Тема РГЗ: «Дифференциальные уравнения»

Источник: Сборник индивидуальных заданий по высшей математики ч.2 /под ред. А.П. Рябушко. Стр.290-296 (№1-4), стр. 301-306 (№1-3), стр.314-321 (№1,4,5).

11.8. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ.11

ИДЗ-11.1

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1

1.1. $e^{x+3y}dy = xdx$. (*Ответ:* $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.2. $y' \sin x = y \ln y$. (*Ответ:* $\ln y = C \operatorname{tg}(x/2)$.)

1.3. $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$. (*Ответ:* $\ln |\cos y| = x - x^2 + C$.)

1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$. (*Ответ:* $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$.)

1.5. $(1 + e^x)ydy - e^y dx = 0$. (*Ответ:* $-e^{-y}(y + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C$.)

1.6. $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} ydy = 0$. (*Ответ:* $\ln(y^2 + 3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.7. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$. (*Ответ:* $C = \cos x / \cos y$.)

1.8. $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$. (*Ответ:* $\sqrt{2y + 1} = C / \cos x$.)

1.9. $(\sin(x + y) + \sin(x - y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$ (*Ответ:* $\operatorname{tg} y = C + 2 \cos x$.)

1.10. $(1 + e^x)yy' = e^x$. (*Ответ:* $y^2 = 2 \ln C(e^x + 1)$.)

1.11. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$. (*Ответ:* $\ln |\sin y| = C + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x$.)

1.12. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0$. (*Ответ:* $\sin y = C(e^x - 1)^3$.)

1.13. $y' = e^{2x} / \ln y$. (*Ответ:* $y(\ln y - 1) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.)

1.14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$. (*Ответ:* $3^y = \frac{1}{2}3^{-x^2} + C \ln 3$.)

1.15. $(\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y))y' = \sec x$. (*Ответ:* $\sin 2y = \operatorname{tg} x + C$.)

1.16. $y' = e^{x^2}x(1 + y^2)$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2}e^{x^2}$.)

1.17. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$. (*Ответ:* $\operatorname{tg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + 2C$.)

1.18. $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x$. (*Ответ:* $y = C \sin x - 2$.)

1.19. $1 + (1 + y')e^y = 0$. (*Ответ:* $C(e^y - 1) = e^{-x}$.)

1.20. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$. (*Ответ:* $y = C \cos x + 2$.)

1.21. $\frac{e^{-x^2}dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sin 2y = C - \frac{1}{2}e^{x^2}$.)

1.22. $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$. (*Ответ:* $\ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) \right| = C - e^x$.)

1.23. $(1 + e^{3y})xdx = e^{3y}dy$. (*Ответ:* $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3y}) + C$.)

1.24. $(\sin(2x + y) - \sin(2x - y))dx = \frac{dy}{\sin y}$. (*Ответ:* $\operatorname{ctg} y = C - \sin 2x$.)

1.25. $\cos y dx = 2\sqrt{1 + x^2}dy + \cos y \sqrt{1 + x^2}dy$. (*Ответ:* $2 \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) \right| + y = \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| + C$.)

1.26. $y'\sqrt{1 - x^2} - \cos^2 y = 0$. (*Ответ:* $\operatorname{tg} y = \arcsin x + C$.)

1.27. $e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x) \sec^2 y dy$. (*Ответ:* $\operatorname{tg} y = C / (e^x - 1)$.)

1.28. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$. (*Ответ:* $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C - 2 \sin x$.)

1.29. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \sin 2y = \sin 2x + C$.)

1.30. $3^{y^2 - x^2} = yy'/x$. (*Ответ:* $3^{-y^2} = 3^{-x^2} - 2C \ln 3$.)

2

2.1. $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2$. (*Ответ:* $Cx = \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}$.

2.2. $y'/7^{y-x} = 3$. (*Ответ:* $7^{-y} = 3 \cdot 7^{-x} + C \ln 7$.)

2.3. $y - xy' = 2(1 + x^2y')$. (*Ответ:* $y = Cx/\sqrt{1 + 2x^2} + 2$.)

2.4. $y - xy' = 1 + x^2y'$. (*Ответ:* $y = Cx/(x + 1) + 1$.)

2.5. $(x+4)dy - xydx = 0$. (*Ответ:* $y = Ce^x/(x+4)^4$.)

2.6. $y' + y + y^2 = 0$. (*Ответ:* $y/(y+1) = C - x$.)

2.7. $y^2 \ln x dx - (y-1)xdy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{y} + \ln y = C + \frac{1}{2}\ln^2 x.\right)$

2.8. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y + \ln\frac{(y-1)^2}{y} = C + \ln x.\right)$

2.9. $y' + 2y - y^2 = 0$. (*Ответ:* $\sqrt{(y-2)/y} = Ce^x$.)

2.10. $(x^2 + x)ydx + (y^2+1)dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{y^2}{2} + \ln y = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.\right)$

2.11. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$. (*Ответ:* $\sqrt[3]{y^3+1} = C/\sqrt{x^2-1}$.)

2.12. $(1+y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C + \operatorname{arctg} x.\right)$

2.13. $y' = 2xy + x$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln|2y+1| = x^2/2 + C.\right)$

2.14. $y - xy' = 3(1 + x^2y')$. (*Ответ:* $y = C\sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{x+3} + 3$.)

2.15. $2xyy' = 1 - x^2$. $\left(\textit{Ответ: } y^2 = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C.\right)$

2.16. $(x^2-1)y' - xy = 0$. (*Ответ:* $y = C\sqrt{x^2-1}$.)

2.17. $(y^2x + y^2)dy + xdx = 0$. (*Ответ:* $y^3 = 3(C - x + \ln|x+1|)$.)

