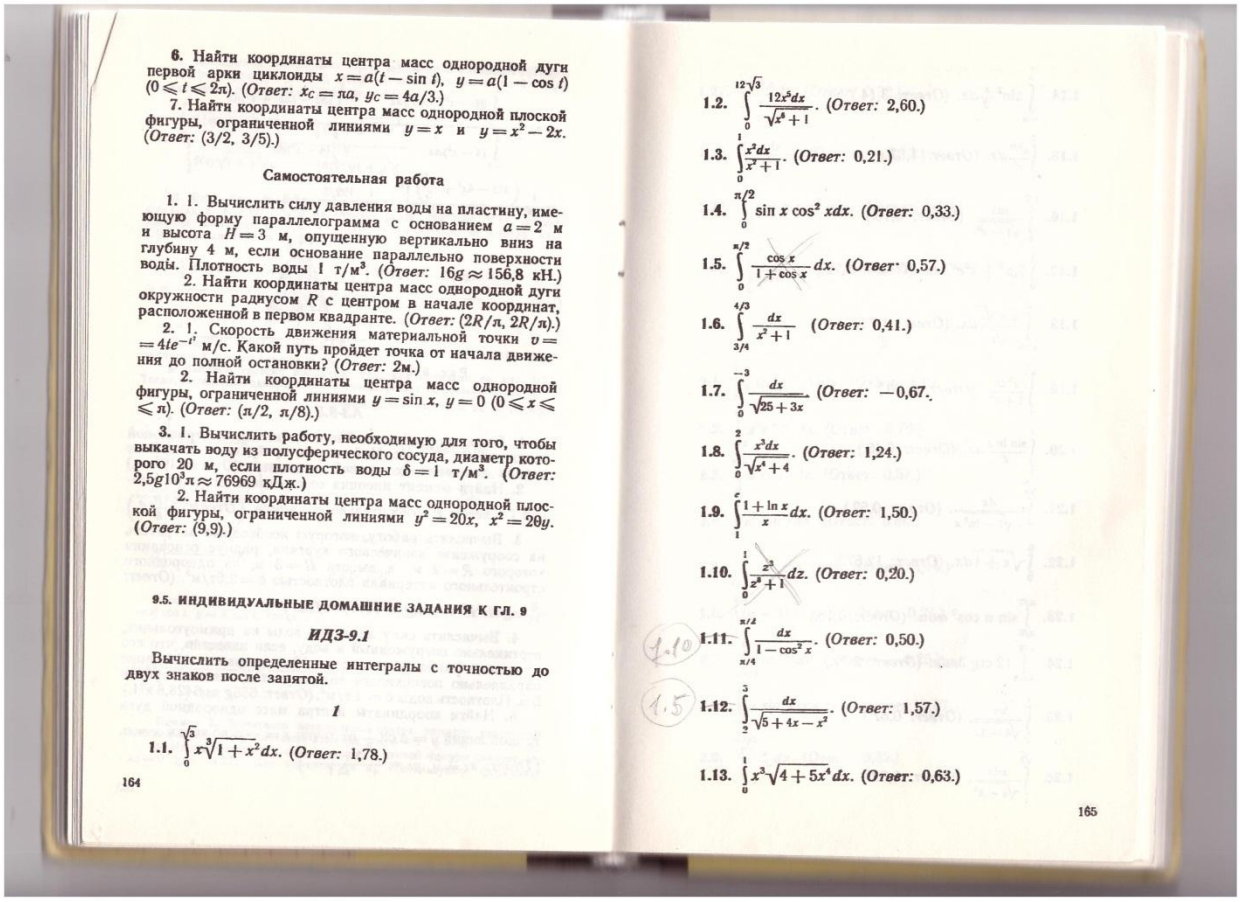
Тема РГЗ: «Определенный интеграл»

Источник: Сборник индивидуальных заданий по высшей математики ч.2 /под ред. А.П. Рябушко. Стр.164-179 (№1-6), стр. 188-192 (№1-4)



6. Найти координаты центра масс однородной дуги первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. (*Ответ:* $x_C=\pi a$, $y_C=4a/3$.)

7. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2-2x$. (*Ответ:* (3/2, 3/5).)

Самостоятельная работа

1. 1. Вычислить силу давления воды на пластину, имеющую форму параллелограмма с основанием $a=2$ м и высота $H=3$ м, опущенную вертикально вниз на глубину 4 м, если основание параллельно поверхности воды. Плотность воды 1 т/м³. (*Ответ:* $16g\approx 156{,}8$ кН.)

2. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиусом R с центром в начале координат, расположенной в первом квадранте. (*Ответ:* $(2R/\pi, 2R/\pi)$.)

2. 1. Скорость движения материальной точки $v=4te^{-t}$ м/с. Какой путь пройдет точка от начала движения до полной остановки? (*Ответ:* 2м.)

2. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$. (*Ответ:* $(\pi/2, \pi/8)$.)

3. 1. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м, если плотность воды $\delta=1$ т/м³. (*Ответ:* $2{,}5g10^3\pi\approx 76969$ кДж.)

2. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=20x$, $x^2=20y$. (*Ответ:* (9,9).)

9.5. Индивидуальные домашние задания к гл. 9

ИДЗ-9.1

Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

1

1.1. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$. (*Ответ:* 1,78.)

1.2. $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$. (*Ответ:* 2,60.)

1.3. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^2+1}$. (*Ответ:* 0,21.)

1.4. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$. (*Ответ:* 0,33.)

1.5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$. (*Ответ:* 0,57.)

1.6. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}$ (*Ответ:* 0,41.)

1.7. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. (*Ответ:* −0,67.

1.8. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+4}}$. (*Ответ:* 1,24.)

1.9. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$. (*Ответ:* 1,50.)

1.10. $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz$. (*Ответ:* 0,20.)

1.11. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$. (*Ответ:* 0,50.)

1.12. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. (*Ответ:* 1,57.)

1.13. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$. (*Ответ:* 0,63.)

1.14. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$. (Ответ: 3,14.)

1.15. $\int_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$. (Ответ: 1,07.)

1.16. $\int_{0}^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Ответ: 0,13.)

1.17. $\int_{0}^{1} 3(x^2 + x^2 e^{x^3})\,dx$. (Ответ: 2,72.)

1.18. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. (Ответ: 1,73.)

1.19. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. (Ответ: 0,20.)

1.20. $\int_{1}^{e} \frac{\sin \ln x}{x}\,dx$. (Ответ: 0,46.)

1.21. $\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. (Ответ: 0,52.)

1.22. $\int_{3}^{8} \sqrt{x+1}\,dx$. (Ответ: 12,67.)

1.23. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha \cos^3\alpha\,d\alpha$. (Ответ: 0,14.)

1.24. $\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12 \operatorname{ctg} 3x\,dx$. (Ответ: 2,77.)

1.25. $\int_{-3}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$. (Ответ: 0,67.)

1.26. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. (Ответ: 0,32.)

1.27. $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. (Ответ: 0,33.)

1.28. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$. (Ответ: −0,13.)

1.29. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\alpha \sin^3\alpha\,d\alpha$. (Ответ: 0,23.)

1.30. $\int_{0}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2)}$. (Ответ: 0,50.)

2

2.1. $\int_{2}^{3} y \ln(y-1)\,dy$. (Ответ: 1,02.)

2.2. $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-x/2}\,dx$. (Ответ: 5,76.)

2.3. $\int_{0}^{\pi/2} x \cos x\,dx$. (Ответ: 0,57.)

2.4. $\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$. (Ответ: 5,86.)

2.5. $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx$. (Ответ: 3,14.)

2.6. $\int_{1}^{2} (y-1)\ln y\,dy$. (Ответ: 0,25.)

2.7. $\int_{-1/2}^{0} xe^{-2x}\,dx$. (Ответ: −0,25.)

2.8. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x\,dx$. (Ответ: 1,57.)

2.9. $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}\,dx$. (Ответ: 0,82.)

2.10. $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$. (Ответ: 0,16.)

2.11. $\int_{1}^{e^2} \sqrt{x} \ln x\,dx$. (Ответ: 18,33.)

