ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные понятия

Числовая последовательность записанная в виде суммы



называется числовым рядом или просто – рядом. – члены ряда, – общий член ряда.

Ряд считается заданным, если известна формула общего члена или несколько членов ряда.

Например, гармонический ряд или ряд членов бес-конечно убывающей геометрической прогрессии: 

Суммы конечного числа членов ряда называются частичными суммами 

Сами частичные суммы образуют последовательность частичных сумм.

Ряд  называется сходящимся, если последовательность частичных сумм сходится к какому-нибудь числу , которое называется суммой ряда:



Если последовательность частичных сумм не имеет предела, является расходящейся, то и ряд расходится.

Пример. Показать, что ряд сходится: 

Решение. Рассмотрим сумму  первых членов



Представим общий член ряда в виде суммы простых дробей:









Так как сумма равна числу, то ряд сходится.

Пример. Определить, сходится или расходится ряд 

Решение. 

Так как сумма не определена, то ряд – расходится.

1. Свойства сходящихся рядов

Теорема1. Если сходится ряд вида

,

то сходится ряд вида  и наоборот, т. е. на сходи-мость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа первых членов ряда.

Теорема 2. Если ряд сходится, то сходится ряд , константа.

Теорема 3. Если ряды и  сходятся, то их суммы и разнос

ти сходятся: .

Теорема 4. Если ряд сходится, то его общий член ряда стре-мится к нулю, т. е. 

Данную теорему называют необходимым признаком сходимости ряда.

Теорема 5. Если общий член ряда не стремится к нулю  то ряд – расходится.

Пример. Определить, сходится или расходится ряд 

Решение. Оценим предел общего члена ряда 

Следовательно, ряд – расходится.

1. Знакоположительные числовые ряды. Признаки сходимости

Любая последовательность неотрицательных членов представляет собой ряд с неотрицательными членами.

Теорема. Для того, чтобы ряд  с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность час-тичных сумм этого ряда была ограниченной.

1. **Признак сравнения**.

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами и  и для всех  выполняется неравенство:  Тогда возможны два случая: 1) если ряд – сходится, то сходится ряд ; 2) если ряд – расходится, то расходится и ряд .

На практике этот признак часто используется в предельной форме.

Если предел отношения  то ряды являются равно сходящимися, т. е. если ряд – сходится, то и ряд – сходится; если ряд – расходится, то и ряд – расходится.

Пример. Определить, сходится или расходится ряд 

Решение. Для сравнения выберем ряд  Этот ряд как беско-нечно убывающая геометрическая прогрессия имеет сумму: следовательно – сходится.

Так как для всех выполняется неравенство:  то ряд  тоже сходится.

Пример. Определить, сходится или расходится ряд 

Решение. Для сравнения выберем ряд  Этот ряд сходится. Найдем предел отношения



так как предел равен числу, то искомый ряд сходится.

2. **Признак Д’аламбера**.

Пусть дан ряд  с неотрицательными членами и существует

 Тогда возможны три случая:

1. если  ряд сходится;

2. если  ряд расходится;

3. если  ничего определенного о поведении ряда сказать нельзя.

Пример. Доказать сходимость ряда 

Решение. Определим члены ряда  



следовательно, по признаку Д’аламбера ряд сходится.

3. **Признак Коши**.

Пусть дан ряд  с неотрицательными членами и существует

 Тогда возможны три случая:

1. если  ряд сходится;

2. если  ряд расходится;

3. если  ничего определенного о поведении ряда сказать нельзя.

Пример. Доказать сходимость ряда 

Решение. Оценим предел



следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

4. **Интегральный признак Коши**.

Если члены ряда  с неотрицательными членами можно заме-нить значениями некоторой функции  положительной, непрерывной, убывающей на полуинтервале  и существует  то если интеграл сходится, то и ряд сходится, если интеграл расходится, то и ряд расходится.

Пример. Найти области сходимости и расходимости ряда 

Решение. Рассмотрим функцию 

Вычислим интеграл



Таким образом, 

Данный ряд называется гармоническим.

