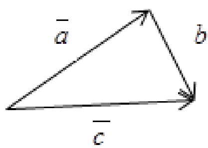


Рис. 3

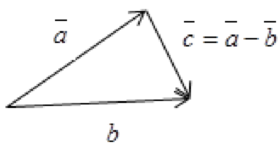


Рис. 4

Произведением вектора $\overline{a}$ на число $\lambda$ называется вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a},$ имеющий длину $\left|\overline{b}\right| = \lambda\left|\overline{a}\right|$, направление которого совпадает направлением вектора $\overline{a},$ если $\lambda > 0,$ и противоположно ему, если $\lambda < 0.$

Координатами вектора $\vec{a}$ называются координаты его конечной точки. Так, координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскости $OXY$ являются два числа $x$ и $y : \vec{a} = \{x, y\}$, (рис. 5), а в пространстве $OXYZ$ – три числа $x, y$ и $z$ : $\vec{a} = \{x, y, z\}$ (рис. 6).

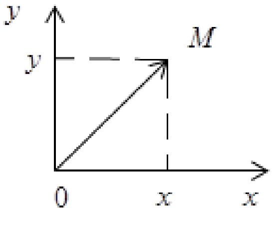


Рис. 5

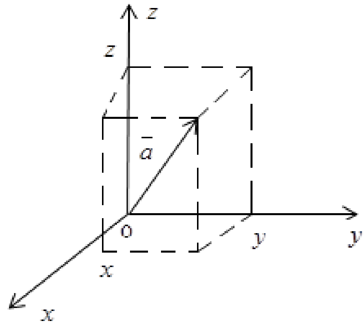


Рис. 6

Суммой и разностью векторов $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ являются соответственно векторы

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\},$$

$$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\},$$

а произведением вектора $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ на число $\lambda$ есть вектор

$$\overline{b} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\},$$

$$|\overline{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Скалярным произведением $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi$ между ними

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi.$$

Выразим скалярное произведение через координаты

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Заменим, что при $\overline{a} = \overline{b}$ угол $\varphi = 0, \cos\varphi = 1$ и

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

В частности, расстояние $\lambda$ между двумя точками пространства $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ можно рассматривать как длину вектора

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Поэтому

$$\lambda = \sqrt{\left|AB^2\right|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если $\overline{a} \cdot \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \perp \overline{b}.$

## 3.2. $n-$мерный вектор и векторное пространство

$n-$мерным вектором называется упорядоченная совокупность к действительным чисел, записываемых в виде $\overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, где $x_i - i-$я компонента вектора $\overline{x}$.

Понятие $n-$мерного вектора широко используется в экономике.

Два $n-$мерных вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е. $\overline{x} = \overline{y}$, если $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots\ldots,$ $i = 1, 2, \ldots., n.$

Суммой двух векторов одинаковой размерности и называется вектор $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$, если $z_1 = x_1 + y_1,\ z_i = x_i + y_i, i - 1, 2, \ldots n..$

Произведением вектора $\overline{x}$ на действительное число $\lambda$ называется вектор $\overline{\mu} = \lambda\overline{x}, \quad \upsilon_i = \lambda x_i, i = 1, 2, \ldots n.$

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения и умножения векторов на число, называется векторным произведением пространством.

## 3.3. Размерность и базис векторного пространства

Вектор $\overline{a_n}$ называется линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$ векторного пространства $R$, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа

$$\overline{a_m} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_m \overline{a}_{m-1},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_{m-1}$ – какие угодно действительные числа.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}$ векторного пространства $R$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_m$ не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + .... + \lambda_n \overline{a_m} = 0,$$

в противном случае векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_m}$ называются линейно независимыми.

Размерность пространства - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. Совокупность $n$ линейно независимых векторов $n$ – мерного пространства $R$ называется базисом.

Каждый вектор $\overline{x}$ линейного пространства $R$ можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса. Выражение

$$\overline{x} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + .... + x_n \overline{e_n}$$

называется разложением вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ...., \overline{e_n}$, а $x_1, x_2, .... x_n$ – координаты $\overline{x}$ относительно этого базиса.

## 3.4. Переход к новому базису

Пусть в пространстве $R$ имеются два базиса: старый $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ и новый $\overline{e_1}^*, \overline{e_2}^*, ..., \overline{e_n}^*$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса

$$\begin{cases} \overline{e_1}^* = a_{11} \overline{e_1} + a_{12} \overline{e_2} + ... + a_{1n} \overline{e_n} \\ \overline{e_2}^* = a_{21} \overline{e_1} + a_{22} \overline{e_2} + a_{2n} \overline{e_n} \\ \overline{e_n}^* = \overline{a_{n1}}\ \overline{e_1} + \overline{a_{n2}}\ \overline{e_2} + ... + \overline{a_{nn}}\ \overline{e_n} \end{cases}$$

Переход от старого базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ к новому $\overline{e_1}^*, \overline{e_2}^*, ..., \overline{e_n}^*$ задается матрицей перехода $A = \{aij\} \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$.

Зависимость между координатами вектора в разных базисах в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$ где $A^T$ и $\left(A^{-1}\right)^T$ матрицы, транспонирования к матрице $A$ и к обратной матрице $A^{-1}$.

Пример 3.1. В базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ заданы векторы

$$\overline{a_1} = \{1, 1, 0\}, \overline{a_2} = \{1, -1, 1\}, \overline{a_3} = \{-3, 5, -6\} \text{ и } \overline{b} = \{4, -4, 5\}.$$

Выразить вектор $\overline{b}$ в базисе $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ .

Решение.

а) Покажем, что векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ образуют базис.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

Следовательно, векторы образуют базис.

б) Матрица перехода $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad \left(A^{-1}\right)^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overline{b} = 0{,}5\overline{a_1} + 2\overline{a_2} - 0{,}5\overline{a_3}.$

## 3.5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Вектор $\overline{X} = 0$ называется собственным вектором линейного оператора, $\widetilde{A},$ если найдется такое число $\lambda,$ что $\widetilde{A}_1(x) = \lambda \overline{x}.$

Число $\lambda$ называется собственным значением оператора $\widetilde{A}$ соответствующим вектору $\overline{x}: \widetilde{A}(x) = A\overline{x} = \lambda \overline{x}.$

Вектор $\overline{X}$ переводится в ему коллинеарный вектор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + .... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + .... + a_{2n}x_n = 0 \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + .... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Последнюю систему можно записать в виде уравнения

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Для того, чтобы система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det(A - \lambda E) = 0.$

Определитель матрицы $A - \lambda E$ называется характеристическим многочленом оператора $\lambda$ или матрицы $A,$ а уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

называется характеристическим.

Пример 3.2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widetilde{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (2-\lambda)(-3-\lambda) - 4(-1) = 0$$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$ отсюда собственные значения линейного оператора $\widetilde{A}, \ \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1.$

Находим собственный вектор $\overline{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$. Для этого решаем матричное уравнение

$$(A - \lambda_1 E)\overline{x}^{(1)} = 0, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} 4x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} = 0 \\ -x_1^{(1)} - x_2^{(1)} = 0 \end{cases}, \quad x_1^{(1)} = -x_2^{(1)}, \text{ т.е. } \overline{x}^{(1)} = \begin{Bmatrix} c \\ -c \end{Bmatrix}$$

При $\lambda = 1 \quad \overline{x_2} = \begin{Bmatrix} 4c_1 \\ -c_1 \end{Bmatrix}.$

### 3.6. Линейная модель обмена

Пусть имеется $n$ строк $S_1.S_2,....S_n$, национальный доход каждой из которых равен соответственно $x_1, x_2,...., x_n$.

Пусть $a_{ij}$ – доля национального дохода, которую строка $S_j$ тратит на покупку товаров строки $S_i$. Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри строки, либо на импорт из других строк, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \left( j = 1, 2,...., n \right).$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}.$

Она получила название структурной матрицы торговли, в которой сумма элементов любого столбца матрицы $A$ равна $1$.

Выручка от торговли для любой строки $S$ равна:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + .... + a_{in} x_n = y_i.$$

Для баланса торговли необходимо, чтобы выручка от торговли для каждой страны была не меньше, чем ее национальный доход. Такое условие называется условием бездифицитности: $y_i \geq x_i$

Рассмотрим матричное уравнение $AX = X$ . Его можно записать $A \cdot X = \lambda X,\ \lambda = 1.$Таким образом задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы $A$,соответствующего собственному значения $\lambda = 1.$

Пример 3.3. Структурная матрица торговли трех стран $S_1, S_2, S_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы стран для балансированной торговли.

Решение. Находим собственный вектор $\overline{x},$ отвечающий собственному значению $\lambda = 1,$ решив уравнение $(A - E)X = 0$ или систему

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Методом Гаусса найдем $x_1 = \frac{3}{4}C,\ x_2 = \frac{3}{8}C,\ x_3 = C.$

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\overline{x} = \left\{\frac{3}{4}C, \frac{3}{8}C, C\right\},$ т. е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; 1$ или $6:3:8.$

# Глава 4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

## 4.1. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости $XOY$ задана прямоугольная система координат и некоторая линия (кривая) $L$.