2.18. $(1+x^3)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}.\right)$

2.19. $xy' - y = y^2$. (*Ответ:* $y/(y+1) = Cx$.)

2.20. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$. (*Ответ:* $\sqrt{y^2+1} = \ln Cx$.)

2.21. $y' - xy^2 = 2xy$. (*Ответ:* $\ln|y/(y+2)| = C + x^2$.)

2.22. $2x^2yy' + y^2 = 2$. (*Ответ:* $\ln|2 - y^2| = C + 1/x$.)

2.23. $y' = (1+y^2)/(1+x^2)$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg} y = C + \operatorname{arctg} x$.)

2.24. $y'\sqrt{1+y^2} = x^2/y$. (*Ответ:* $\sqrt{(1+y^2)^3} = C + x^3$.)

2.25. $(y+1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy$. (*Ответ:* $y + \ln y = \arcsin x + x^2/2 + C$.)

2.26. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{C\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}.\right)$

2.27. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}$. $\left(\textit{Ответ: } 2y^2 - y^4 = 4\ln|x| + 2x^2 + C.\right)$

2.28. $(xy - x)^2dy + y(1-x)dx = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{y^2}{2} - 2y + \ln|y| = \ln|x| + \frac{1}{x} + C.\right)$

2.29. $(x^2y - y)^2y' = x^2y - y + x^2 - 1$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.\right)$

2.30. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$. (*Ответ:* $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$.)

3

3.1. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$. $\left(\textit{Ответ: } \sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{|x|}.\right)$

3.2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$. (*Ответ:* $(y^2 - x^2)^2 Cx^2y^3$.)

3.3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$. (*Ответ:* $y = Cx^2 - x$.)

3.4. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^2+x^2}{x^2} = \ln\frac{C}{x}.\right)$

3.5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. (*Ответ:* $y/(x-y) = Cx$.)

3.6. $y^2 + x^2y' = xyy'$. (*Ответ:* $e^{y/x} = Cy$.)

3.7. $xy' - y = x\operatorname{tg}(y/x)$. (*Ответ:* $\sin(y/x) = Cx$.)

3.8. $xy' = y - xe^{y/x}$. (*Ответ:* $e^{-y/x} = \ln Cx$.)

3.9. $xy' - y = (x+y)\ln((x+y)/x)$. (*Ответ:* $\ln|1 + y/x| = Cx$.)

3.10. $xy' = y\cos\ln(y/x)$. $\left(\textit{Ответ: } \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right) = \ln Cx.\right)$

3.11. $(y + \sqrt{xy})\,dx = xdy$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{x}{4}\ln^2 Cx.\right)$

3.12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$. (*Ответ:* $\arcsin(y/x) = \ln Cx$.)

3.13. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$. (*Ответ:* $-e^{-y/x} = \ln Cx$.)

3.14. $y' = y/x - 1$. (*Ответ:* $y = x\ln(C/x)$.)

3.15. $y'x + x + y = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.\right)$

3.16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = \ln Cx.\right)$

3.17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$. (*Ответ:* $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$.)

3.18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{2}{5}\ln\left(\frac{y+x}{x}\right) + \frac{9}{5}\ln\left(\frac{y^2+4x^2}{x^2}\right) - \frac{3}{10}\operatorname{arctg}\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}.\right)$

3.19. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$. (*Ответ:* $y = x/\ln Cx$.)

3.20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{y}{x} + 2\ln\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}.\right)$

3.21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{y} + 2\ln\frac{y}{x} = -\ln Cx.\right)$

3.22. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx + xdy = 0$. (*Ответ:* $y = x\ln^2|Cx|$.)

3.23. $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$. (*Ответ:* $y = xe^{C/x}$.)

3.24. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$. (*Ответ:* $y^2 = C^3/3^x - x^2/3$.)

3.25. $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0$. (*Ответ:* $(y - 3x)/y = \ln^3(Cx)$.)

3.26. $(x + 2y)dx + xdy = 0$. (*Ответ:* $y = C^3/(3x^2) - x/3$.)

3.27. $(2x - y)dx + (x+y)dy = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln Cx.\right)$

3.28. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$. (*Ответ:* $y^2 = x^2/\ln(Cx)^4$.)

3.29. $x^2y' = y(x+y)$. (*Ответ:* $y = -x/\ln(Cx)$.)

3.30. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. (*Ответ:* $y^2 = x^2\ln(Cx)^2$.)

4. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

4.1. $(x^2+1)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = (x^3 + 3x)/(x^2+1)^2$)

4.2. $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = \sin x$.)

4.3. $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = e^{-x}\ln\frac{1}{1-x}.\right)$

4.4. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = x^4 - x^2$.)

4.5. $y' = 2x(x^2 + y)$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $y = x^2 + 1 - e^{x^2}$.)

4.6. $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $y = (x+1)e^x$.)

4.7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{e^{-x^2}}{2x}.\right)$

4.8. $\cos ydx = (x + 2\cos y)\sin ydy$, $y(0) = \pi/4$. $\left(\textit{Ответ: } x = \left(\sin^2 y - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cos y}.\right)$

4.9. $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = -(\ln x)/x$.)

4.10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$. (*Ответ:* $x = y^3 + y^2$.)

4.11. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln ydy$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x = 2\ln y + 1 - y$.)

4.12. $y' = y/(3x - y^2)$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x = y^2 - y^3$.)

4.13. $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x(y-1)^2 = (y - \ln y - 1)$.)

4.14. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = e^x\ln x$.)

4.15. $y = x(y' - x\cos x)$, $y(\pi/2) = 0$. (*Ответ:* $y = (\sin x - 1)x$.)