2.12. $\int_{0}^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. (Ответ: 0,57.)

2.13. $\int_{0}^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}\,dx$. (Ответ: 6,28.)

2.14. $\int_{0}^{\pi/8} x^2 \sin 4x\,dx$. (Ответ: 0,17.)

2.15. $\int_{1}^{2} y^2 \ln y\,dy$. (Ответ: 1,07.)

2.16. $\int_{1}^{2} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$. (Ответ: 0,15.)

2.17. $\int_{3/2}^{2} \operatorname{arctg}(2x-3)\,dx$. (Ответ: 0,21.)

2.18. $\int_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx$. (Ответ: 4,00.)

2.19. $\int_{1}^{e} x \ln^2 x\,dx$. (Ответ: 1,60.)

2.20. $\int_{-3}^{0} (x-2)e^{-x/3}\,dx$. (Ответ: −19,32.)

2.21. $\int_{0}^{\pi/9} \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$. (Ответ: 0,12.)

2.22. $\int_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)\,dx$. (Ответ: 0,13.)

2.23. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$. (Ответ: 1,37.)

2.24. $\int_{-1}^{0} x \ln(1-x)\,dx$. (Ответ: −0,25.)

2.25. $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}\,dx$. (Ответ: 2,32.)

2.26. $\int_{1}^{2} \ln(3x+2)\,dx$. (Ответ: 1,87.)

2.27. $\int_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$. (Ответ: 282,40.)

2.28. $\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}\,dx$. (Ответ: 1,10.)

2.29. $\int_{0}^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x\,dx$. (Ответ: 0,13.)

2.30. $\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x\,dx$. (Ответ: 0,29.)

3

3.1. $\int_{0}^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$. (Ответ: 1,79.)

3.2. $\int_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}\,dx$. (Ответ: 9,67.)

3.3. $\int_{2}^{3} \frac{x+2}{x^2(x-1)}\,dx$. (Ответ: 0,53.)

3.4. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x-1)}$. (Ответ: 0,12.)

3.5 $\int_{-1}^{1} \frac{y^2\,dy}{y+2}$ (Ответ: −0,09.)

3.6. $\int_2^3 \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$. (*Ответ:* 1,62.)

3.7. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)^3}$. (*Ответ:* −1,25.)

3.8. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$. (*Ответ:* 0,04.)

3.9. $\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. (*Ответ:* 0,16.)

3.10. $\int_0^1 \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^2}$. (*Ответ:* −1,63.)

3.11. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$. (*Ответ:* 0,15.)

3.12. $\int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$. (*Ответ:* 0,50.)

3.13. $\int_0^1 \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx$. (*Ответ:* −0,20.)

3.14. $\int_{-1}^0 \frac{x^3-2x^2+3}{(x-2)^2}dx$. (*Ответ:* 9,38.)

3.15. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$. (*Ответ:* 0,12.)

3.16. $\int_6^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$. (*Ответ:* 0,29.)

3.17. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}$. (*Ответ:* 0,16.)

3.18. $\int_2^3 \frac{x^7dx}{1-x^4}$. (*Ответ:* −15,34.)

3.19. $\int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}$. (*Ответ:* 0,02.)

3.20. $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^3-1}$. (*Ответ:* 0,37.)

3.21. $\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x+1}$. (*Ответ:* 0,88.)

3.22. $\int_4^5 \frac{dx}{x^2(x-1)}$. (*Ответ:* 0,02.)

3.23. $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$. (*Ответ:* 0,23.)

3.24. $\int_7^9 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$. (*Ответ:* 0,04.)

3.25. $\int_4^6 \frac{xdx}{x^3-6x^2+16-6}$. (*Ответ:* 0,51.)

3.26. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$. (*Ответ:* 0,25.)

3.27. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^5+x^4}dx$. (*Ответ:* 1,44.)

3.28. $\int_2^3 \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$. (*Ответ:* −0,12.)

3.29. $\int_3^5 \frac{x^3-2x^2+4}{x^2(x-2)^2}dx$. (*Ответ:* 0,35.)

3.30. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$. (*Ответ:* −0,08.)