Уравнением линии $L$ на плоскости называется уравнение, которому удовлетворяют координаты $x$ и $y$ каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой другой, не лежащей на этой линии:

$$F(x,\, y) = 0\,.$$

Уравнение линии можно задать следующими способами:

1) в прямоугольной системе координат: $y = f(x)$;

2) в параметрической форме: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$, где $t$ – параметр;

3) в полярной системе координат: $\rho = \rho(\varphi)$.

Линия называется линией $n$ – ого порядка, если она определяется уравнением $n$ –ой степени относительно текущих прямоугольных координат. Линия первого порядка называется прямой.

Углом наклона прямой к оси $OX$ называется наименьший неотрицательный угол $\alpha$, на который следует повернуть ось $OX$, чтобы ее положительное направление совпадало с одним из направлений прямой (рис. 7).

## 4.2. Уравнение прямой на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть задана прямая под углом $\alpha$ к оси $OX$ (рис. 7).

Тангенс угла наклона прямой к оси $OX$ называется угловым коэффициентом прямой

$$k = \mathrm{tg}(\alpha).$$

Рассмотрим треугольник $BMN$:

$$MN \perp OX, \qquad BN \perp OY, \qquad BN = x, \qquad MN = y - b\,.$$

Найдем отношение сторон из треугольника $BNM$:

$$\frac{MN}{BN} = \mathrm{tg}\,\alpha, \quad \frac{y-b}{x} = k, \quad y - b = kx, \quad y = kx + b.$$

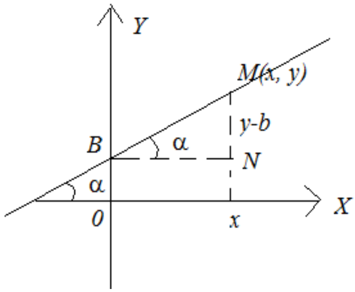


Рис. 7

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b.$$

Частные случаи поведения прямой:

1) если $k = 0,\ y = b$ , то прямая параллельна оси $OX$;

2) если $b = 0,\ y = kx,$ , то прямая проходит через начало координат;

3) если $x = a,$ прямая параллельна оси $OY$ .

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку.

Пусть задана точка $M(x_1, y_1)$, принадлежащая прямой $y = kx + b$ . Подставим координаты точки в уравнение $y_1 = kx_1 + b$ . Выразим свободный член $b = y_1 - kx_1$ . Тогда уравнение примет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, принадлежащие прямой $L$ . Следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой (17): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Выразим коэффициент $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Уравнение прямой будет иметь вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. Уравнение прямой в отрезках.

Пусть задана прямая, отсекающая на осях $OX$ и $OY$ отрезки $a$ и $b$ соответственно. Точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$ принадлежат прямой (рис.8).

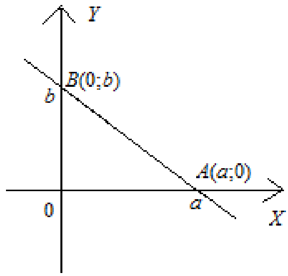


Рис. 8

Подставим координаты точек в предыдущее уравнение, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

5. Каноническое уравнение прямой.

Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через две точки. Введем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, принадлежащий прямой:

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}=\{m;n\}.$$

Этот вектор или ему параллельный называют направляющим вектором прямой. Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

6. Параметрические уравнение прямой.

Приравняем каноническое уравнение прямой к параметру $t$. Получим пару параметрических уравнений прямой:

$$\begin{cases} x=mt+x_1; \\ y=nt+y_1. \end{cases}$$

7. Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$, где $A, B, C-$ произвольные числа, причем $A, B-$ одновременно не равны нулю. Угловой коэффициент прямой имеет вид:

$$k=-\frac{A}{B}.$$

При отсутствии какого-либо коэффициента в уравнении прямой получаются неполные уравнения прямой:

1) $C = 0, \quad Ax + By = 0$ – прямая, проходящая через начало координат;
2) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0, Ax + C = 0$ – прямая, параллельная оси $OY$;
3) $B \neq 0, A = 0, C \neq 0, By + C = 0$ – прямая, параллельная оси $OX$;
4) $B = 0, A \neq 0, C = 0, Ax = 0, x = 0$ – ось $OY$;
5) $B \neq 0, A = 0, C = 0, By = 0, y = 0$ – ось $OX$.

8. Нормальное уравнение прямой.

Пусть задана некоторая прямая $L$. Через начало координат проведем перпендикуляр $ON$ к прямой $L$. Этот перпендикуляр называется нормалью к прямой и обозначается $\vec{N}$ (где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали).

Пусть нормаль $\vec{N}$ с осью $OX$ образует угол $\alpha\ (0 \le \alpha \le 2\pi)$. Введем параметр $p$: $ON = p$. Рассмотрим точку $M(x, y) = M(\rho, \varphi) \in L$, совмещая прямоугольную и полярную системы координат. При этом $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$ (рис. 9).

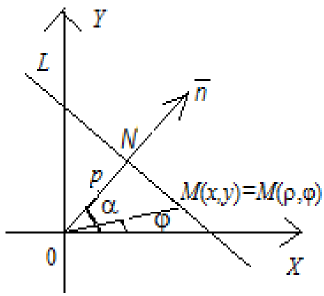


Рис. 9

Из $\Delta ONM$ получим:

$$p = \rho\cos(\angle NOM) = \rho\cos(\alpha - \varphi) = \rho\cos\alpha\cos\varphi - \rho\sin\alpha\sin\varphi,$$

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

В результате получим нормальное уравнение прямой

## 4.3. Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая $L$ и точка $M_0(x_0, y_0) \notin L$. Зададим прямую в виде нормального уравнения. Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$

прямую $L_0$, параллельную заданной прямой $L$. Пусть точки $N$ и $N_0$ лежат по одну сторону от начала координат (рис. 10).

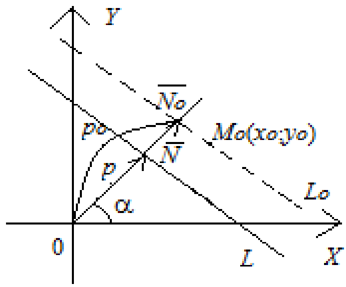


Рис. 10

Векторы $O\vec{N}$ и $O\vec{N}_0$ коллинеарные. Пусть $\left|O\vec{N}_0\right| = p_0$.. Оценим расстояние между прямыми:

$$d = \left|p_0 - p\right| = \left|x_0 \cos\alpha + y \;\sin\alpha - p.\right|$$

Полученная формула позволяет вычислить расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L$.

Если уравнение прямой задано общим уравнением, то его можно перевести в нормальное уравнение прямой, введя нормирующий множитель:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак множителя определяется так:

а) если $C < 0$, то $\mu$ – положительный;

б) если $C > 0$, то $\mu$ – отрицательный.

Нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

$$\mu(A \cdot x + B \cdot y + C) = 0,$$

а расстояние между точкой и прямой можно вычислить по формуле:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 4.1. Найти расстояние от точки $M(4,3)$ до прямой

$$3x - 4y + 10 = 0\,.$$

Решение. Применим формулу для вычисления расстояния между точками (подставив вместо $x_0$, $y_0$ координаты точки $M(4,3)$ :

$$d = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2.$$

## 4.4. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Возможны следующие взаимные положения прямых: прямые пересекаются, параллельны или совпадают.

1. Прямые пересекаются.

Точкой пересечения прямых является общее решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases}$$

при условии, что главный определитель системы не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ или при соблюдении условие } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Угол φ между прямыми можно найти, если известны угловые коэффициенты прямых:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}; \quad k_2 = -\frac{A_2}{2}; \quad k_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1; \quad k_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1); \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}.$$

Тогда угол можно найти по формуле:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Из этой формулы можно получить условие перпендикулярности прямых:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad k_1k_2 - = -1$$

2. Прямые параллельные.

Прямые будут параллельными, если система уравнений (30) не имеет решения, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или соблюдается условие } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

можно условие параллельности записать, используя равенство нулю угла между прямыми:

$$\varphi = 0; \quad k_1 = k_2.$$

3. Прямые совпадают при соблюдении условия:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

## 4.5. Окружность и эллипс

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом, называется окружностью.

Пусть центр окружности находится в точке $O$. Точка $M(x, y)$ принадлежит окружности. Тогда

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = R;$$

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности находится в точке $O_1(a,b)$, то уравнение окружности запишется так

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Пример 4.2. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Решение. Составим систему уравнений с тремя неизвестными: $a$, $b$ – координаты центра окружности, $R$ – радиус окружности. Заменив текущие координаты уравнения окружности координатами заданных точек, получим:

$$\begin{cases} (5-a)^2 + (5-b)^2 = R^2; \\ (-2-a)^2 + (-2-b)^2 = R^2; \\ (-1-a)^2 + (5-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Решив систему, получим искомое уравнение окружности:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ фокусы эллипса, $|F_1F_2| = 2c$.

Сумму расстояний от любой точки $M(x,y)$ до точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ обозначим через $2a : 2a > 2c$ (рис. 11, 12).

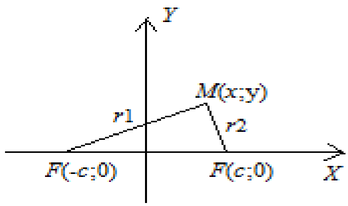


Рис. 11

Числа $r_1$ и $r_2$ называются фокальными радиусами. Уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

называется каноническим уравнением эллипса.

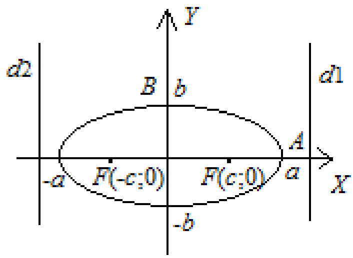


Рис. 12

Основные свойства эллипса:

1) эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат;

2) оси координат называются осями эллипса; начало координат называется центром эллипса;

3) точки пересечения эллипса с осями симметрии эллипса образуют вершины эллипса ( точки $A$ и $B$);

4) если $a \geq b$, то $a$ называется большей полуосью эллипса, $b$ называется малой полуосью эллипса ( $2a, 2b$ – большая и малая оси эллипса);

5) если $a \geq b$, то фокусы эллипса находятся на оси $OX$; если $a \leq b$, то фокусы находятся на оси $OY$;

6) если $a = b$, то эллипс вырождается в окружность;

7) связь между полуосями и расстоянием между фокусами определяется формулой:

$$b^2 = a^2 - c^2;$$

8) эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большей оси эллипса:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Свойства эксцентриситета:

1. так как $c < a$, то $0 \leq \varepsilon \leq 1$;

2. $\frac{a}{b} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$;

3 эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса вдоль оси, на которой находятся фокусы: при $\varepsilon \approx 1$ эллипс сильно вытянут вдоль оси, при $\varepsilon \approx 0$ эллипс похож на окружность;

9) директрисами эллипса называются прямые, перпендикулярные большей оси эллипса и проходящие на расстоянии ли $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса (проходят за фокусами эллипса, $d_1, d_2$ ):

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon};$$

10) если $r$ – расстояние от произвольной точки $M$ эллипса до какого-нибудь фокуса, $d$ – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету; так как $\varepsilon < 1$ то директрисы находятся за пределами эллипса.

Пример 4.3. Составить уравнение эллипса, если задана точка $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$, принадлежащая эллипсу, и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Решение. Подставим координаты заданной точки в уравнение эллипса: $\frac{2^2}{a^2}+\left(-\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b^2}=1.$ Используя понятие эксцентриситета, найдем $\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{4}{9},$ и оценим $c^2=\frac{4}{9}a^2$. Подставим найденное значение в выражение $b^2=a^2-c^2=a^2-\frac{4}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2.$ Подставим $b^2$ в уравнение эллипса. Найдем значения полуосей $a=3, b=\sqrt{5}$ и получим искомое уравнение эллипса: $5x^2+9y^2=45.$

## 4.6. Гипербола и парабола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Обозначим через $F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$ фокусы гиперболы, $|F_1F_2|=2c$. Сумму расстояний от любой точки $M(x;\,y)$ до точек $F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$ обозначим через $2a$. Числа $r_1$ и $r_2$ называются фокальными радиусами (рис. 13). Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

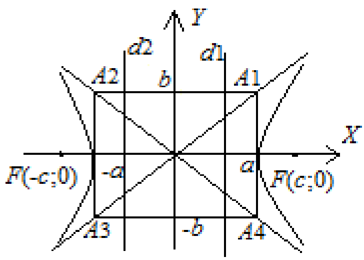


Рис. 13

Основные свойства гиперболы:

1. гипербола симметрична относительно осей и начала координат. Оси симметрии называются осями гиперболы, центр симметрии называется центром гиперболы.

2. одна из осей симметрии пересекает гиперболу в двух точках, которые называются вершинами.

3. ось, на которой находятся вершины гиперболы называется действительной осью ( $a$ – действительная полуось), другая ось называется мнимой ( $b$ – мнимая полуось).

4. прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ со сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы.

5. фокусы гиперболы находятся на действительной оси.

6. связь между полуосями и расстоянием между фокусами:

$$b^2 = c^2 - a^2;$$

7. гипербола, определяемая уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называется сопряженной; у сопряженной гиперболы фокусы находятся на оси $OY$ и $a^2 = c^2 - b^2$.

8. прямые, заданные уравнениями: $y = \pm\frac{b}{a}$ ,

называются асимптотами гиперболы; асимптоты – это диагонали главного прямоугольника гиперболы.

9. эксцентриситетом гиперболы называется отношение рас-стояния между фокусами к действительной оси гиперболы: $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Свойства эксцентриситета:

1) так как $c > a$ , то $\varepsilon > 1$;

2) $\frac{a}{b} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

10. директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные к действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра гиперболы (директрисы проходят между фокусами гиперболы): $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

11. Теорема. Если $r$ – расстояние от произвольной точки $M$ гиперболы до какого-нибудь фокуса, $d$ – расстояние от той же точки

до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ – есть величина постоянная, равная эксцентриситету: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Пример 4.4. Установить какую кривую задает уравнение:

$$y = 7 - 1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде: $y - 7 = -1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}.$

Возведем уравнение в квадрат, получим:

$$(y-7)^2 = 2{,}25\left(x^2 - 6x + 13\right).$$

Выделяя полный квадрат для переменной $x$, получим искомое уравнение:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1.$$

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, называемой фокусом, и от данной прямой $BD$, называемой директрисой, не проходящей через фокус (рис. 14).

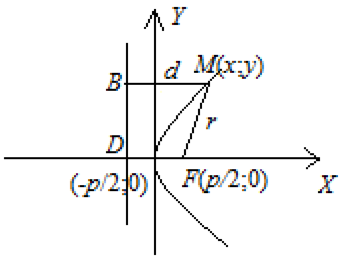


Рис. 14

Пусть если $MB = d$, $MF = r$, $FD = p$, $r$ – фокальный радиус, $p$ – параметр параболы, точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболы, точка $D$ имеет координаты $D\left(-\frac{p}{2};0\right)$ и принадлежит директрисе параболы $x = -\frac{p}{2}$.

По определению параболы получим: $r = d$. Канонические уравнения параболы имеют вид

$$y^2 = 2px.\ y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py.$$

Свойства параболы:

1. парабола симметрична относительно оси, на которой находятся фокусы ($OX$).

2. точка $O(0;0)$ является центром параболы; ось симметрии ($OX$) является осью параболы.

3. $p$ – параметр параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы ($p > 0$).

Пример 4.5. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2 = 16y$ и перпендикулярна к прямой $y = 2x + 5$.

Решение. Искомая прямая перпендикулярна данной, следовательно, ее угловой коэффициент равен – 0,5. Тогда искомое уравнение имеет вид: $y = -0{,}5x + b$. Прямая касается параболы, следовательно, имеет с ней одну общую точку, которую можно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + b; \\ x^2 = 16y. \end{cases}$$

Получим уравнение: $x^2 - 32x - 16b = 0$. Из условия $32^2 + 4 \cdot 16b = 0$, получим значение $b = -16$. .

Искомое уравнение имеет вид: $y = -0{,}5x - 16$.

## 4.7. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана произвольная поверхность $S$ и уравнение $F(x, y, z) = 0$.

Данное уравнение называется уравнением поверхности в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей поверхности, и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не принадлежащей поверхности. Степень уравнения определяет порядок поверхности. Поверхность первого порядка называется плоскостью.

Пусть в прямоугольной системе координат задана произвольная плоскость $\pi$, точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi$ и вектор $\vec{N} \perp \pi$ $\vec{N} = (A, B, C)$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z) \in \pi$ (рис.15).

Построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Он принадлежит плоскости $\pi$, следовательно, перпендикулярен вектору $\vec{N}$, и скалярное произведение этих векторов равно нулю: $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{N} = 0$,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Данное уравнение называется уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C).$, который называется вектором нормали или нормальным вектором.

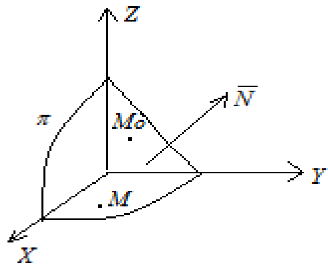


Рис. 15

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пример 4.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;4;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{1, 2, -3\}$.