1. Знакочередующиеся ряды

Ряд вида



называется знакочередующимся рядом.

Признак Лейбница. Если абсолютные члены знакочередующегося ряда  монотонное убывают : и общий член ряда стремится к нулю  то ряд сходится.

Следствие из признака Лейбница: погрешность при приближенных вычислениях суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превосходят значения первого члена остатка ряда.

Пример. Определить сходимость ряда 

Решение. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) члены ряда монотонно убывают: 

2) 

Условия признака выполняются, следовательно, ряд сходится.

1. Знакопеременные ряды

Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным рядом 

Рассмотрим ряд состоящий из абсолютных членов знакопеременного ряда: 

Теорема. Если ряд  сходится, то и ряд  сходится.

Признак является достаточным, но не необходимым, так как сущест-вуют ряды, которые сами сходятся, а ряды из их модулей расходятся.

Если ряд, составленный из абсолютных членов ряда сходится, то сам ряд сходится абсолютно и называется абсолютно сходящимся рядом.

Если ряд из модулей членов ряда расходится, то сам ряд называется условно сходящимся.

Пример. Определить сходимость ряда 

Решение. Предложенный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из модулей  расходится. Следовательно, ряд сходится условно.

Пример. Определить сходимость ряда 

Решение. Предложенный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд из модулей  сходится. Следовательно, ряд сходится абсолютно.

1. Функциональные ряды

Выражение  называется функциональным рядом, 

Если при  функциональный ряд сходится, то говорят, что этот ряд сходится в точке .

Если функциональный ряд сходится в каждой точке области , то этот ряд называется сходящимся в области 

Сама область  называется областью сходимости.

Критерий Коши. Для того, что функциональный ряд сходился в об-ласти , необходимо и достаточно, чтобы для любого сколь угодно малого положительного числа и любого  существовал такой номер члена ряда , для которого бы выполнялось условие:



Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используют признак Д’аламбера или признак Коши. При этом решают неравенства:

 если находят область сходимости,

 если находят область расходимости,

Пример. Найти область сходимости ряда 

Решение. Оценим предел





Получили область абсолютной сходимости 

Необходимо исследовать поведение ряда на границах области.

1) Пусть  Подставим точку в ряд и получим ряд:



Этот ряд сходится, хоть и условно.

2) Пусть . Подставим точку в ряд и получим ряд:



Этот ряд расходится.

Таким образом, область сходимости ряда имеет вид: 

Функциональный ряд  называется равномерно сходящимся в области , если для любого сколь угодно малого положительного числа и любого  существует такой номер члена ряда , что для остатка ряда выполняется условие:



Признак Вейерштрасса. Если для сходящегося в области  функционального ряда найдется сходящийся знакоположительный числовой ряд  такой, что для любого  найдется такой номер члена ряда  что для  выполняется условие:



то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно в области .

Числовой ряд в этом случае называется мажорирующим рядом для функционального ряда.

1. Свойства равномерно сходящихся рядов

Пусть функциональный ряд  равномерно сходится в облас-ти . Тогда

1. равномерная сходимость ряда не нарушится, если умножить ряд на ограниченную функцию, т. е. 

2. если функции  непрерывны в области , частичная сумма тоже непрерывна в области ;

3. если функции  непрерывны в области , имеет место ра-венство:



т. е. равномерно сходящиеся ряды можно интегрировать

4. если на отрезке  функции  дифференцируемые, то имеет место равенство



т. е. равномерно сходящиеся ряды можно дифференцировать.

1. Степенные ряды

Ряд виды



Называется степенным рядом, где  коэффициенты степенного ряда.

Множество значений , при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости. Эта область для степенного ряда не является пустой, так как степенной ряд всегда сходится при 

Теорема Абеля 1. Теорема состоит из двух частей.

1) Если степенной ряд сходится при(), то он сходится, причем абсолютно, для всех , удовлетворяющих неравенству



2) Если степенной ряд расходится при, то он расходится для всех , удовлетворяющих неравенству 

Теорема Абеля 2. Если ряд  сходится не при всех  и не только в точке , то существует такое число , что ряд сходится абсолютно при  и расходится при (рис. 1).