4

4.1. $\int_0^5 x^2\sqrt{x-x^2}dx$. (*Ответ:* 3,14.)

4.2. $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$. (*Ответ:* −0,47.)

4.3. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$. (*Ответ:* 0,02.)

4.4. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$. (*Ответ:* 1,91.)

4.5. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$. (*Ответ:* 1,02.)

4.6. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$. (*Ответ:* 2,36.)

4.7. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$. (*Ответ:*31,79.)

4.8. $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^5}dx$. (*Ответ:* 0,53.)

4.9. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$. (*Ответ:* 0,59.)

4.10. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. (*Ответ:* −0,62.)

4.11. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. (*Ответ:* 0,68.)

4.12. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{3/2}}$ (*Ответ:* 0,27.)

4.13. $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx$. (*Ответ:* 1,29.)

4.14. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$. (*Ответ:* 0,14.)

4.15. $\int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. (*Ответ:* 0,04.)

4.16. $\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. (*Ответ:* 0,59.)

4.17. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}dx$. (*Ответ:* 0,26.)

4.18. $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$. (*Ответ:* 0,08.)

4.19. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$. (*Ответ:* 0,68.)

4.20. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. (*Ответ:* 1,16.)

4.21. $\int_0^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{(5-x^2)^3}$. (*Ответ:* 0,20.)

4.22. $\int_0^{1/2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. (*Ответ:* −0,20.)

4.23. $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$. (*Ответ:* 0,05.)

4.24. $\int_2^4 \frac{\sqrt{6-x^2}}{x^4}dx$. (*Ответ:* 0,11.)

4.25. $\int_0^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}dx$. (*Ответ:* −502,09.)

4.26. $\int_{\sqrt[4]{2/3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$. (*Ответ:* 0,01.)

4.27. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. (*Ответ:* 0,29.)

4.28. $\int_0^3 x^4\sqrt{9-x^2}dx$. (*Ответ:* 71,53.)

4.29. $\int_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$. (*Ответ:* 5,31.)

4.30. $\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}dx$. (*Ответ:* 4,71.)

5

5.1. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$. (*Ответ:* 0,26.)

5.2. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. (*Ответ:* 0,60.)

5.3. $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2xdx$. (*Ответ:* 0,33.)

5.4. $\int_0^{\pi} \sin^4\frac{x}{2}dx$. (*Ответ:* 1,18.)

5.5. $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2xdx$. (*Ответ:* 0,39.)

5.6. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 xdx$. (*Ответ:* 0,68.)

5.7. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$. (*Ответ:* 0,38.)

5.8. $\int_0^{\pi/4} 2\cos x \sin 3xdx$. (*Ответ:* 1,00.)

5.9. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$. (*Ответ:* 1,80.)

5.10. $\int_0^{\pi/32} (32\cos^2 4x - 16)dx$. (*Ответ:* 1,41.)

5.11. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x+1}$. (*Ответ:* 3,14.)

5.12. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4\varphi d\varphi$. (*Ответ:* 0,93.)

5.13. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$. (*Ответ:* 0.)

5.14. $\int_0^{\pi/4} \sin 3x\cos 5xdx$. (*Ответ:* −0,25.)

5.15. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. (*Ответ:* 1,33.)

5.16. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$. (*Ответ:* 0,55.)

5.17. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 xdx$. (*Ответ:* 0,81.)

5.18. $\int_0^{\pi/2} \cos x\cos 3x\cos 5xdx$. (*Ответ:* 0,16.)

5.19. $\int_0^{\pi} \cos^4 x\sin^2 xdx$. (*Ответ:* 0,20.

5.20. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 xdx$. (*Ответ:* 0,49.)

5.21. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$. (*Ответ:* 2.)

5.22. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$ (*Ответ:* 0,38.)

5.23. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$. (*Ответ:* 1,69.)

5.24. $\int_0^{\pi/8} \sin x\sin 3xdx$. (*Ответ:* 0,05.)

5.25. $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin x\sin 2x\sin 3xdx$. (*Ответ:* −0,21.)

5.26. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$. (*Ответ:* 0,55.)