Решение. Воспользуемся формулой, получим уравнение плоскости:

$$1(x-2) + 2(y-4) - 3(z-5) = 0,$$

$$x + 2y - 3z + 7 = 0.$$

Пусть задано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0.$ и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая не принадлежит плоскости. Расстояние от этой точки до заданной плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол $\varphi$ между плоскостями (рис.16) можно найти как угол между векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ :

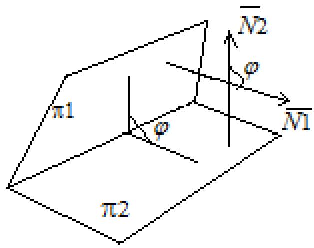


Рис. 16

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

Пример 4.7. Определить угол между плоскостями:

$$x - z = 0, \quad y - z = 0.$$

Решение. Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{1, 0, -1\}, \; \vec{N}_2 = \{0, 1, -1\}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}. = \frac{0+0+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60°.$$

Пусть заданы две плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$$

Для каждой плоскости найдем нормальный вектор:

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

1. Условие перпендикулярности плоскостей: $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, т. е. скалярное произведение векторов равно нулю:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

2. Условие параллельности плоскостей: $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$, т. е. соответствующие координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

## 4.8. Понятие об уравнении прямой в пространстве

Линией в пространстве называется множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и определяется системой уравнений: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$

Система двух уравнений плоскости в пространстве, у которых нормальные вектора $\vec{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\vec{N}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ неколлинеарные, называется общим уравнением прямой в пространстве (рис. 17):

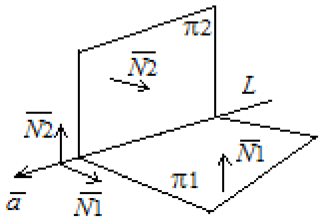


Рис. 17

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases} \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, или принадлежащий самой прямой, называется направляющим вектором прямой:

$$\vec{a}=\{l,m,n\}.$$

Пусть точки $M_0(x_0;y_0;z_0)\in L$, $M(x,y,z)\in L$ и $\vec{a}\parallel L$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ и $\vec{a}\parallel\overline{M_0}\vec{M}$ следовательно, координаты векторов пропорциональны (рис. 18):

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

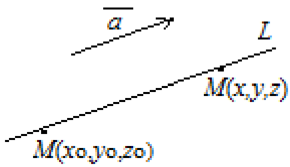


Рис. 18

Полученное уравнение называется каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Общее уравнение прямой можно перевести в каноническое уравнение. Пусть две плоскости пересекаются по прямой $L$. Нормальные вектора плоскостей перпендикулярны плоскостям и прямой, следовательно прямая перпендикулярна нормальным векторам одновременно: $\vec{N}_1 \perp L,\ \vec{N}_2 \perp L.$ .

Выберем любой вектор $\vec{a} \in L,\ \vec{a} \perp \vec{N}_1,\ \vec{a} \perp \vec{N}_2$ (рис. 17). Тогда вектор $\vec{a}$ является векторным произведением векторов $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ :

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \{l, m, n\}.$$

Пример 4.8. Записать общее уравнение прямой в пространстве $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0; \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ в канонической форме.

Решение. 1. Найдем нормальные вектора плоскостей

$$\vec{N}_1 = \{3, 2, 4\},\quad \vec{N}_2 = \{2, 1, -3\}.$$

2. Найдем направляющий вектор прямой

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \{-10, 17, -1\}.$$

3. Пусть $z_0 = 0,\ z_0 \in L.$ Тогда $x_0, y_0$ найдем из системы:

$$\begin{cases} 3x_0 + 2y_0 - 11 = 0; \\ 2x_0 + y_0 - 1 = 0; \end{cases} \qquad x_0 = 9,\ y_0 = 19.$$

Каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x-9}{-10} = \dfrac{y-19}{17} = \dfrac{z}{-1}.$

Если каноническое уравнение прямой приравнять к параметру $t \in (-\infty; +\infty),$ то получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = lt + x_0; \\ y = mt + y_0; \\ z = nt + z_0. \end{cases}$$

если задать две точки прямой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то уравнение прямой, проходящее через две точки, можно записать так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пусть задана прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и точка $M(x_1, y_1, z_1)$, ей не принадлежащая (рис. 19).

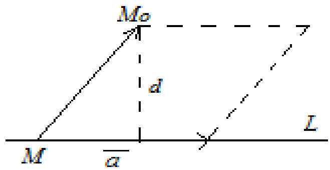


Рис. 19

На прямой выберем произвольную точку $M(x_1, y_1, z_1)$. Рассмотрим векторы $\vec{a}=\{l, m, n\}$ и $\overrightarrow{MM_0}=\{x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1\}$. Построим на этих векторах параллелограмм. Тогда высота параллелограмма будет определять расстояние от точки до прямой:

$$d=\frac{S}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}\times MM_0|}{|\vec{a}|}.$$

Пример 4.10. Найти расстояние от точки $M(3;-1;1)$ до прямой: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-7}{4}$.

Решение. Найдем направляющий вектор прямой: $\vec{a}=\{3;-1;4\}$.

Найдем длину вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}$.

За точку, принадлежащую прямой, примем точку $M(2;-1;7)$. Составим вектор $\overrightarrow{MM_0}=\{2-3;-1+1;7-1\}=\{-1;0;6\}$.

Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}, \overrightarrow{MM_0}$ :

$$\vec{a}\times\overrightarrow{MM_0}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-6i-22j-k=\{-6;-22;-1\}.$$

Найдем площадь параллелограмма как модуль векторного произведения: $S=\sqrt{6^2+22^2+1}=\sqrt{521}.$

Найдем расстояние от точки до прямой: $d=\dfrac{\sqrt{521}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\dfrac{521}{26}}.$

## 4.9. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Пусть заданы две прямые в канонической форме $L_1$, $L_2$ :

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Для каждой из них запишем направляющий вектор

$$\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\}, \quad \vec{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\}.$$

Возможны следующие взаимные расположения прямых:

1) прямые пересекаются под углом $\varphi$. Угол $\varphi$. между прямыми можно выразить как косинус угла между векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ :

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}};$$

2) прямые перпендикулярные $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ :

$$\vec{a}_1\perp\vec{a}_2; \quad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$$

3) прямые параллельные $\varphi=0$ :

$$\vec{a}_1\perp\vec{a}_2; \quad \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Пусть заданы прямая и плоскость в пространстве соответственно:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \ Ax+By+Cz+D=0.$$

Для прямой найдем направляющий вектор $\vec{a}=\{l,m,n\}$, а для плоскости найдем нормальный вектор $\vec{N}=\{A,B,C\}$. Возможны следующие случаи расположения прямой и плоскости в пространстве:

1) пересечение прямой и плоскости под углом $\varphi$ (рис. 20). Угол $\varphi$ между прямой и плоскостью можно заменить углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости: $\varphi = 90° - \alpha$:

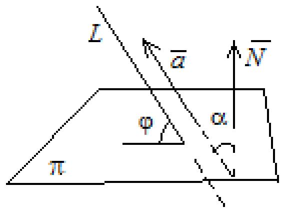


Рис. 20

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{N}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{N}|} = \frac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

2) прямая и плоскость параллельные, $\varphi = 0$ (рис. 21):

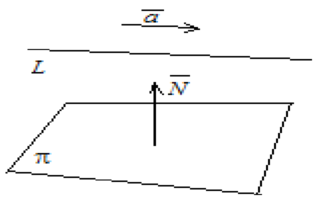


Рис. 21

$$\vec{a} \perp \vec{N}; \quad lA + mB + nC = 0;$$

3) прямая и плоскость перпендикулярные, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 22):

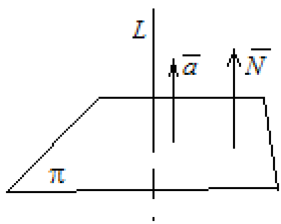


Рис. 22

$$\vec{a} \parallel \vec{N}; \qquad \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

4) прямая и плоскость пересекаются в точке $M(x_1, y_1, z_1)$.

Для определения точки пересечения прямой и плоскости переведем уравнение прямой в параметрическую форму и подставим координаты $x, y, z$ прямой $\begin{cases} x = lt + x_0; \\ y = mt + y_0; \\ z = nt + z_0, \end{cases}$ в уравнение плоскости:

$$A(lt + x_0) + B(mt + y_0) + C(nt + z_0) + D = 0.$$

Из полученного уравнения найдем параметр $t$ и вычислим координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Пример 4.11. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$ и плоскости $x + 2y + 3z - 4 = 0.$

Решение. Составим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = t + 6; \\ y = 2t + 3; \\ z = 3t + 2. \end{cases}$$

Подставим значения координат в уравнение плоскости:

$$t + 6 + 2(2t + 3) + 3(3t + 2) - 4 = 0, \; 14t = -14, \; t = 1.$$

Найдем координаты точки пересечения плоскости и прямой:

$$x = 5, \; y = -1, \; x = -1.$$

Точка $M(5; -1; -1)$ – точка пересечения прямой и плоскости.

# **Раздел I**. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

## Глава 5. ФУНКЦИЯ

### 5.1. Понятие функции. Свойства функции

Пусть даны два непустые множества $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$. Если каждому элементу $x_i$ из множества $X$ по некоторому правилу ставится в соответствие элемент $y_i$ из множества $Y$, то говорят, что задана функция $y = f(x)$. В этом случае величина $x$ – независимая переменная (аргумент), величина $y$ – зависимая переменная (функция).

В нашем случае множество $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} = D$ является областью определения, а множество $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\} = E$ –

областью значений функции $y = f(x)$: $E = \{y \in R; y = f(x), x \in D\}$.

Функция $y = f(x)$ называется чётной, если она обладает двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно начала координат O;
2) для любого значения $x$, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Чётными, например, являются функции $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \ln|x|$, $y = \cos x$ (рис. 23).

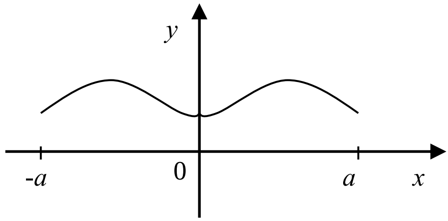


Рис. 23

Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если:

1) область определения этой функции симметрична относительно начала координат O;
2) для любого значения $x$, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

К нечётным относятся функции $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{arcsin}x$ и т.д.(рис. 24).