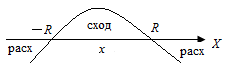


Рис. 1

Интервал  называется интервалом сходимости, Число  называется радиусом области сходимости степенного ряда.

Поведение степенного ряда на границах области в точках  решается отдельно.

Теорема. Если существует предел радиус сходимости степенного ряда равен 

Пример. Исследовать ряд 

Решение. Определим радиус области сходимости



Следовательно, область сходимости имеет вид 

Исследуем поведение ряда на границах области.

1) , знакочередующийся ряд, по признаку Лейбница сходится;

2) ,  гармонический ряд, расходится.

Таким образом, область сходимости имеет вид 

Пример. Исследовать ряд 

Решение. Определим радиус области сходимости



Следовательно, область сходимости имеет вид 

Пример. Исследовать ряд 

Решение. Определим радиус области сходимости



Следовательно, область сходимости имеет вид 

1. Свойства степенных рядов

Пусть некоторая функция  является суммой степенного ряда с интервалом сходимости . Тогда говорят, что функция  разлагается в степенной ряд на интервале  и пишут:



Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция  разлагается в степенной ряд на ин-тервале , то она на нем дифференцируема и производная равна

 Интервал сходимости тот же.

Теорема 2. Если функция  разлагается в степенной ряд на ин-тервале , то она на нем интегрируема и интеграл равен





Интервал сходимости тот же.

Иногда рассматривается разложение функции в ряд более общего вида



Он приводится к предыдущему ряду заменой . В этом случае говорят, что функция раскладывается в ряд по степеням 

Данный ряд можно интегрировать и дифференцировать.

Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд.

Если функция  разлагается в степенной ряд на интервале , то такое разложение единственное.

Доказательство. Так как  разлагается в степенной ряд, значит сама функция является его суммой. Ряд можно многократно дифференцировать. Найдем производные функции до (*n*) порядка включительно:







………………………



Пусть  Найдем значения производных функции при этом 

Выразим коэффициенты разложения:

Следовательно, все коэффициенты выражены единственным образом,

т. е. функция разлагается в ряд и имеет вид



Данный ряд называется рядом Маклорена для функции .

Более общий ряд используют при разложении в окрестности точки  Он называется рядом Тейлора6



1. Разложение функций в ряд Маклорена

Запишем разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.

1.  

2. 

3. 

4. 

5. 

6.  

7. 

8.  

Пример. Разложить многочлен  по степеням .

Решение. Используем разложение в ряд Тейлора при  Найдем производные функции:

Найдем значения производных и функции в точке 

Разложение имеет вид

 Пример. Разложить функцию  в ряд по степеням 

Решение. Воспользуемся разложением функции в ряд Маклорена:



Пусть  Получим





1. Применение степенных рядов для приближенных вычислений

Степенные ряды имеют разные приложения. С их помощью с разной степенью точности можно вычислять значения функций, пределов, находить приближенное значение определенных интегралов, прибли-женное решение дифференциальных уравнений.

1. Вычисление значений функций.

Пример. Найти значение функции в точке 

Решение. Используем разложение функции в ряд Маклорена.





Начиная с четвертого элементы, сумма ряда не превосходит значения 

Пример. Вычислить значение 

Решение. Представим функцию в виде:



Воспользуемся разложением бинома при 





Пример. Вычислить значение натурального логарифма 

Решение. Используем разложение

Пусть  Тогда 

 Пусть 



Вычислим





2. Вычисление определенных интегралов.

Пример. Вычислить 

Решение. Используем разложение на 



,





Точность вычислений 

3. Решение дифференциальных уравнений.

Пусть задано дифференциальное уравнение



Воспользуемся разложением функции в ряд Тейлора



Здесь 

Пример. Записать пять членов решения дифференциального урав-

нения 

Решение. Выпишем или найдем значений функции и производных от

нее в точке (0, 1).









Тогда решение уравнения можно представить так:

