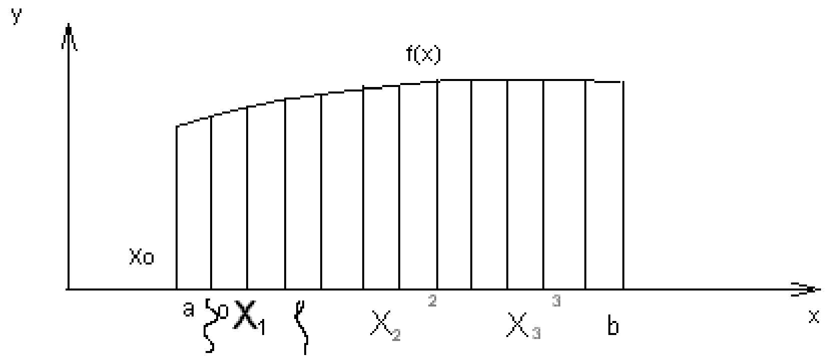
Глава 11. Определенный интеграл

11.1.Понятие определенного интеграла и его свойства

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ неотрицательная функция.



Определим площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной прямыми $x=a, x=b, y=0$ и графиком функции $y=f(x)$

Разобьем $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, выберем на каждом из частичных отрезков $[x_j;x_{j+1}]$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ по произвольной точке ζ_j определим значение функции $f(\zeta_j)$ (в этих точках) и составим сумму: $S=\sum_{j=0}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j, (\Delta x_j=x_{j+1}-x_j)$.

Эта сумма равна сумме площадей n прямоугольников. Устремим $\max\{\Delta x_j\}\to 0$

Если при этом $S_n=S$, и S не зависит от способа разбиения и выбора точек ζ_j, то величина S называется площадью данной криволинейной трапеции: $S=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j$.

Каждая криволинейная трапеция, соответствующая непрерывной функции $f(x)$,имеет площадь S.

Указанный предел называется определённым интегралом и обозначается: $\int_b^a f(x)dx=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{j=1}^{n-1} f(\zeta_j)\Delta x_j$.

Числа a и b называются нижним (a) и верхним (b) пределами интегрирования, $f(x)$– подынтегральная функция, x– переменная интегрирования.

Определенный интеграл – это число.

Вычисление определённого интеграла по определению можно осуществить с помощью компьютера, однако на практике используют формулу Ньютона – Лейбница.

Пусть задана непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ – ее первообразная. Тогда $\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a)$ или $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ – определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом: $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ – функция x.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$ и по формуле Ньютона – Лейбница: $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = \Phi(x)$. Дифференцируем: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(x)-F(a)\right] = O'(x) = f(x)$ – производная по верхнему пределу равна подынтегральной функции.

<u>Свойства определённого интеграла</u>

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ – не зависит от значения переменной интегрирования.
2. $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
4. Для любых чисел *a*, *b*, *c*: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a)$.
5. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx,\ A = const$.
6. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
7. Если $m \le f(x) \le M$ *на отрезке* $[a,b]$ *и* $a \le b, .$

$$\text{то } m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

8. $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(\zeta),\ \text{где } \zeta \in [a,b]$ – теорема о среднем.

Пример: $\int_1^e (x+\frac{1}{x})dx = \int_1^e 2xdx + \int_1^e \frac{1}{x}dx = (x^2 + \ln x)\Big|_1^b = e^2 + 1 - 1 - 0 = e^2$.

<u>11.2. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле</u>

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две непрерывные дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$, тогда

$d(uv) = vdu + udv$. Проинтегрируем равенство от a до b:

$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$, имеем: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ – формула интегрирования по частям.

<u>Пример</u>. $\int_0^\pi x\cos xdx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ \cos xdx = dv & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin xdx = (x\sin x + \cos x)\Big|_0^\pi = -2.$

<u>Замена переменной в определённом интеграле</u>

Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная функция на $[a,b]$. Введем новую переменную по формуле $x = \varphi(t)$. Если $\varphi(\alpha) = a;\ \varphi(\beta) = b;\ \varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta],\ f[\varphi(t)]$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

<u>11.3. Несобственные интегралы с бесконечными пределами</u>

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех $a \le x \le \infty$.

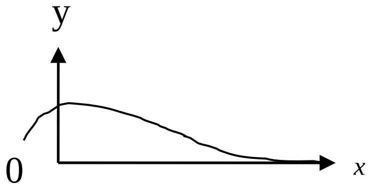
Тогда несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Если предел существует, то интеграл существует или сходится, если предел не существует, то интеграл расходится (не существует), т.е. не имеет конечного значения.

Геометрический смысл: $\int_a^\infty f(x)dx$ выражает площадь бесконечной области, заключенной между линиями $y = f(x),\ y = 0,\ x = a$.

Аналогично, $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_c^\infty f(x)dx$.

Для последнего равенства должны существовать <u>оба</u> интеграла, c – число.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость несобственный интеграл: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.



$y = \frac{1}{1+x^2}$

$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to 0} arctgb - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 2. При каких значениях параметра α интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится и при каких расходится?

$$\alpha \ne 1;\quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1},\ при\ \alpha>1\\ \infty\ при\ \alpha\le 1\end{cases}.$$

$$\alpha = 1;\quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}(\ln b) = \infty$$

Пример 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{dx}{1+x^2} =$

$$= 0 - \lim_{\alpha\to-\infty} arctg a + \lim_{b\to\infty} arctg b - 0 = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Если требуется установить, сходится ли данный интеграл или расходится, удобно применять теоремы:

1. Если для всех $x (x\ge\alpha)$ выполняется неравенство $0\le f(x)\le\varphi(x)$ и если $\int\limits_\alpha^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_\alpha^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_\alpha^\infty f(x)dx \le \int\limits_\alpha^\infty \varphi(x)dx$.

2. Если для всех $x(x\ge\alpha)$: $0\le\varphi(x)\le f(x)$ причем $\int\limits_\alpha^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то и $\int\limits_\alpha^\infty f(x)dx$ расходится.

3. Если $\int\limits_\alpha^\infty |f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_\alpha^\infty f(x)dx$ сходится.

Пример 4. Сходится ли $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$?

При $x\ge 1:\ \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2},\ \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$, поэтому (т.1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ тоже сходится и < 1.

Пример 5. Исследовать $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Но $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \infty$ – расходится, поэтому рассматриваемый интеграл тоже расходится.

Пример 6. Исследовать $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$ на сходимость.

Подынтегральная функция знакопеременная. $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$ Но $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}$, значит, интеграл $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ сходится, и по т.3 сходится и $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$.

11.4. Несобственные интегралы от функций, имеющих разрыв

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x \le b$, а при $x = b$ функция либо не определена, либо терпит разрыв. В этом случае нельзя говорить об $\int_a^b f(x)dx$, как о пределе интегральной суммы, поскольку этот предел может не существовать.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ Если предел существует, то интеграл сходится, иначе – расходится.

Если функция имеет разрыв при $x = a$, то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$ – аналогично, если предел существует, то интеграл сходится, иначе – расходится.

Если $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 внутри отрезка $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$ – существует, если существуют оба интеграла в правой части.

Пример 1. Исследовать сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

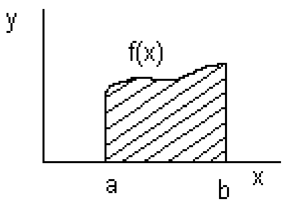
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c \to 1-0} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{c \to 1-0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^c = -\lim_{c \to 1-0} 2(\sqrt{1-c}-1) = 2$ – сходится.

Пример 2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c \to 0} \int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} + \lim_{b \to 0} \int_b^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim \frac{1}{x}\Big|_b^1 = \infty$ – интеграл расходится.