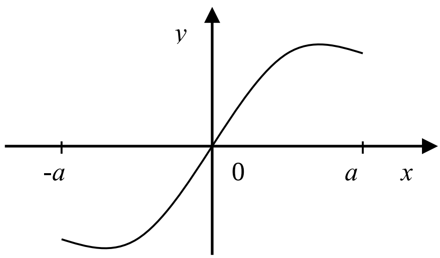


Рис. 24

График чётной функции симметричен относительно оси O$Y$, график нечётной функции симметричен относительно начала координат O $(0; 0)$.

Функция, не являющаяся ни чётной, ни нечётной, называется функцией общего вида.

Сумма, разность, произведение и частное двух чётных функций есть чётная функция. Сумма и разность нечётных функций – нечётная функция, а произведение и частное – чётная функция.

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T$ ( $T$ – некоторое действительное число, отличное от нуля), если для любого значения аргумента x из области определения функции выполняется условие $f(x) = f(x + T)$. Обычно под периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов (если такой существует). В этом случае все периоды функции кратны её наименьшему периоду.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в промежутке $(a, b)$, если для любой пары значений $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Если из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функцию называют неубывающей (рис. 25).

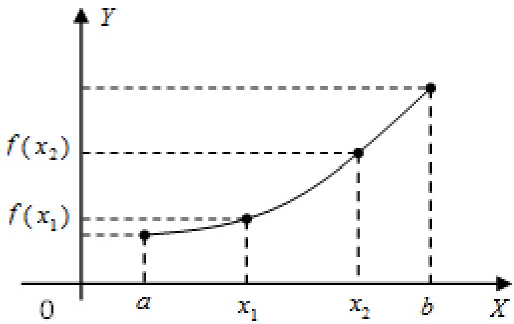


Рис. 25

Функция $y = f(x)$ называется убывающей в промежутке $(a, b)$, если для любой пары значений $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис. 26). Если из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функцию называют невозрастающей.

Возрастающие и убывающие функции называют монотонными функциями.

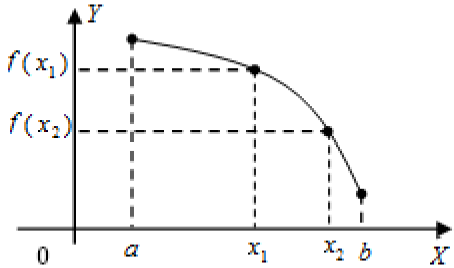


Рис. 26

Функция $y = f(x)$ на множестве $X$ называется ограниченной сверху, если существует такое число $M$, что $f(x) \le M$ для всех $x \in X$.

Значение $M$ называется точной верхней гранью функции $y = f(x)$ и обозначается $M = \sup f(x)$.

Функция $y = f(x)$ на множестве $X$ называется ограниченной снизу, если множество ее значений $Y$ ограничено снизу, т.е. существует число $m$ такое, что $m \le f(x)$ всех $x \in X$.

Значение $\mathrm{m} = \inf f(x)$ – точная нижняя граница значений функции.

Функция $y = f(x)$ на множестве $X$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу. В этом случае $m \le f(x) \le M$ всех $x \in X$. В качестве примера рассмотрим функцию $y = \sin x$, ограниченную на всей числовой оси: $|\sin x| \le 1$, а ее график заключен между прямыми
$\mathrm{y} = 1$.

Нулём функции называется такое действительное значение аргумента $x$, при котором значение функции равно нулю. Чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается её, либо имеет общую точку с этой осью (рис. 27).

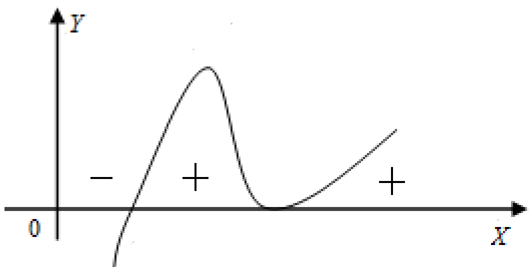


Рис. 27

Функция может и не иметь нулей. Такова, например, функция $y = \frac{1}{x}$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и пусть отрезок $[\alpha, \beta]$ является множеством значений этой функции. Пусть, кроме того, каждому y из отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствует только одно значение $x$ из отрезка $[a, b]$, для которого $f(x) = y$. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена функция $x = f^{-1}(y)$, которая каждому y из отрезка $[\alpha, \beta]$ ставит в соответствие значение x из отрезка $[a, b]$ (рис. 28).

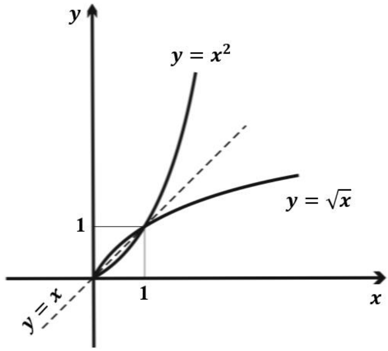


Рис. 28

Эта функция называется обратной для функции $y = f(x)$.

Если на некотором множестве $X$ определена функция $z = z\ (x)$ со множеством значений $Z$, а на множестве $Z$ – функция $y = f(z)$, то функция $y = f(z(x))$ называется сложной функцией от $x$ (или "суперпозицией" или композицией") функции $z(x)$ и $f(z)$, а переменная $z$ – промежуточной переменной сложной функции. Примером сложной функции может быть функция: $y = \sin^2\left(\ln(x^3 + 2x^2)\right)$.

Функция называется явной, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной: $y = f(x)$.

Функция называется неявной, если она задана в виде $F(x, y) = 0$.

Функция может быть задана различными способами: табличным, аналитическим, описательным и графическим.

Табличный способ состоит в том, что все числовые значения аргумента располагают в одной строке, а значения функции – в другой строке так, чтобы каждому значению аргумента отвечало соответствующее значение функции (табл. 1)

*Таблица 1*

| t, °C | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ρ, $10^{-2}$ кг/м$^3$ | 1,36 | 1,45 | 1,54 | 1,63 | 1,73 | 1,83 | 1,94 |

Если функция выражена при помощи формулы, то говорят, что она задана аналитически. Например, площадь окружности $S = \pi R^2$, является функцией её радиуса.

При аналитическом способе значение у вычисляется путём подстановки в заданную формулу значения аргумента.

При описательном способе зависимость между $x$ и $y$ выражают словесно. Например, функцию «$y = 3x$» можно задать следующим образом: «каждому действительному значению аргумента $x$ ставится в соответствие его утроенное значение».

Функция $y = f(x)$ задана графически, если задан её график, т.е. множество точек с координатами $(x,\ f(x))$ на плоскости $XOY$, абсциссы которых принадлежат области определения функции, а ординаты равны соответствующим значениям функции, т. е. множество $\Gamma = \{(x, y) \in R \mid x \in D, y \in E, y \in f(x)\}$.

Прямая, параллельная координатной оси $OY$, пересекает график функции только в одной точке.

## 5.2. Основные элементарные функции

1. **Линейная функция** $y = kx + b$. Графиком линейной функции является прямая. Коэффициент $k$ – угловой коэффициент этой прямой, $b$ – отрезок, отсекаемый на оси $OY$. При $k > 0$ линейная функция возрастает, а при $k < 0$ – убывает (рис. 29).

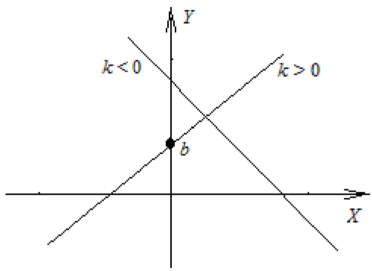


Рис. 29

2. **Квадратичная функция** $y = ax^2 + bx + c$, $a$, $b$, $c$ – постоянные и $a \neq 0$. Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке $M_0\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз.

3. **Показательная функция** $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. При $a > 1$ функция возрастает на всей числовой оси, при $0 < a < 1$ функция убывает. График показательной функции проходят через точку (0; 1) при всех $a$. Ось $OX$ $y = 0$ является асимптотой графика показательной функции (рис. 30).

Для любых чисел $x, y \in R$ справедливы равенства

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x},$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

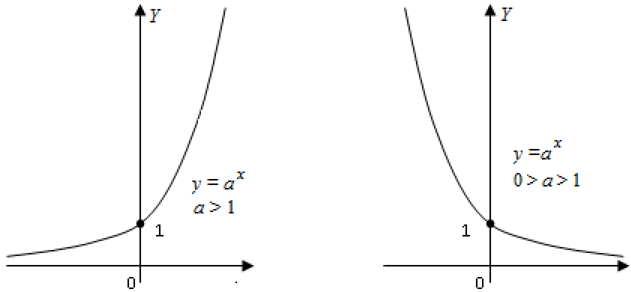


Рис. 30

4. **Логарифмическая функция** $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Напомним, что логарифмом числа $x$ по основанию $a$ называется показатель степени $c$, в которую нужно возвести основание $a$, чтобы получить число $x$, т.е. $\log_a x = c$ $a^c = x$ (рис. 31).