4.16. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$. (*Ответ:* $y = (\ln^5 x - \ln^2 x)/3$.)

4.17. $(2e^y - x)y' = 1$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $x = e^y - e^{-y}$.)

4.18. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = (x^2 - 1/x)e^{-x}$.)

4.19. $(x + y^2)dy = ydx$, $y(0) = 1$. (*Ответ:* $x = y^2 - y$.)

4.20. $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$, $y(0) = \pi/2$. (*Ответ:* $x = -\sin y\cos y$.)

4.21. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{3x^4 + 4x^3}{12(x+1)}.\right)$

4.22. $(xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$. (*Ответ:* $y = -x^2\ln x$.)

4.23. $xy'+y=\sin x$, $y(\pi/2)=2/\pi$. (*Ответ:* $y=(1-\cos x)/x$.)

4.24. $(x^2-1)y'-xy=x^3-x$, $y(\sqrt{2})=1$. (*Ответ:* $y=x^2-1$.)

4.25. $(1-x^2)y'+xy=1$, $y(0)=1$. (*Ответ:* $y=x+\sqrt{1-x^2}$.)

4.26. $y'\operatorname{ctg}x-y=2\cos^2 x\operatorname{ctg}x$, $y(0)=0$. $\left(\text{Ответ: } y=\frac{6\sin x-2\sin^3 x}{3\cos x}.\right)$

4.27. $x^2y'=2xy+3$, $y(1)=-1$. (*Ответ:* $y=-1/x$.)

4.28. $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=0$. (*Ответ:* $y=0{,}5x^2e^{-x^2}$.)

4.29. $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$, $y(0)=0$. $\left(\text{Ответ: } y=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}.\right)$

4.30. $xy'+y=\ln x+1$, $y(1)=0$. (*Ответ:* $y=\ln x$.)

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

5.1. $y'+y=x\sqrt{y}$. (*Ответ:* $y=(xe^{x/2}-2e^{x/2}+C)^2e^{-x}$.)

5.2. $ydx+2xdy=2y\sqrt{x}\sec^2 ydy$. (*Ответ:* $x=(y\operatorname{tg}y+\ln|\cos y|+C)^2/y^2$.)

5.3. $y'+2y=y^2e^x$. (*Ответ:* $y=1/(Ce^{2x}+e^x)$.)

5.4. $y'=y^4\cos x+y\operatorname{tg}x$. (*Ответ:* $y=1/(\cos x\sqrt[3]{C-\operatorname{tg}x})$.)

5.5. $xydy=(y^2+x)dx$. (*Ответ:* $y=x\sqrt{2(C-1/x)}$.)

5.6. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$. (*Ответ:* $y=1/(x^2\sqrt{2(e^x+C)})$.)

5.7. $y'x^3\sin y=xy'-2y$. (*Ответ:* $x=\sqrt{y/(C-\cos y)}$.)

5.8. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$. (*Ответ:* $x=1/(y(C-\ln^2 y))$.)

5.9. $2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy}{x^2-1}$. (*Ответ:* $y=\sqrt{C-\sqrt{x^2-1}}\sqrt[4]{x^2-1}$.)

5.10. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$. $\left(\text{Ответ: } y=\frac{x^4}{4}(C+\ln x)^2.\right)$

5.11. $xy^2y'=x^2+y^3$. (*Ответ:* $y=x\sqrt[3]{3(C-1/x)}$.)

5.12. $(x+1)(y'+y^2)=-y$. (*Ответ:* $y=1/((x+1)(C+\ln|x+1|))$.)

5.13. $y'x+y=-xy^2$. (*Ответ:* $y=1/(x(C+\ln x))$.)

5.14. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$. (*Ответ:* $y=e^{x^2/2}/\sqrt{2(C+x)}$.)

5.15. $xy'-2\sqrt{x^3y}=y$. (*Ответ:* $y=x(x^2/2+C)^2$.)

5.16. $y'+xy=x^3y^3$. (*Ответ:* $y=e^{-x^2/2}/\sqrt{x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C}$.)

5.17. $y'=\frac{x}{y}e^{2x}+y$. (*Ответ:* $y=e^x\sqrt{x^2+C}$.)

5.18. $yx'+x=-yx^2$. (*Ответ:* $x=1/(y(C+\ln y))$.)

5.19. $x(x-1)y'+y^3=xy$. (*Ответ:* $y=(x-1)/\sqrt{2(x-\ln x+C)}$.)

5.20. $2x^3yy'+3x^2y^2+1=0$. (*Ответ:* $y=\sqrt{C-x}/x^{3/2}$.)

5.21. $\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{y}-2x\right)dy$. (*Ответ:* $x=y/(y^2+C)$.)

5.22. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$. $\left(\text{Ответ: } y=e^{3x}\left(\frac{x}{3}e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{-2x}+C\right)^{3/2}.\right)$

5.23. $xy'+y=y^2\ln x$. (*Ответ:* $y=1/(\ln x+1+Cx)$.)

5.24. $xdx=(x^2/y-y^3)dy$. (*Ответ:* $x=y\sqrt{C-y^2}$.)

5.25. $y'+2xy=2x^3y^3$. (*Ответ:* $y=2e^{-x^2}/\sqrt{2x^2e^{-2x^2}+e^{-2x^2}+4C}$.)

5.26. $y'+y=x/y^2$. $\left(\text{Ответ: } y=e^{-x}\sqrt[3]{xe^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+C}.\right)$

5.27. $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$. (*Ответ:* $y=1/((x+C)\cos x)$.)

5.28. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. $\left(\text{Ответ: } y=\left(\frac{x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C}{x}\right)^2.\right)$

5.29. $y'-y+y^2\cos x=0$. (*Ответ:* $y=2e^x/(e^x(\cos x+\sin x)+C)$.)