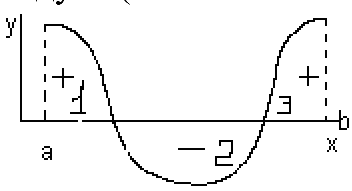
Геометрические приложения определенного интеграла

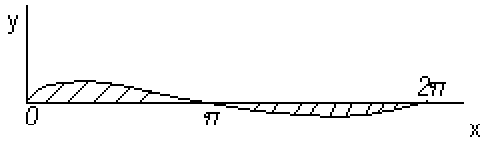
11.5. Вычисление площади плоской фигуры

а) Площадь плоской фигуры $S = \int_a^b f(x)dx$, если $f(x) \ge 0$



Если $f(x) < 0$ на интервале интегрирования, то рассматривают интеграл от модуля (или изменяют знак). $S = \int_1 fdx - \int_2 fdx + \int_3 fdx$ или $\int_a^b |f(x)|dx$.



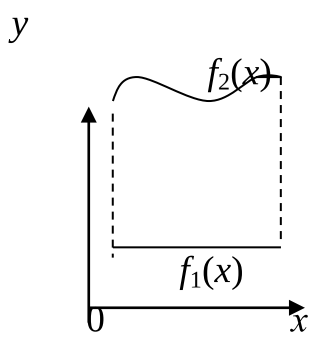


Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком $y=\sin x$ и осью абсцисс, если $0 \le x \le 2\pi$.

$$y=\sin x,\ \ 0\le x\le 2\pi;\ \ S=\int_0^{\pi}\sin x dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right|=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$$

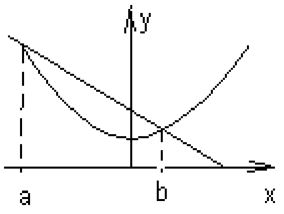
$$\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2;\ \ \int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=-2;\ \ S=2+|-2|=4.$$

Более удобной является формула: $S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$ где $f_2(x)\ge f_1(x)$.



Пример 2. Найти площадь, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $x+y=3$.

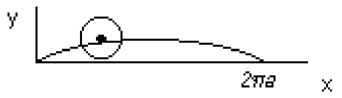
$$\begin{cases}x^2+1=y\\ x+y=3\end{cases};\ \begin{cases}x_1=-2\\ x_2=1\end{cases};\ S=\int_{-2}^{1}\left[3-x-x^2-1\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[2-x-x^2\right]=4\frac{1}{2}(ед^2).$$



б) Пусть функция задана в параметрической форме: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$.

$$S=\int_a^b ydx=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt,\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$$

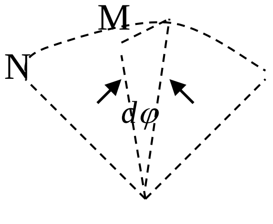
Пример 3. Вычислить площадь одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t);\ y=a(t-\cos t)$.

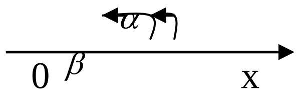


$$x=0, t=0, x=2\pi a, t=2\pi.$$

$$S=\int_0^{2\pi a}ydx=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^3\qquad(\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}).$$





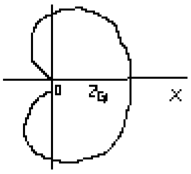
в) <u>Если кривая задана в полярных координатах</u>: $r = f(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$.

Разобьем данную площадь радиус – векторами $\varphi = \alpha, \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, ..., \beta = \varphi_n$ на n частей. Пусть углы между радиус – векторами равны $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, ..., \Delta\varphi_n$ Площадь i сектора: $\Delta S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$.

Площадь: $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$.

<u>Пример 4.</u> Найти S, ограниченную кардиоидой: $r = a(1+\cos\varphi)$.