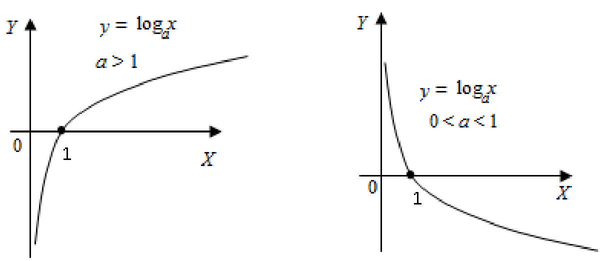


Рис. 31

Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел $(0, +\infty)$; множество значений – множество всех действительных чисел. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Ось $OY$ $x = 0$ является асимптотой графика показательной функции.

Для любых чисел $x, y \in R$ справедливы равенства

$$a^{\log_a x} = x,\ \ \log_a x + \log_a y = \log_a xy,\ \ \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_a x^n = n \log_a x,\ \ \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x.$$

5. **Тригонометрические функции** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Синус $y = \sin x$. Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in [-1; 1]$. Периодическая, с периодом $2\pi$. Нечетная (рис. 32).

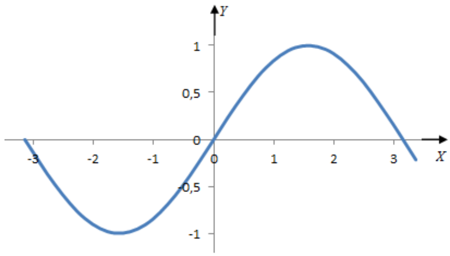


Рис. 32

Косинус $y = \cos x$. Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in [-1; 1]$. Периодическая, с периодом $2\pi$. Четная (рис. 33).

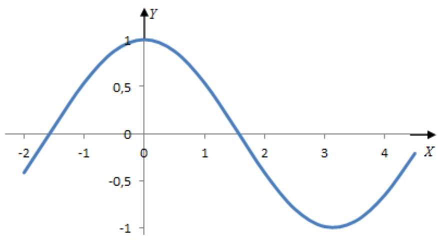


Рис. 33

Тангенс $y = \operatorname{tg} x$. Область определения $x \in R, x \neq 0{,}5\pi + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$. Периодическая, с периодом $\pi$. Нечетная (рис. 34).

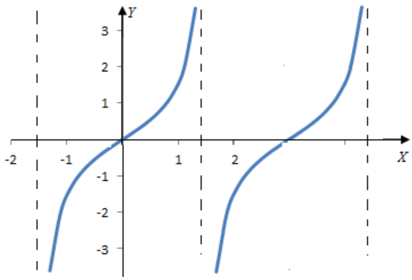


Рис. 34

Котангенс $y = \mathrm{ctg}x$. Область определения $x \in R, x \neq \pi k, k = 0, \pm 1, ...$ Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$. Периодическая, с периодом $\pi$. Четная (рис. 35).

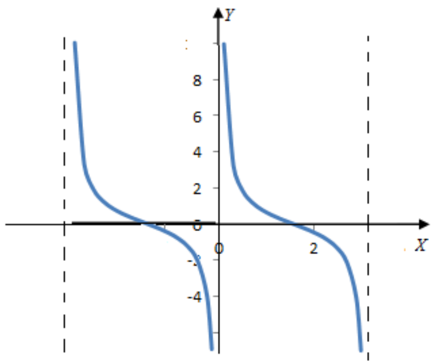


Рис. 35

6. **Обратные тригонометрические функции** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$.

Арксинус $y = \arcsin x$ – это угол $\alpha$, $\sin\alpha = x$. Область определения $x \in [-1; 1]$. Область значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Нечетная, возрастающая (рис. 36)

Арккосинус $y = \arccos x$ – это угол $\alpha$, $\cos\alpha = x$. Область определения $x \in [-1; 1]$. Область значений $y \in [0; \pi]$. Убывающая (рис. 37).

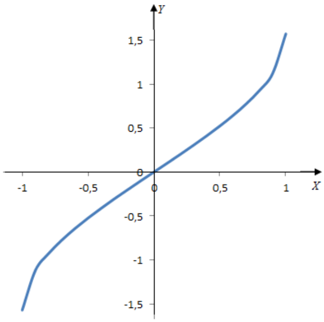


Рис. 36

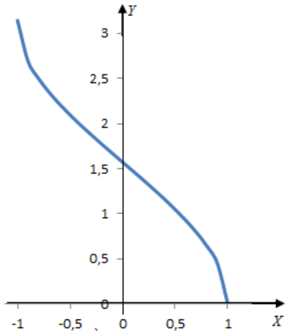


Рис. 37

Арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$ – это угол $\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = x.$ Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in (-0{,}5\pi;\ 0{,}5\pi)$. Нечетная, возрастающая (рис. 38).

Арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x.$ – это угол $\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha = x.$ Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in (0;\ \pi)$. Убывающая (рис. 39).

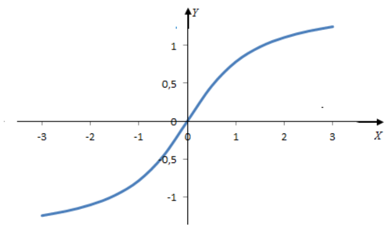


Рис. 38

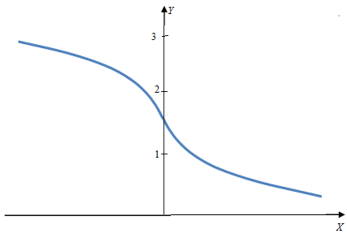


Рис. 39

7. **Обратная пропорциональность**: $y = \frac{k}{x}$.

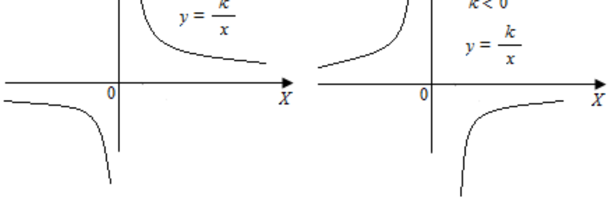


Рис. 40

8. Функция с модулем: $y = |x|$.

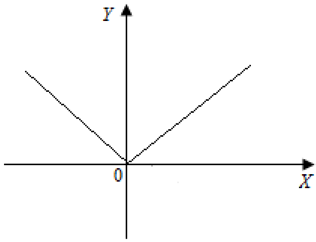


Рис. 41

9. Целая рациональная функция:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m\text{-}1} + a_2x^{m\text{-}2} + \ldots + a_m.$$

10. Дробно-рациональная функция: $R(x) = \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$.

11. Иррациональная функция

$$y = \sqrt{x} \text{ .(рис. 10)}, \quad y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}.$$

12. Функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется трансцендентной:

$$y = \cos x + x^2 - e^x.$$

## 5.3. Функции в экономике

Экономические процессы описываются как функциями одной, так и нескольких переменных. Наиболее часто используются производственные функции, функции полезности (предпочтений), издержек, спроса, предложения, потребления и другие.

Функции спроса и предложения выражают зависимость объема спроса или предложения на отдельные товары от таких факторов, как цена, доход и другие. Часто зависимость спроса и различные товары от дохода описываются функции Торнквиста:

$$y = \frac{b_1(x - a_1)}{x - c_1},\ (x > a_1);\ y = \frac{b_2x(x - a_2)}{x - c_2},\ (x > a_2)$$

Зависимость спроса или предложения от цены описывается, например, линейными функциями: спроса $y = -ax + b$ или предложения $y = ax - b,\ (a,\ b > 0)$.

Одной из главных задач рынка является установление равновесной цены (price) – $P_0$, то есть такой цены, при которой спрос (demand) $d(p)$ равен предложению (supply) $s(p)$: $d(p)=s(p)$

Предположим, что функции $d(p)$, $s(p)$ непрерывны, тогда их разность (спрос превышает предложение) $f(p)=d(p)-s(p)$ также непрерывная функция, причем имеет разные знаки:

1. $f(p)=d(p)-s(p)>0$ – если цена $p$ мала;
2. $f(p)=d(p)-s(p)<0$ – если цена велика,

то по свойству непрерывной функции (теорема Больцано – Коши), обязательно существует такое значение $P_0$, при котором $f(p)=0$, т. е. $d(p)=s(p)$.

Функции прибыли и затрат (издержек). Пусть $x$ – количество продукта; которая реализуется по цене $p(x)$, в этом случае $r(x)=xp(x)$ – полный доход; $c(x)$ – функция затрат выражает зависимость общих расходов на производство $x$ единиц продукции; тогда разность между полным доходом и общими затратами есть прибыль от реализации $x$ единиц продукции: $П(x)=r(x)-c(x)$. График функции прибыли $П(x)$ показан на рис. 42. Значение функции прибыли $П(x)$ на отрезке $[0,x_1]$ отрицательна, $r(x)<c(x)$ здесь затраты превышают доход; когда выпуск продукции становится больше некоторого количества $x_1$, то прибыль начинает расти, то есть $r(x)>c(x)$.