5.30. $y'=x\sqrt{y}+\frac{xy}{x^2-1}$. $\left(\text{Ответ: } y=\left(\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4}+C\right)^2\sqrt{x^2-1}.\right)$

Решение типового варианта

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уразнения.

1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$.

Тогда

$$y=uv=e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$$

является общим решением исходного уравнения. Находим C, используя начальное условие: $y(0)=\ln C=\ln 5$, $C=5$.

Окончательно получаем, что частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}. \blacktriangleleft$$

5. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=xy+x^2y^2.$$

▶ Преобразуем уравнение для того, чтобы определить его тип. Получим

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x^2}y=\frac{x^2}{1+x^2}y^2.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$. Тогда

$$y'=u'v+v'u,\ u'v+v'u-\frac{x}{1+x^2}uv=\frac{x^2}{1+x^2}u^2v^2,$$

$$u'v+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{xv}{1+x^2}\right)=\frac{x^2u^2v^2}{1+x^2}. \tag{1}$$

Находим $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx}-\frac{xv}{1+x^2}=0$, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{xv}{1+x^2},\quad \frac{dv}{v}=\frac{xdx}{1+x^2},$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{xdx}{1+x^2},\ \ln|v|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ v=\sqrt{1+x^2}.$$

Полученное выражение для $v(x)$ подставляем в уравнение (1):

$$\frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2u^2(1+x^2)}{1+x^2},\ \frac{du}{u^2}=\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}},\ \int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{matrix}u_1(x)=x, & du_1=dx,\\ dv_1=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, & v_1=\sqrt{1+x^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Из последнего равенства получаем:

$$2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=x\sqrt{1+x^2}-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-2C,$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-C.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{u}=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-C,$$

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C,$$

$$u=\left(\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C\right)^{-1}$$

Окончательно находим, что общее решение исходного уравнения определяется формулой

$$y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-11.2

1. **Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y=\varphi(x)$ при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.**

1.1. $y'''=\sin x$, $x_0=\pi/2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$. (*Ответ:* 1,23.)

1.2. $y'''=1/x$, $x_0=2$, $y(1)=1/4$, $y'(1)=y''(1)=0$. (*Ответ:* 0,38.)

1.3. $y''=1/\cos^2 x$, $x_0=\pi/3$, $y(0)=1$, $y'(0)=3/5$. (*Ответ:* 2,69.)

1.4. $y'''=6/x^3$, $x_0=2$, $y(1)=0$, $y'(1)=5$, $y''(1)=1$. (*Ответ:* 6,07.)

1.5. $y'' = 4\cos 2x$, $x_0 = \pi/4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (*Ответ:* 4,36.)

1.6. $y'' = 1/(1 + x^2)$, $x_0 = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* 0,44.)

1.7. $xy''' = 2$, $x_0 = 2$, $y(1) = 1/2$, $y'(1) = y''(1) = 0$. (*Ответ:* 0,77.)

1.8. $y''' = e^{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$. (*Ответ:* 1,22.)

1.9. $y''' = \cos^2 x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/8$, $y''(0) = 0$. (*Ответ:* 3,58.)

1.10. $y'' = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $x_0 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (*Ответ:* 5,57.)

1.11. $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$, $x_0 = \frac{5}{4}\pi$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. (*Ответ:* 3,93.)

1.12. $y'' = x + \sin x$, $x_0 = 5$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* 5,31.)

1.13. $y'' = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. (*Ответ:* 0,15.)

1.14. $y'' = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$, $x_0 = \pi/4$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $-0{,}39$.)

1.15. $y''' = e^{x/2} + 1$, $x_0 = 2$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$. (*Ответ:* 25,08.)

1.16. $y'' = x/e^{2x}$, $x_0 = -1/2$, $y_0(0) = 1/4$, $y'(0) = -1/4$. (*Ответ:* 0,34.)

1.17. $y'' = \sin^2 3x$, $x_0 = \pi/12$, $y(0) = -\pi^2/16$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $-0{,}01$.)

1.18. $y''' = x\sin x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. (*Ответ:* 0,14.)

1.19. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$, $x_0 = 5\pi/2$, $y(\pi/2) = \pi/2$, $y'(\pi/2) = 1$, $y''(\pi/2) = -1$. (*Ответ:* 7,85.)

1.20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $x_0 = \pi$, $y(0) = -e^{-\pi}$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* 1,00.)

1.21. $y'' = \sin^3 x$, $x_0 = 2{,}5\pi$, $y(\pi/2) = -7/9$, $y'(\pi/2) = 0$. (*Ответ:* $-0{,}78$.)

1.22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $x_0 = 1$, $y(0) = -1/8$, $y'(0) = \frac{1}{8}\cos 2$, $y''(0) = \frac{1}{2}$. (*Ответ:* 0,08.)

1.23. $y'' = \frac{1}{\cos^2 (x/2)}$, $x_0 = 4\pi$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* 12,56.)

1.24. $y'' = 2\sin x \cos^2 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = -5/9$, $y'(0) = -2/3$. (*Ответ:* $-1{,}00$.)

1.25. $y'' = 2\sin^2 x \cos x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 1/9$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* 4,14.)

1.26. $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* 1,90.)

1.27. $y'' = 2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* 3,47.)

1.28. $y'' = x - \ln x$, $x_0 = 2$, $y(1) = -5/12$, $y'(1) = 3/2$. (*Ответ:* 1,62.)

1.29. $y'' = 1/x^2$, $x_0 = 2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$. (*Ответ:* 4,31.)

1.30. $y''' = \cos 4x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 15/16$, $y''(0) = 0$. (*Ответ:* 5,14.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

2.1. $(1 - x^2)y'' - xy = 2$. (*Ответ:* $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.)