5.27. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 xdx$. (*Ответ:* 0,53.)

5.28. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x\sin^4 xdx$. (*Ответ:* 0,10)

5.29. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$. (*Ответ:* 0,60.)

5.30. $\int_0^{\pi} \sin^4\frac{x}{2}dx$. (*Ответ:* 1,18.)

6

6.1. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$. (*Ответ:* 0,06.)

6.2. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. (*Ответ:* 1,10.)

6.3. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$. (*Ответ:* −0,14.)

6.4. $\int_1^{\sqrt{5}} \frac{x^3dx}{13-6x^2+x^4}$. (*Ответ:* 0,26.)

6.5. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$. (*Ответ:* 0,29.)

6.6. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. (*Ответ:* 0,20.)

6.7. $\int_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. (*Ответ:* 0,52.)

6.8. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$. (*Ответ:* 0,07.)

6.9. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$. (*Ответ:* 0,28.)

6.10. $\int_1^2 \frac{x-5}{x^2-2x+2}$. (*Ответ:* −2,79.)

6.11. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$. (*Ответ:* 0,39.)

6.12. $\int_6^8 \frac{dx}{x^2+2x}$. (*Ответ:* 0,03.)

6.13. $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. (*Ответ:* 1,57.)

6.14. $\int_{-1/2}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}$. (*Ответ:* 3,99.)

6.15. $\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. (*Ответ:* 1,11.)

6.16. $\int_{1/6}^{2} \frac{dx}{3x^2-x+1}$. (*Ответ:* 0,77.)

6.17. $\int_{3}^{4} \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$. (*Ответ:* 9,35.)

6.18. $\int_{3,5}^{5} \frac{xdx}{x^2-7x+13}$. (*Ответ:* 4,94.)

6.19 $\int_{2}^{3} \frac{3x-2}{x^2-4x+5}$. (*Ответ:* 3,19.)

6.20. $\int_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}$. (*Ответ:* 2,41.)

6.21. $\int_{4}^{5} \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}$. (*Ответ:* 0,02.)

6.22. $\int_{-1/2}^{1} \frac{x^3}{x^2+x+1}dx$. (*Ответ:* 0,08.)

6.23. $\int_{7}^{10} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$. (*Ответ:* 38,67.)

6.24. $\int_{3}^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$. (*Ответ:* 51,81.)

6.25. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$. (*Ответ:* 0,14.)

6.26. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$. (*Ответ:* 0,21.)

6.27. $\int_{4}^{7} \frac{dx}{x^2+3x-10}$. (*Ответ:* 0,09.)

6.28. $\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$. (*Ответ:* 0,52.)

6.29. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. (*Ответ:* 1,57.)

6.30. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+3}$. (*Ответ:* 0,61.)

7

7.1. $\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. (*Ответ:* 16,16.)

7.2. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$. (*Ответ:* 0,13.)

7.3. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. (*Ответ:* 0,94.)

7.4. $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$. (*Ответ:* 11,77.)

7.5. $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$. (*Ответ:* 10,67.)

7.6. $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. (*Ответ:* 0,86.)

7.7. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$. (*Ответ:* 0,41.)

7.8. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$. (*Ответ:* 0,43.)

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta}\frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{0}^{\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+2}{\sqrt{5}}\right) +$$

$$+ \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\beta+2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{2} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

б) $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx =$

$$= \lim_{\beta\to0-}\int_{-1}^{\beta}(3x^{4/3}+2x^{-2/3})dx + \lim_{\alpha\to0+}\int_{\alpha}^{1}(3x^{4/3}+2x^{-2/3})dx =$$

$$= \lim_{\beta\to0-}\left(\frac{9}{7}x^{7/3}+6x^{1/3}\right)\Big|_{-1}^{\beta} + \lim_{\alpha\to0+}\left(\frac{9}{7}x^{7/3}+6x^{1/3}\right)\Big|_{\alpha}^{1} =$$

$$\lim_{\beta\to0-}\left(\frac{9}{7}\beta^{7/3}+6\beta^{1/3}+\frac{9}{7}+6\right) +$$

$$+ \lim_{\alpha\to0+}\left(\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}\alpha^{7/3}-6\alpha^{1/3}\right) = 14\frac{4}{7}. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-9.2

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1.1. $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$. (*Ответ:* 9,00.)
1.2. $y = x^2$, $y = 3 - x$. (*Ответ:* 10,67.)
1.3. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$. (*Ответ:* 0,42.)
1.4. $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$. (*Ответ:* 57,70.)
1.5. $\rho = 4\cos 3\varphi$. (*Ответ:* 12,56.)
1.6. $\rho = 3\cos 2\varphi$. (*Ответ:* 14,13.)
1.7. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* 18,84.)