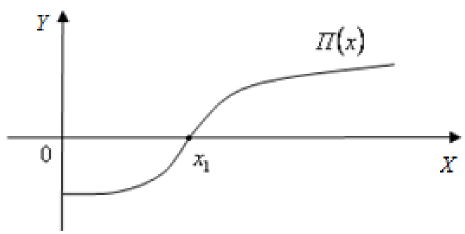


Рис. 42

Пример 5.1. Найти равновесную цену, если известны функции спроса $d(p)=60-p$ и предложения $s(p)=20+4p$. Найти выручку при рав новесной цене $P_0$, а также при ценах $p_1 = 5$; $p_2 = 10$.

Решение. Очевидно, что $p \geq 0$, $d(p) \geq 0$, $s(p) \geq 0$, тогда для функций $d(p)$ и $s(p)$ имеем:

$$\left.\begin{matrix} p \geq 0 \\ d(p) \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p \geq 0 \\ 60 - p \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leq p \leq 60; \\ 0 \leq d(p) \leq 60 \end{matrix},$$

$$\left.\begin{matrix} p \geq 0 \\ s(p) \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p \geq 0 \\ 20 + 4p \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p \geq 0 \\ p \geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leq p < \infty; \\ 20 \leq s(p) < \infty \end{matrix}$$

Точку равновесия найдем из условия $d(p) = s(p)$, то есть $60 - p = 20 + 4p$ или $5p = 40$; откуда $P_0 = 8$ – равновесная цена (рис. 43); при этом количество товара $q_0 = d(p_0) = 60 - 8 = 52.$

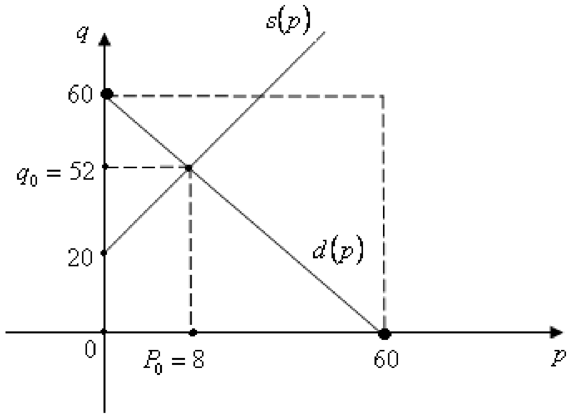


Рис.43

При равновесной цене выручка равна $p \cdot \min(d(p);\ s(p))$.

При $p_1 = 5$ получим

$$5 \cdot \min(d(p_1);\ s(p_1)) = 5 \cdot \min(60 - 5;\ 20 + 4 \cdot 5) = 5 \cdot 40 = 200.$$

При $p_2 = 10$ получим

$$10 \cdot \min(d(p_2);\ s(p_2)) = 10 \cdot \min(60 - 10;\ 20 + 4 \cdot 10) = 10 \cdot 50 = 500.$$

Ответ: $P_0 = 8$, $q_0 = d(p_0) = 52$, $q_1 = d(5) = 200$, $q_2 = d(10) = 500.$

# Глава 6. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

## 6.1. Предел функции в точке и бесконечности

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех *x* таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta,$$

верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, при этом пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (рис. 44).

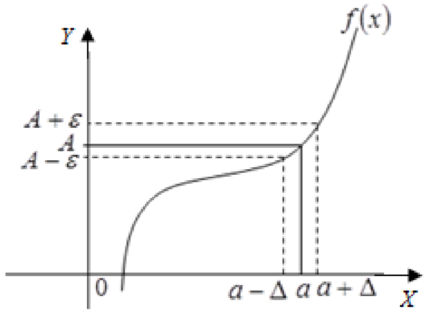


Рис. 44

Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ – называется пределом функции *f(x)* в точке $x = a$ слева, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции *f(x)* в точке $x = a$ справа (рис. 45).

Пределы $A_1$ и $A_2$ называются также односторонними пределами функции *f(x)* в точке $x = a$. Также говорят, что *A* – конечный предел функции *f(x)*.

Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех *x*, $|x| > M$ выполняется неравенство: $|A - f(x)| < \varepsilon$.

При этом предполагается, что функция *f(x)* определена в окрестности бесконечности и записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

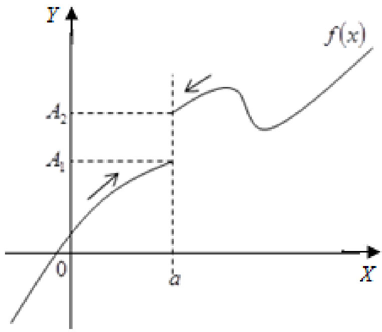


Рис. 45

Графически эти пределы можно представить на рис. 46..

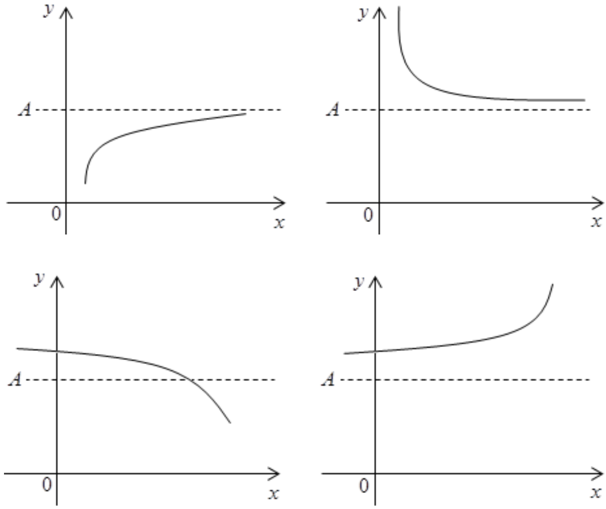


Рис. 46

### 6.2. Бесконечно малые и большие величины

Функция *f(x)* называется бесконечно малой при $x \to a$, где *a* может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только, если указать к какому числу стремится аргумент *x*. При различных значениях постоянной *a* функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример 6.1. Функция $f(x)=x^n$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и не является бесконечно малой при $x\to 1$, т. к. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x\to a$ имела предел, равный $A$, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x=a$ выполнялось условие

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$ ).

Свойства бесконечно малых функций.

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ тоже бесконечно малая функция при $x\to a$.
3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x\to a$.
4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Предел функции $f(x)$ при $x\to a$, где $a$ – число, равен бесконечности, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство

$$|f(x)|>M$$

выполняется при всех $x$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\Delta$.

Записывается $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Графически это можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 47):

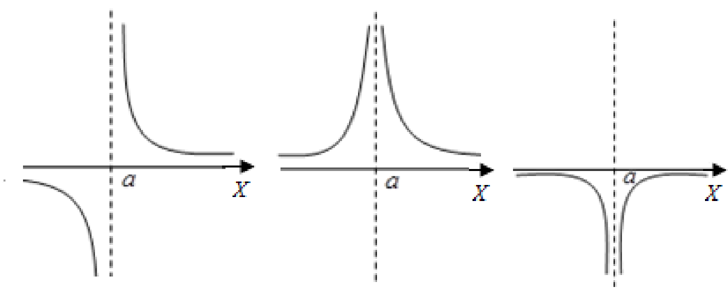


Рис. 47

Функция называется бесконечно большой при $x \to a$, где $a$ – число или одна из величин $\infty$, $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где $A$ – число или одна из величин $\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$ ) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty \cdot$$

Пусть $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Будем обозначать эти функции $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по быстроте их убывания, т. е. по быстроте их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция $\alpha$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция $\beta$.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = A, A \neq 0, A = const$, то $\alpha$ и $\beta$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции $\alpha$ и $\beta$ называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример 6.2. Сравним бесконечно малые при $x \to 0$ функции

$$f(x) = x^{10} \text{ и } f(x) = x.$$

Решение. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^{10}}{x} = \lim\limits_{x \to a} x^9 = 0$, т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Бесконечно малая функция $\alpha$ называется бесконечно малой порядка $k$ относительно бесконечно малой функции $\beta$, если предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых дают возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример 6.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\sin 7x}$.

Решение. Так как tg5$x$ ~ 5$x$ и sin7$x$ ~ 7$x$ при $x \to 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.$$

Пример 6.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Решение. Так как $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}\approx 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{0{,}5x^2}=\lim_{x\to 0}2x=0\cdot$$

## 6.3. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a}C=C$, где $C=const$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x\to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при *f(x)* < 0, *f(x)* ≥ 0, *f(x)* ≤ 0.

Теорема 6. Если $g(x) \le f(x) \le u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Функция *f(x)* называется ограниченной вблизи точки $x = a$, если существует такое число *M* > 0, что |*f(x)*| < *M* вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция *f(x)* имеет конечный предел при *x*→*a,* то она ограничена вблизи точки $x = a$.

## 6.4. Замечательные пределы

1. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad n < m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \textit{при} \quad n = m; \\ \infty, & \textit{при} \quad n > m; \end{cases}$$

где

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $\qquad Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ – многочлены.

2. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

3. Третий замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Пример 6.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, mx}{\sin nx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, mx}{\sin nx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx}{nx} = \dfrac{m}{n}$.