2.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. (*Ответ:* $9C_2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$, $y = \pm x + C$.)

2.3. $x^3y'' + x^2y' = 1$. (*Ответ:* $y = C_1 \ln x + 1/x + C_2$.)

2.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. (*Ответ:* $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$.)

2.5. $y''x \ln x = y'$. (*Ответ:* $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.)

2.6. $xy'' - y' = x^2e^x$. (*Ответ:* $y = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$.)

2.7. $y''x \ln x = 2y'$. (*Ответ:* $y = C_1(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) + C_2$.)

2.8. $x^2y'' + xy' = 1$. (*Ответ:* $y = (\ln^2 x)/2 + C_1 \ln x + C_2$.)

2.9. $y'' = -x/y$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{C_1^2}{2}\arcsin\frac{x}{C_1} + \frac{x}{2}\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_2$.$\Big)$

2.10. $xy'' = y'$. (*Ответ:* $y = C_1x^2/2 + C_2$.)

2.11. $y'' = y' + x$. (*Ответ:* $y = -x^2/2 - x + C_1e^x + C_2$.)

2.12. $xy'' = y' + x^2$. (*Ответ:* $y = x^3/3 + C_1x^2/2 + C_2$.)

2.13. $xy'' = y' \ln (y'/x)$. (*Ответ:* $y = \frac{x}{C_1}e^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1} + C_2$.)

2.14. $xy'' + y' = \ln x$. (*Ответ:* $y = (x + C_1)\ln x - 2x + C_2$.)

2.15. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$. (*Ответ:* $y = -C_1 \cos x - x + C_2$.)

2.16. $y'' + 2xy'^2 = 0$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{1}{2C_1}\ln\frac{x - C_1}{x + C_1} + C_2$.$\Big)$

2.17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{2}{3C_1}(C_1x - 1)^{3/2} + C_2$.$\Big)$

2.18. $y'' - \frac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$. (*Ответ:* $y = x^4/8 - x^3/6 + C_1x^2/2 - C_1x + C_2$.)

2.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$. (*Ответ:* $y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2x + C_3$.)

2.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$. (*Ответ:* $y = -\sin^3 x/3 + C_1x/2 - C_1 \sin 2x/4 + C_2$.)

2.21. $y'' + 4y' = 2x^2$. (*Ответ:* $y = x^3/6 - x^2/8 + x/16 - C_1e^{-4x}/4 + C_2$.)

2.22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$. (*Ответ:* $y = 2e^x(x - 1) + C_1x^2/2 + C_2$.)

2.23. $x(y'' + 1) + y' = 0$. (*Ответ:* $y = -x^2/4 + C_1 \ln x + C_2$.)

2.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$.$\Big)$

2.25. $y'' + y' = \sin x$. $\Big($*Ответ:* $y = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - C_1e^{-x} + C_2$.$\Big)$

2.26. $x^2y'' = y'^2$. (*Ответ:* $y = C_1x - C_1^2 \ln (x + C_1) + C_2$.)

2.27. $2xy''y' = y'^2 - 4$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{2}{3C_1}(C_1x + 4)^{3/2} + C_2$.$\Big)$

2.28. $y'''x \ln x = y''$. $\Big($*Ответ:* $y = \frac{C_1x^2}{4}(2 \ln x - 3) + C_2x + C_3$.$\Big)$

2.29. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$. (*Ответ:* $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$.)

2.30. $(1 + x^2)y'' = 2xy$. (*Ответ:* $y = C_1x^3/3 + C_1x + C_2$.)

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

3.1. $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = -\ln|1 - x|$, $y = 0$.)

3.2. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = (1 \pm 3x/2)^{2/3}$, $y = 1$.)

3.3. $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = \sqrt{2x + 1}$, $y = 1$.)

3.4. $y'' + 2yy'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$. (*Ответ:* $x = y^3/3 - y - 2/3$, $y = 2$.)

3.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$. (*Ответ:* $y = \operatorname{arctg}(2 - 2x)$, $y = \pi/2$.)

3.6. $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. $\Big($*Ответ:* $y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$, $y = 1$.$\Big)$

3.7. $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. $\Big($*Ответ:* $x = \pm\ln(1 + \sqrt{2}) \pm \ln\frac{y}{1 + \sqrt{y^2 + 1}}$.$\Big)$

3.8. $y'' = -1/(2y^3)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = \sqrt{2}$. (*Ответ:* $y = \sqrt{x\sqrt{2} + 1/4}$.)

3.9. $y'' = 1 - y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $x = \pm\ln|e^y + \sqrt{e^y - 1}|$.)

3.10. $y''^2 = y'$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = (x + 2)^3/12$, $y = 2/3$.)

3.11. $2yy'' - y'^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = \left(\frac{x + 2}{2}\right)^2 + 1$.)

3.12. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 2\sin x + 2$.)

3.13. $y'' = 1/y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $x = \sqrt{y^2 + 1}$.)

3.14. $yy'' - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = \frac{1}{1 - 2x}$, $y = 1$.)