1.8. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$. (*Ответ:* 1,00.)
1.9. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$. (*Ответ:* 150,72.)
1.10. $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$. (*Ответ:* 18,84.)
1.11. $\rho = 2\sin 3\varphi$. (*Ответ:* 3,14.)
1.12. $\rho = 2 + \cos\varphi$. (*Ответ:* 14,13.)
1.13. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = x^2/2$. (*Ответ:* 1,23.)
1.14. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$. (*Ответ:* 29,87.)
1.15. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$. (*Ответ:* 6,05.)
1.16. $\rho = 4\sin^2\varphi$. (*Ответ:* 18,84.)
1.17. $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$. (*Ответ:* 18,84.)
1.18. $y^2 = 9x$. $y = 3x$. (*Ответ:* 0,50.)
1.19. $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. (*Ответ:* 29,25.)
1.20. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$. (*Ответ:* 5,33.)
1.21. $y^2 = x^3$, $x = 2$. (*Ответ:* 4,51.)
1.22. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. (*Ответ:* 2,67.)
1.23. $y^2 = (4 - x^3)$, $x = 0$. (*Ответ:* 25,60.)
1.24. $\rho = 3\sin 4\varphi$. (*Ответ:* 14,13.)
1.25. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$. (*Ответ:* 0,75.)
1.26. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$. (*Ответ:* 6,76.)
1.27. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$. (*Ответ:* 3,02.)
1.28. $x^2 = 4y$, $y = 8/(x^2 + 4)$. (*Ответ:* 4,95.)
1.29. $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$. (*Ответ:* 1,50.)
1.30. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$. (*Ответ:* 4,71.)

2. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии.

2.1. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$. (*Ответ:* 12,00.)
2.2. $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$. (*Ответ:* 9,86.)
2.3. $\rho = \sin^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 0,14.)
2.4. $\rho = 2\sin^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 0,27.)
2.5. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$. (*Ответ:* 18,00.)
2.6. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$. (*Ответ:* 24,00.)
2.7. $y^2 = (x + 1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$. (*Ответ:* 24,81.)
2.8. $y = 1 - \ln\cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/6)$. (*Ответ:* 0,55.)
2.9. $\rho = 6\cos^3(\varphi/3)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 8,60.)
2.10. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^4 t$. (*Ответ:* 24,00.)
2.11. $y^2 = (x - 1)^3$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(6, \sqrt{125})$ (*Ответ:* 8,27.)
2.12. $y^2 = x^5$, отсеченной прямой $x = 5$. (*Ответ:* 24,81.)
2.13. $\rho = 3\cos\varphi$. (*Ответ:* 9,42.)
2.14. $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$. (*Ответ:* 24,00.)
2.15. $\rho = 2\cos^3(\varphi/3)$. (*Ответ:* 9,42.)

2.16. $x = 5\cos^2 t$, $y = 5\sin^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 7,05.)

2.17. $9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy. (*Ответ:* 9,33.)

2.18. $\rho = 3\sin\varphi$. (*Ответ:* 9,42.)

2.19. $y = \ln\sin x$ $(\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/2)$. (*Ответ:* 0,55.)

2.20. $x = 9(t-\sin t)$, $y = 9(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. (*Ответ:* 72,00.)

2.21. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$. (*Ответ:* 16,00.)

2.22. $y^2 = (x-1)^3$ от точки $A(2,-1)$ до точки $B(5,-8)$. (*Ответ:* 7,63.)