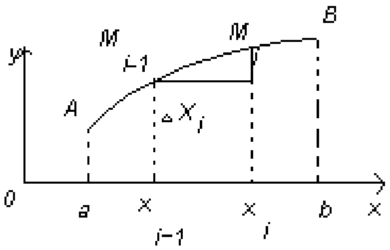
Вычислить половину площади:



$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}(\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos^2 =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\pi + \frac{a^2}{4}(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}))\Big|_0^{\pi} = \frac{3a^2\pi}{4} \cdot S = \frac{3a^2\pi}{2}$$.

<u>11.6. Длина дуги кривой</u>



а) Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Возьмем на $\overset{\cup}{AB}$ точки $A, M_1, M_2, ..., M_i, B$, и проведем хорды, которые обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$. Получим ломанную $AM_1 ... M_{n-1} ... B$, вписанную в дугу AB. Длина ломаной: $l_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$. Длина дуги – предел: $L = \lim_{\max\Delta l_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$. Если на отрезке $[a,b]$ $f(x),\ f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует. Пусть $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, тогда $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$. По теореме Лагранжа $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f'(\zeta)\Delta x}{\Delta x}$, $x < \zeta < x + \Delta x.\ l_n = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\zeta_i)]^2}\Delta x_i$, по условию, $f(x)$ и $f'(x)$ – непрерывны, поэтому существует предел интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$$L=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f')^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Пример. Найти длину дуги кривой $y=x^{\frac{3}{2}},\ 0\le x\le 4$.

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ 1+y'^2=1+\frac{9}{4}x=\frac{4+9x}{4}$$

$$L=\int_0^4\frac{\sqrt{4+9x}}{2}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{4+9x}=t,\,t_н=2,\,t_в=\sqrt{40}\\ x=\dfrac{(t^2-4)}{9},\ dx=\dfrac{2}{9}tdt\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{40}}t\frac{2}{9}tdt=\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^{\sqrt{40}}=$$

$$=\frac{1}{27}(40\sqrt{40}-8)=\frac{1}{27}8(10\sqrt{10}-1).$$

б) Если кривая задана параметрически: $x=\varphi(t),\,y=\psi(t)$ то длина дуги

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\frac{\psi'^2}{\varphi'^2}}\varphi'dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}dt;\ a=\varphi(\alpha),\,b=\varphi(\beta).$$

в) Пусть кривая задана в полярных координатах: $r=r(\varphi)$ тогда $x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi;\ x=r(\varphi)\cos\varphi;\ y=r(\varphi)\sin\varphi$.

$$x'_\varphi=\frac{dx}{d\varphi}=r'\cos\varphi-r\sin\varphi;\ y'_\varphi=\frac{dy}{d\varphi}=r'\sin\varphi+\cos\varphi;$$

$$x'^2+y'^2=r'^2\cos^2\varphi-2rr'\cos\varphi\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi+r'^2\sin^2\varphi+$$
$$+2rr'\sin\varphi\cos\varphi+r^2\cos^2\varphi=r'^2+r^2;$$

тогда $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$.

Пример. Найти длину дуги кардиоиды: $r=a(1+\cos\varphi)$.

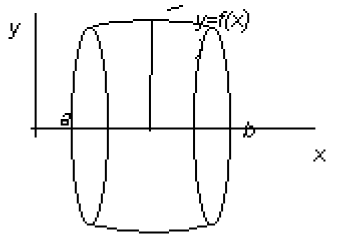
$r'=-a\sin\varphi$; $r^2+r'^2=a^2\left[1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]=2a^2(1+\cos\varphi)=4a^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$;

длина дуги: $\dfrac{1}{2}L=\int_0^\pi 2a\cos\dfrac{\varphi}{2}d\varphi=4a\sin\dfrac{\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi=4a;\ \ L=8a$.

11.7.Вычисление объема и площади поверхности вращения.