3.15. $y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\Big($*Ответ:* $x = \ln\frac{2e^y - 1}{e^y}$, $y = 0$.$\Big)$

3.16. $y'' + \frac{2}{1 - y}y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\Big($*Ответ:* $y = 1 - \frac{1}{x + 1}$, $y = 0$.$\Big)$

3.17. $y''(1 + y) = 5y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\Big($*Ответ:* $\frac{1}{4} - \frac{1}{4(1 + y)^4}$, $y = 0$.$\Big)$

3.18. $y''(2y+3)-2y'^2=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=3.$ (*Ответ:* $y=\frac{3}{2}(e^x-1),\ y=0.$)

3.19. $4y''^2=1+y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$ (*Ответ:* $x=2\ln\frac{1}{2}|y+1+\sqrt{(y+1)^2-4}|.$)

3.20. $2y'^2=(y-1)y'',\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=1+\frac{1}{1-2x},\ y=2.$)

3.21. $1+y'^2=yy',\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$ (*Ответ:* $x=\ln|y+\sqrt{y^2-1}|.$)

3.22. $y''+yy'^3=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=\sqrt[3]{6x+1},\ y=1.$)

3.23. $yy''-y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=e^{2x},\ y=1.$)

3.24. $yy''-y'^2=y^2\ln y,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ (*Ответ:* $x=\ln|\ln y+\sqrt{\ln^2 y+1}|.$)

3.25. $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ (*Ответ:* $x=\frac{1}{1-\ln y}-1,\ y=1.$)

3.26. $y''(1+y)=y'^2+y',\ y(0)=2,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=2e^x,\ y=2.$)

3.27. $y''=y'/\sqrt{y},\ y(0)=1,\ y'(0)=2.$ (*Ответ:* $y=(x+1)^2,\ y=1.$)

3.28. $y''=1(1+y'^2),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$ (*Ответ:* $x=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^y-1}.$)

3.29. $yy''-2yy'\ln y=y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ (*Ответ:* $y=e^{\operatorname{tg}x},\ y=1.$)

3.30. $y''=1/\sqrt{y},\ y(0)=y'(0)=0.$ (*Ответ:* $x=\frac{2}{3}y^{3/4}.$)

4. Проинтегрировать следующие уравнения.

4.1. $\frac{1}{x}dy-\frac{y}{x^2}dx=0.$ (*Ответ:* $y/x=C.$)

4.2. $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$ (*Ответ:* $\operatorname{arctg}(x/y)=C.$)

4.3. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy.$ (*Ответ:* $x^2+y^2-xy+x-y=C.$)

4.4. $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0.$ (*Ответ:* $\frac{x^2+y^2}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C.$)

4.5. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$ (*Ответ:* $\sqrt{x^2-y^2}-x=C.$)

4.6. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy=0.$ (*Ответ:* $\frac{e^y-1}{1+x^2}=C.$)

4.7. $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$ (*Ответ:* $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$)

4.8. $(1-e^{x/y})dx+e^{x/y}(1-x/y)dy=0.$ (*Ответ:* $x+ye^{x/y}=C.$)

4.9. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0.$ (*Ответ:* $x^4+x^2y^2+y^4=C.$)

4.10. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$ (*Ответ:* $x^3+3x^2y^2+y^4=C.$)

4.11. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$ (*Ответ:* $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\frac{x}{y}=C.$)

4.12. $\left(3x^2\operatorname{tg}y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0.$ (*Ответ:* $x^3\operatorname{tg}y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C.$)

4.13. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2+y}\right)dx=\frac{x^2+y^2}{xy^2}dy.$ (*Ответ:* $x^2+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=C.$)

4.14. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$ (*Ответ:* $\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}=C.$)

4.15. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0.$ (*Ответ:* $x^3+y^3-x^2-xy+y^2=C.$)

4.16. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0.$ (*Ответ:* $\frac{y}{x}+\sqrt{x^2+y^2}=C.$)

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2v}{x}=0,\ \frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=2\ln|x|,\ v=x^2.$$

Подставим найденное выражение для $v=x^2$ в уравнение (1): $u'x^2=-6/x^2$. Отсюда находим u:

$$u'=-\frac{6}{x^4},\ u=-6\int\frac{dx}{x^4}=\frac{2}{x^3}+C.$$

Тогда

$$y=uv=\left(\frac{2}{x^3}+C\right)x^2=\frac{2}{x}+Cx^2.$$

Так как кривая проходит через точку $A(2, 2)$, то $2=2/2+4C$, $C=1/4$. Искомая кривая имеет уравнение $y=\frac{2}{x}+\frac{x^2}{4}$, $0<x\leqslant x_0=\sqrt[3]{16}$. Она изображена на рис. 11.3. При $x_1=\sqrt[3]{4}$ имеем точку минимума. ◀

ИДЗ-11.3

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1

1.1. а) $y''+4y=0$; б) $y''-10y'+25y=0$; в) $y''+3y'+2y=0$.

1.2. а) $y''-y'-2y=0$; б) $y''+9y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$.

1.3. а) $y''-4y'=0$; б) $y''-4y'+13y=0$; в) $y''-3y'+2y=0$.

1.4. а) $y''-5y'+6y=0$; б) $y''+3y'=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

1.5. а) $y''-2y'+10y=0$; б) $y''+y'-2y=0$; в) $y''-2y'=0$.

1.6. а) $y''-4y=0$; б) $y''+2y'+17y=0$; в) $y''-y'-12y=0$.

1.7. а) $y''+y'-6y=0$; б) $y''+9y'=0$; в) $y''-4y'+20y=0$.

1.8. а) $y''-49y=0$; б) $y''-4y'+5y=0$; в) $y''+2y'-3y=0$.

1.9. а) $y''+7y'=0$; б) $y''-5y'+4y=0$; в) $y''+16y=0$.

1.10. а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+4y'+5y=0$; в) $y''+5y'=0$.

1.11. а) $4y''-8y'+3y=0$; б) $y''-3y'=0$; в) $y''-2y'+10y=0$.

1.12. а) $y''+4y'+20y=0$; б) $y''-3y'-10y=0$; в) $y''-16y=0$.

1.13. а) $9y''+6y'+y=0$; б) $y''-4y'-21y=0$; в) $y''+y=0$;

1.14. а) $2y''+3y'+y=0$; б) $y''+4y'+8y=0$; в) $y''-6y'+9y=0$.

1.15. а) $y''-10y'+21y=0$; б) $y''-2y'+2y=0$; в) $y''+4y'=0$.

1.16. а) $y''+6y'=0$; б) $y''+10y'+29y=0$; в) $y''-8y'+7y=0$.

1.17. а) $y''+25y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$; в) $y''+2y'+2y=0$.

1.18. а) $y''-3y'=0$; б) $y''-7y'-8y=0$; в) $y''+4y'+13y=0$.

1.19. а) $y''-3y'-4y=0$; б) $y''+6y'+13y=0$; в) $y''+2y'=0$.

1.20. а) $y''+25y'=0$; б) $y''-10y'+16y=0$; в) $y''-8y'+16y=0$.

1.21. а) $y''-3y'-18y=0$; б) $y''-6y'=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

1.22. а) $y''-6y'+13y=0$; б) $y''-2y'-15y=0$; в) $y''-8y'=0$.

1.23. а) $y''+2y'+y=0$; б) $y''+6y'+25y=0$; в) $y''-4y'=0$.

1.24. а) $y''+10y'=0$; б) $y''-6y'+8y=0$; в) $4y''+4y'+y=0$.

1.25. а) $y''+5y=0$; б) $9y''-6y'+y=0$; в) $y''+6y'+8y=0$.

1.26. а) $y''+6y'+10y=0$; б) $y''-4y'+4y=0$; в) $y''-5y'+4y=0$.

1.27. а) $y''-y=0$; б) $4y''+8y'-5y=0$; в) $y''-6y'+10y=0$.

1.28. а) $y''+8y'+25y=0$; б) $y''+9y'=0$; в) $9y''+3y'-2y=0$.

1.29. а) $6y''+7y'-3y=0$; б) $y''+16y=0$; в) $4y''-4y'+y=0$.

1.30. а) $9y''-6y'+y=0$; б) $y''+12y'+37y=0$; в) $y''-2y'=0$.

2

2.1. $y''+y'=2x-1.$ (*Ответ:* $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x.$)

2.2. $y''-2y'+5y=10e^{-x}\cos 2x.$ (*Ответ:* $y=$

3.16. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$. (*Ответ:* $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 3\cos 4x - \sin 4x$.)

3.17. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$. (*Ответ:* $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2 - 8x + 7$.)

3.18. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + (2x^3 - 5x^2)e^{-x}$.)

3.19. $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - (3x^2 + x)e^{2x}$.)

3.20. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + 2e^{3x}$.)

3.21. $y'' + 16y = 80e^{2x}$. (*Ответ:* $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + 4e^{2x}$.)

3.22. $y'' + 4y' = 15e^{x}$. (*Ответ:* $y = C_1 + C_2e^{-4x} + 3e^{x}$.)

3.23. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} + 3\sin x - 2\cos x$.)

3.24. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + (3x^3 + 4x^2)e^{-x}$.)

3.25. $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{7x} + C_2xe^{7x} + 2\cos 7x$.)

3.26. $y'' + 9y = 10e^{3x}$. (*Ответ:* $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + e^{3x}$.)

3.27. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + 3\cos x + 4\sin x$.)

3.28. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{-x/3} + C_2e^{2x} + \cos 2x - 2\sin 2x$.)

3.29. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$. (*Ответ:* $y = e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) + e^{-x}$.)

3.30. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$. (*Ответ:* $y = C_1e^{x/4} + C_2e^{-x} + 2\sin x - \cos x$.)

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

4.1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = -2e^{x} - 4xe^{x} + 3\sin 2x$.)

4.2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (*Ответ:* $y = -6e^{3x} + 22xe^{3x} + x^2 - 3x + 5$.)

4.3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. (*Ответ:* $y = e^{-x}(\cos x + 3\sin x) + x^2 + 2x$.)

4.4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(2\cos 4x - 3\sin 4x) + \sin 4x$.)

4.5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$. (*Ответ:* $y = 3e^{7x}\sin 2x + x^3 + x$.)

4.6. $y'' + 6y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$. (*Ответ:* $y = \sin 4x - \cos 4x + e^{x}\cos 4x$.)

4.7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = e^{2x}(\cos 4x - 1/4\sin 4x) + xe^{2x}$.)

4.8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. (*Ответ:* $y = e^{6x} - 2xe^{6x} + \cos 2x$.)

4.9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (*Ответ:* $y = 4\cos x + 2\sin x + x^3 - 4x^2 + x - 2$.)

4.10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. (*Ответ:* $y = e^{x} - e^{-x} + (4x^2 - 3x)e^{-x}$.)

4.11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = -2e^{-4x} - 6xe^{-4x} + x^2 - 2x + 5$.)

4.12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$. $y'(0) = 6$. (*Ответ:* $y = e^{-5x}(\cos 3x + 2\sin 3x) - e^{-5x}$.)

4.13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x - 36x\cos 3x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = e^{3x}(4\cos 4x - 3\sin 4x) + 2x\sin 3x$.)

4.14. $y'' + 25y = e^{x}(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$. (*Ответ:* $y = 2\cos 5x - \sin 5x + e^{x}\cos 5x$.)

4.15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$. (*Ответ:* $y = e^{-x}(2\cos 2x + 3\sin 2x) + 2xe^{-x}\cos 2x$.)

4.16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = 3e^{5x} - 2xe^{5x} + x^2e^{5x}$.)

4.17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$. (*Ответ:* $y = e^{3x} + e^{-4x} + (2x + 1)e^{4x}$.)

4.18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = e^{x}(2\cos 2x - \sin 2x) + x^2 + 2x - 2$.)