2.23. $x = 7(t-\sin t)$, $y = 7(1-\cos t)$ $(2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi)$. (*Ответ:* 56,00.)

2.24. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$. (*Ответ:* 2,35.)

2.25. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$. (*Ответ:* 24,00.)

2.26. $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$ (петля). (*Ответ:* 4,00.)

2.27. $\rho = 5\sin\varphi$. (*Ответ:* 15,70.)

2.28. $\rho = 4\cos\varphi$. (*Ответ:* 12,56.)

2.29. $\rho = 5(1+\cos\varphi)$. (*Ответ:* 40,00.)

2.30. $y^2 = x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,8)$. (*Ответ:* 9,07.)

3. **Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг** указанной оси координат.

3.1. Ф: $y^2 = 4-x$, $x=0$, Oy. (*Ответ:* 107,17.)

3.2. Ф: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 1,68.)

3.3. Ф: $x^2/9 + y^2/4 = 1$, Oy. (*Ответ:* 150,72.)

3.4. Ф: $y^3 = x^2$, $y=1$, Ox. (*Ответ:* 3,59.)

3.5. Ф: $x = 6(t-\sin t)$, $y = 6(1-\cos t)$, Ox. (*Ответ:* 1064,88.)

3.6. Ф: $x = 3\cos^2 t$, $y = 4\sin^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$, Oy. (*Ответ:* 37,68.)

3.7. Ф: $y^2 = x$, $x^2 = y$, Ox. (*Ответ:* 0,94.)

3.8. Ф: $y^2 = (x-1)^3$, $x=2$, Ox. (*Ответ:* 0,78.)

3.9. Ф: $x = \sqrt{1-y^2}$, $y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 1,24.)

3.10. Ф: $y = \sin x$, $y=0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, Ox. (*Ответ:* 4,93.)

3.11. Ф: $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, Ox. (*Ответ:* 60,29.)

3.12. Ф: $x = 2\cos t$, $y = 5\sin t$, Oy. (*Ответ:* 83,73.)

3.13. Ф: $y = x^2$, $8x = y^2$, Oy. (*Ответ:* 15,07.)

3.14. Ф: $y = e^x$, $x=0$, $y=0$, $x=1$, Ox. (*Ответ:* 10,05.)

3.15. Ф: $y^2 = 4x/3$, $x=3$, Ox. (*Ответ:* 90,43.)

3.16. Ф: $y = 2x - x^2$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 3,35.)

3.17. Ф: $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, полярная ось. (*Ответ:* 66,99.)

3.18. Ф: $x = 7\cos^3 t$, $y = 7\sin^3 t$, Oy. (*Ответ:* 328,23.)

3.19. Ф: $x^2/16 + y^2/1 = 1$, Ox. (*Ответ:* 16,75.)

3.20. Ф: $x^3 = (y-1)^2$, $x=0$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 6,44.)

3.21. Ф: $xy = 4$, $2x+y-6=0$, Ox. (*Ответ:* 4,19.)

3.22. Ф: $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = 2\sin t$, Oy. (*Ответ:* 25,12.)

3.23. Ф: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$, Ox. (*Ответ:* 16,75.)

3.24. Ф: $y = -x^2 + 8$, $y = x^2$, Ox. (*Ответ:* 535,89.)

3.25. Ф: $y^3 = (x+4)^3$, $x=0$, Ox. (*Ответ:* 200,96.)

3.26. Ф: $y = x^3$, $x=0$, $y=8$, Oy. (*Ответ:* 60,29.)

3.27. Ф: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 0,96.)

3.28. Ф: $2y = x^2$, $2x+2y-3=0$, Ox. (*Ответ:* 57,10.)

3.29. Ф: $y = x - x^2$, $y=0$, Ox. (*Ответ:* 0,10.)

3.30. Ф: $y = 2 - x^2/2$, $x+y=2$, Oy. (*Ответ:* 4,17.)

4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси.