Пусть имеется тело, для которого известна площадь сечения, перпендикулярного оси *ох*, т.е. $S=S(x)$. Проведем плоскости, перпендикулярные оси *ох*. Они разобьют тело на слои, $V_{слоя}=S(x_i)\Delta x_i$ (цилиндр), тогда $V_n=\sum_{i-1}^{n}S(x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу: $V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x_i.\ \ V=\int_a^b S(x)dx$.

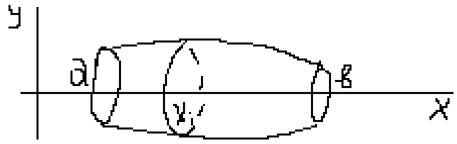
Объем тела вращения:



Если ось вращения – ось O*Y*, то объем тела вращения: $V_y = \pi\int\limits_c^d x^2 dy$.

Если ось вращения – ось O*X*, то объем тела вращения: $S(x) = \pi y^2$ и $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 dx$.

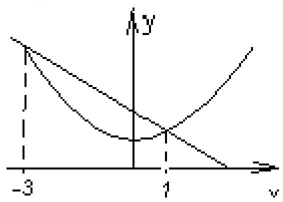
Площадь поверхности вращения.



Разобьем $[a,b]$ на n частей и проведем ломаную. При вращении ломаной получаются усеченные конусы (цилиндры). Площадь поверхности $\Delta P_i = 2\pi \dfrac{f(x_{i-1} + f(x_i))}{2} l_i$, длина хорды $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)}\Delta x_i$,

$$D = \lim_{n\to\infty}\sum_i 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)}\Delta x_i = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx .$$

Пример: Объем тела, образованного вращением вокруг оси *ох* фигуры, ограниченной линиями: $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.



$$\begin{cases} y = \dfrac{3-2x}{x} \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}; \quad 2x + x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -3 .$$

$$V = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx - \pi\int\limits_{-3}^{1}\frac{x^4}{4}dx = \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{272}{15}\pi .$$

Глава 12. Дифференциальные уравнения

12.1. Понятие комплексного числа

Комплексные числа – выражения вида $z = a + ib$, a, b – действительные числа, i – мнимая единица, $i^2 = -1$ $(\sqrt{-1} = i)$. Числа $a + i_0$ действительные, $0 + bi$ – чисто мнимые.

Число a – действительная часть числа z, $a = \operatorname{Re} z$, b – мнимая часть числа z, $b = Imz$, модуль: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.

Сопряжённое число $\overline{z} = a - ib$ (отличается знаком мнимой части). Два комплексных числа z_1 и z_2 равны, если $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.Комплексное число равно *0*, если $a = 0, b = 0$. С комплексными числами можно производить арифметические операции (по правилам алгебры):

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$z_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_1} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Решение квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ D = b^2 - 4ac$.

1) если $D > 0$, то 2 действительных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

2) если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$,

3) если $D < 0$, то 2 комплексных корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a} \cdot i$.

Пример: Решить уравнение $x^2 - 2x + 10 = 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 10 = -36,\ x_1 = \frac{2 + \sqrt{-36}}{2} = 1 + i\frac{\sqrt{36}}{2} = 1 + 3i,\ \ x_2 = 1 - 3i.$$

12.1. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Наряду с представлением комплексного числа в алгебраической форме: $z = x + iy$, во многих случаях удобно пользоваться комплексным числом в полярных координатах.

Совмещая полюс полярной системы координат с началом декартовой системы координат,

а полярную ось с осью *OX*, точка $M(x, y)$ будет иметь полярные координаты r и ϕ, $M(\phi, r)$. Декартовые координаты x и y точки $M(x, y)$ связаны с её полярными координатами r и ϕ соотношениями $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ и число $z = x + iy$ запишется в форме: $z = r(cox\phi + +i\sin\phi)$.