4.19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (*Ответ:* $y = 4xe^{-4x} + x^3 - x + 1$.)

4.20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. (*Ответ:* $y = e^{x}\sin 6x + 3xe^{x}\sin 6x$.)

4.21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 14$. (*Ответ:* $y = 2e^{8x} - 3 + 4x^4 - 2x$.)

4.22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = \cos 6x + 8\sin 6x + 2x^3 - 2x$.)

4.23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 4e^{-3x} - 7 + (4x + 3)e^{2x}$.)

4.24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 2e^{6x} - 3e^{3x} - \sin x + \cos x$.)

4.25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 3 + 2e^{-8x} - x^4 + 3x^3$.)

4.26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. (*Ответ:* $y = e^{x} + 2e^{2x} - \cos x + 2\sin x$.)

4.27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (*Ответ:* $y = 3 - e^{-2x} + x^3 - x^2$.)

4.28. $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}$.)

4.29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.

(*Ответ:* $y = 2e^{-2x} + e^{-3x} - 5\cos 2x + \sin 2x$.)

4.30. $y'' - 4y = 8e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$. (*Ответ:* $y = 3e^{-2x} - 2e^{2x} + 2xe^{2x}$.)

5. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции $f(x)$.

5.1. $2y'' - 7y' + 3y = f(x)$; *а*) $f(x) = (2x + 1)e^{3x}$; б) $f(x) = \cos 3x$.

5.2. $3y'' - 7y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = 3xe^{2x}$; б) $f(x) = \sin 2x - 3\cos 2x$.

5.3. $2y'' + y' - y = f(x)$; а) $f(x) = (x^2 - 5)e^{-x}$; б) $f(x) = x\sin x$.

5.4. $2y'' - 9y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = -2e^{4x}$; б) $f(x) = e^{x}\cos 4x$.

5.5. $y'' + 49y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 + 4x$; б) $f(x) = 3\sin 7x$.

5.6. $3y'' + 10y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x$.

5.7. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = x + 2e^{x}$; б) $f(x) = 3\cos 4x$.

5.8. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = \sin 2x + 2e^{x}$; б) $f(x) = x^2 - 4$.

5.9. $y'' - y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{x}\cos x$; б) $f(x) = 7x + 2$.

5.10. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^2 - 5x$; б) $f(x) = e^{-x}\sin 2x$.

5.11. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 3xe^{-4x}$; б) $f(x) = x\sin x$.

5.12. $y'' + 36y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = 2\sin 6x$.

5.13. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = (x - 2)e^{3x}$; б) $f(x) = 4\cos x$.

5.14. $4y'' - 5y' + y = f(x)$; а) $f(x) = (4x + 2)e^{x}$; б) $f(x) = e^{x}\sin 3x$.

5.15. $4y'' + 7y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = 3e^{-2x}$; б) $f(x) = (x - 1)\cos 2x$.

5.16. $y'' - y' - 6y = f(x)$; а) $f(x) = 2xe^{3x}$; б) $f(x) = 9\cos x - \sin x$.

5.17. $y'' - 16y = f(x)$; а) $f(x) = -3e^{4x}$; б) $f(x) = \cos x - 4\sin x$.

5.18. $y'' - 4y' = f(x)$; а) $f(x) = (x - 2)e^{4x}$; б) $f(x) = 3\cos 4x$.

5.19. $y'' - 2y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 3)e^{4x}$; б) $f(x) = e^{x}\sin x$.

5.20. $5y'' - 6y' + y = f(x)$; а) $f(x) = x^2e^{x}$; б) $f(x) = \cos x - \sin x$.

5.21. $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 - 2x$; б) $f(x) = 2\sin 2x - 3\cos 2x$.

5.22. $y'' - 2y' - 15y = f(x)$; а) $f(x) = 4xe^{3x}$; б) $f(x) = x\sin 5x$.

5.23. $y'' - 3y' = f(x)$; а) $f(x) = 2x^3 - 4x$; б) $f(x) = 2e^{3x}\cos x$.

5.24. $y'' - 7y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{3x} + 2e^{x}$; б) $f(x) = 3x\sin 2x$.

5.25. $y'' + 9y' = f(x)$; а) $f(x) = x^2 + 4x - 3$; б) $f(x) = xe^{2x}\sin x$.

5.26. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = -2xe^{x}$; б) $f(x) = x\cos 2x - \sin 2x$.

5.27. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (3x - 7)e^{-x}$; б) $f(x) = \cos x - 3\sin x$.

5.28. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 2xe^{4x}$; б) $f(x) = \cos 4x + 2\sin 4x$.

5.29. $y'' + y' - 2y = f(x)$; а) $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$. б) $f(x) = 3x\cos 2x$.

5.30. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$; а) $f(x) = 6xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2\sin 2x$.

Решение типового варианта

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. а) $4y'' - 11y' + 6y = 0$; б) $4y'' - 4y' + y = 0$; в) $y'' - 2y' + 37y = 0$.

▶ Для каждого из данных уравнений составляем характеристическое уравнение и решаем его. По виду полученных корней характеристического уравнения (см. формулу (11.48) и пример 5 из § 11.6) записываем общее решение дифференциального уравнения:

а) $4\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, корни $\lambda_1 = 3/4$, $\lambda_2 = 2$ — действительные различные, поэтому общее решение уравнения

$$y = C_1e^{3x/4} + C_2e^{2x};$$

б) $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ — действительные равные, следовательно, общее решение уравнения

$$y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2};$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0$, корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 6i$ — комплексно-сопряженные, поэтому общее решение уравнения

$$y = e^{x}(C_1\cos 6x + C_2\sin 6x). ◀$$

2. $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.