4.1. L: $y = x^3/3$ $(-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2)$, Ox. (*Ответ:* 4,25.)

4.2. L: $\rho = 2\cos\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 12,57.)

4.3. L: $x = 10(t-\sin t)$, $y = 10(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 6698,67.)

4.4. L: $y = x^2/2$, отсеченная прямой $y = 3/2$, Oy. (*Ответ:* 14,65.)

4.5. L: $3y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$, Ox. (*Ответ:* 24,09.)

4.6. L: $y = \sqrt{x}$, отсеченная прямой $y = x$, Ox. (*Ответ:* 5,34.)

4.7. L: $x = 2(t-\sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 267,95.)

4.8. L: $x = \cos t$, $y = 3+\sin t$, Ox. (*Ответ:* 118,32.)

4.9. L: $3x = y^3$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$, Oy. (*Ответ:* 24,09.)

4.10. L: $y = x^3/3$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, Ox. (*Ответ:* 1,27.)

4.11. L: $x = \cos t$, $y = 1+\sin t$, Ox. (*Ответ:* 32,28.)

4.12. L: $x^2 = 4+y$, отсекаемая прямой $y=2$, Oy. (*Ответ:* 259,57.)

4.13. L: $x = 3(t-\sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 602,88.)

4.14. L: $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 7,54.)

4.15. L: $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, полярная ось. (*Ответ:* 14,82.)

4.16. L: $y^2 = 4+x$, отсекаемая прямой $x=2$, Ox. (*Ответ:* 64,89.)

4.17. L: $y^2 = 2x$, отсекаемая прямой $2x=3$, Ox. (*Ответ:* 14,65.)

4.18. L: $3y = x^3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, Ox. (*Ответ:* 0,63.)

4.19. L: $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 14,80.)

4.20. L: $\rho = 6\sin\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 354,96.)

4.21. L: $x = t - \sin t$, $y = 1-\cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, Ox. (*Ответ:* 66,99.)

4.22. L: $\rho = 2\sin\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 39,44.)

4.23. L: $\rho = \frac{2}{3}\cos\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 7,07.)

4.24. L: $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 67,82.)

4.25. L: $x = 2\cos t$, $y = 3+2\sin t$, Ox. (*Ответ:* 236,64.)

4.26. L: $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 16,38.)

4.27. L: $y = x^3$ между прямыми $x = \pm 2/3$, Ox. (*Ответ:* 0,84.)

4.28. L: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, Ox. (*Ответ:* 90,14.)

4.29. L: $x = \cos t$, $y = 2+\sin t$, Ox. (*Ответ:* 78,88.)

4.30. L: $\rho = 4\sin\varphi$, полярная ось. (*Ответ:* 157,76.)

Решение типового варианта

1. **Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной линиями** $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$ (рис. 9.23.)

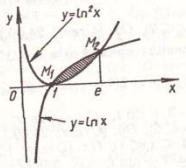


Рис. 9.23

▶ Найдем точки пересечения данных кривых: $M_1(1,0)$, $M_2(e,1)$. Теперь воспользуемся формулой (9.7). Имеем:

$$S = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\,dx,$$

$$\int \ln^2 x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x,\ du = 2\ln x \frac{1}{x}dx, \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx,$$

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx, \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C.$$

Тогда

$$S = \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e \ln^2 x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e - (x\ln^2 x -$$

$$- 2x\ln x + 2x)\Big|_1^e = e\ln e - e + 1 - (e\ln^2 e - 2e\ln e +$$

$$+ 2e) + 2 = 3 - e \approx 0{,}28. \blacktriangleleft$$

2. **Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги линии** $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

▶ Воспользуемся формулой (9.11):

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Находим подынтегральную функцию:

$$\frac{dx}{dt} = 2t\sin t + (t^2-2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2t\cos t - (2-t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t} = t^2.$$

Окончательно имеем

$$l = \int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \approx 10{,}32. \blacktriangleleft$$

3. **Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной параболами** $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 + 1$.

▶ Находим точки пересечения парабол: $M_1(-1,2)$, $M_2(1,2)$.

Объем V данного тела получаем как разность объемов $V_2 - V_1$, где, согласно формуле (9.14),

$$V_2 = \pi\int_{-1}^{1} (3-x^2)^2\,dx, \quad V_1 = \pi\int_{-1}^{1} (x^2+1)^2\,dx.$$