Пример 6.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Пример 6.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix}y=x-1\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{matrix}\right\}=$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}.$$

Пример 6.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Решение. Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

Тогда $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 6.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное числителю выражение:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}\cdot\frac{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1(1+1)}=-1$$

## 6.5.Непрерывность функции

Функция *f(x)*, определенная в окрестности некоторой точки $x_0$, называется непрерывной в точке $x_0$, если предел функции в точке и ее значение в этой точке равны, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Если функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки $x_0$, но не является непрерывной в самой точке $x_0$, то она называется разрывной функцией, а точка $x_0$ – точкой разрыва.

Функция *f(x)* называется непрерывной в точке $x=x_0$, если приращение функции в точке $x_0$ является бесконечно малой величиной

$$f(x)=f(x_0)+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке $x_0$ функций – есть функция, непрерывная в точке $x_0$.
2. Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что *g(x)* не равна нулю в точке $x_0$.
3. Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Если $u=f(x), v=g(x)$ – непрерывные функции в точке $x=x_0$, то функция $v=g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

## 6.6. Точки разрыва и их классификация

Рассмотрим некоторую функцию *f(x)*, непрерывную в окрестности точки $x_0$, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x=x_0$, является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа (рис. 48).

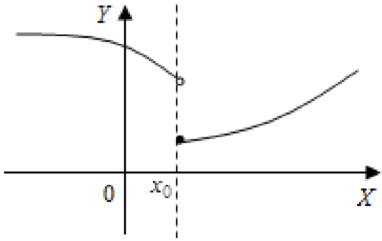


Рис. 48

Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева (рис. 49).

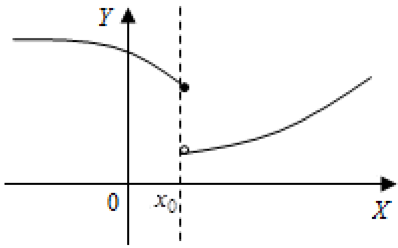


Рис. 49

Точка $x_0$ называется точкой разрыва функции *f(x)*, если *f(x)* не определена в точке $x_0$ или не является непрерывной в этой точке.

Точка $x_0$ называется точкой разрыва 1 – го рода, если в этой точке функция *f(x)* имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x) \cdot$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют устранимой точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Точка $x_0$ называется точкой разрыва 2 – го рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример 6.10. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{1}{x}$

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода (рис. 50), так как $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$.

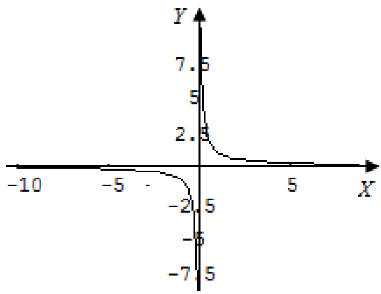


Рис. 50

Пример 6.11. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, то есть в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, так как если доопределить функцию (рис. 51):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

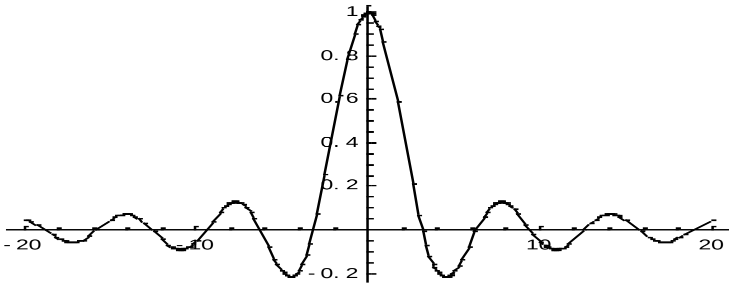


Рис. 51

### 6.7. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Функция *f(x)* называется непрерывной на интервале (отрезке), если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815–1897) – немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

2. Функция, непрерывная на отрезке [*a, b*], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т. е. существуют такие значения $x_1$ и $x_2$, что $f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$, причем $m\le f(x)\le M$ .

Отметим, что эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – *f(x)* = sin*x*).

3. Вторая теорема Больцано–Коши. Функция, непрерывная на отрезке [*a, b*], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

4. Если функция *f(x)* непрерывна в точке $x=x_0$, то существует некоторая окрестность точки $x_0$, в которой функция сохраняет знак.

5. Первая теорема Больцано (1781–1848) – Коши). Если функция *f(x)* – непрерывная на отрезке [*a, b*] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где *f(x)* = 0.

Функция *f(x)* называется равномерно непрерывной на отрезке [*a, b*], если для любого ε > 0 существует Δ > 0 такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что $|x_2-x_1|<\Delta$, верно неравенство

$$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|<\varepsilon .$$

Отличие равномерной непрерывности от «обычной» в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от $x$, а при «обычной» непрерывности Δ зависит от ε и $x$.

6. Теорема Кантора (Кантор Георг (1845–1918) – немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. (Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

7. Если функция *f(x)* определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x=g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример 6.12. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Решение. Найдем односторонние пределы функции

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$$

В точке $x=-1$ – функция непрерывна, в точке $x=1$ – имеется точка разрыва 1 – го рода (рис. 52).

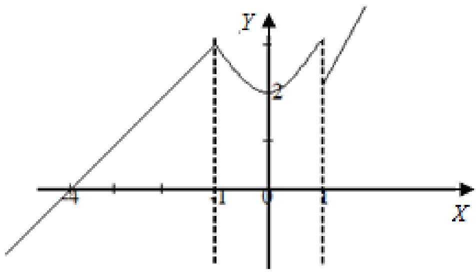


Рис. 52

Пример 6.13. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

Решение. Найдем односторонние пределы функции

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

В точке $x=0$ – функция непрерывна, в точке $x=1$ – точка разрыва 1– го рода (рис. 53).

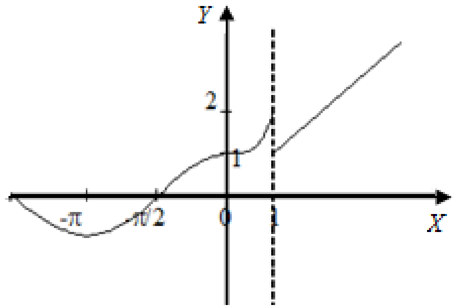


Рис. 53

## ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Определители II и III порядка. Правила вычисления.
2. Свойства определителей;
3. Миноры. Алгебраические дополнения. Определители $n$-го порядка.
4. Матрицы (определение, виды).
5. Действия над матрицами. Свойства операций над матрицами.
6. Обратная матрица, алгоритм ее нахождения.
7. Ранг матрицы. Методы нахождения ранга матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.
8. Решение системы линейных уравнений матричным методом.
9. Решение системы линейных уравнений методом Крамера.
10. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
11. Решение произвольных систем линейных $m$ уравнений с $n$ неизвестными.
12. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балан-совый анализ).
13. Векторы. Линейные операции над векторами.
14. Скалярное произведение векторов и его свойства.
15. Выражение скалярного произведения векторов в декартовых координатах.
16. Угол между векторами. Условие ортогональности векторов.
17. $n$-мерный вектор и векторное пространство.
18. Размерность и базис векторного пространства.
19. Переход к новому базису.
20. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
21. Линейная модель обмена.
22. Линия на плоскости. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом и его частные случаи.
23. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
24. Каноническое и параметрическое уравнения прямой на плоскости.
25. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.
26. Общее уравнение прямой и его исследование.
27. Расстояние от точки на плоскости.
28. Взаимное расположение прямых на плоскости.
29. Окружность и ее свойства.
30. Эллипс и его свойства.
31. Гипербола и ее свойства.

32. Парабола и ее свойства.
33. Уравнения плоскости в пространстве.
34. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
35. Расстояние от точки до плоскости.
36. Уравнения прямой в пространстве.
37. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
38. Угол между прямыми в пространстве.
39. Угол между прямой и плоскостью в пространстве.
40. Взаимное расположение прямых в пространстве.
41. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
42. Функция и ее свойства.
43. Основные элементарные функции и их свойства.
44. Предел функции в точке. Теоремы о пределе функции.
45. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Связь между ними.
46. Избавление от неопределенностей. Приемы вычисления пределов.
47. Замечательные пределы.
48. Непрерывность функции в точке.
49. Односторонняя непрерывность.
50. Точки разрыва и их классификация.
51. Свойства непрерывных на отрезке функций (теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 500 с.
2. *Бугров Я. С.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1988. –224 с.
3. *Шипачев И. С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990.– 480 с.
4. *Кремер Н. Ш.* и др. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для ВУЗов. – М., 1997. –
5. Линейная алгебра: учебное пособие / Г. Л. Окунева, С. В. Рябцева, Е. В. Селиванова, И. В. Дюкарева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2014. – 120 с.
6. Аналитическая геометрия: учебное пособие / Г. Л. Окунева, С. В. Рябцева, Е. В. Селиванова, В. И. Дюкарева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2016. – 70 с.
7. *Окунева, Г. Л.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Г. Л. Окунева. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2013. – 122 с.

## Содержание

Учебное издание

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.
# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Составители**: Окунева** Галина Леонидовна
**Польшина** Лидия Борисовна
**Овчарова** Наталья Васильевна

Подписано в печать 20.05.20. Формат 60х84/16. Усл. печ. л.5,5. Уч.-изд. л.5,3.
Тираж 60 экз. Заказ № Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46