Правую часть этого равенства называют тригонометрической формой комплексного числа *z*, угол ϕ – аргументом числа *z* и обозначают Arg *z*, *r* – модулем комплексного числа *z* и обозначают |*z*|. Модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ находят по формулам:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} \quad при\ x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi \quad при\ x < 0; y \geq 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi \quad при\ x < 0; y < 0. \end{cases} \quad \varphi = Argz = \arg z + 2\pi k, \ (k = 0; \pm1; \pm2...).$$

Значение аргумента φ, заключенное в границах, $-\pi < \varphi \leq \pi$ называется **главным значением аргумента** и обозначается $\arg z$. Для сопряженных комплексных чисел *z* и $\bar{z}$ модули равны, а главное значения их аргументов отличаются только знаком: $|z| = |\bar{z}|, \arg z = -\arg z$.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме следующее число: $z = -\sqrt{3} + i$.

Решение. Модуль комплексного числа $-\sqrt{3} + i$ определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \left|-\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Так как число $-\sqrt{3} + i$ лежит во второй четверти, по формуле найдем: $\varphi = arctg\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi k$. Подставляя значение модуля и аргумента в формулу, получаем $-\sqrt{3} + i = r\left[\cos(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k) + i\sin(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k)\right] = r(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.

Пример 2. Представить в тригонометрической форме следующее число: $z = -1$.

Решение. $-1 = -1 + 0 \cdot i$ Модуль числа $z = -1$ будет равен $|-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ а аргумент $\varphi = arctg\dfrac{0}{-1} = \pi + 2\pi k$. По найденным значениям модуля и аргумента число $z = -1$ в тригонометрической форме запишется так: $-1 = 1\left[\cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k)\right] = \cos\pi + i\sin\pi$.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме следующее число: $z = 1 - i$.

Решение. Согласно формулам, найдем: $|z| = \sqrt{2}; \varphi = arctg(-1) + 2\pi k = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$. Так как число находится в четвертой четверти, получаем $1 - i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

Умножение и возведение в степень.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)\right] = = r_1 \cdot r_2\left[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$,

т.е. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg z_1 \cdot z_2 = \arg z_1 \cdot \arg z_2$. Получили формулу: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, модули перемножаются, а аргументы складываются.

Полученная формула справедлива и для произведения $n\,(n > 2)$ комплексных чисел. При этом имеем $z_1 \cdot z_2 \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \dots \cdot r_n\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)\right]$.

Полагая в равенстве $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, найдем: $z^n = \left|r^n\right|(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, т.е. $\left|z^n\right| = r^n$; $\arg(z^n) = n\arg z$. Эта формула называется формулой Муавра.

Деление. Рассмотрим деление двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

$$= -z'; -z' + \frac{1}{x} \cdot z = 2\frac{\ln x}{x}; z' - \frac{1}{x} \cdot z = -2\frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Следовательно, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$, т.е. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, модуль частного равен частному их модулей, а из аргумента делимого вычитаем аргумент делителя.

Дадим геометрическую интерпретацию умножения и деления комплексных чисел. Из формулы умножения следует, что при умножении комплексных чисел z_1 на z_2 вектор *OZ*, поворачивается около начала *0*(0,0) против часовой стрелки на угол $\varphi_2 = \arg z_2$ и сжимается (растягивается) в r_2 раз, если $r_2 > 1 (r_2 < 1)$ (рис.1).

При делении же комплексных чисел z_1 на z_2, согласно формуле, вектор *OZ*, поворачивается около точки *0*(0,0) по часовой стрелке на угол $\varphi_2 = \arg z_2$ и сжимается (растягивается) в r_2 раз, если $r_2 > 1 (r_2 < 1)$ (рис.2).

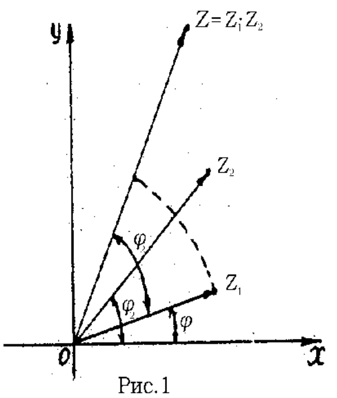


Рис.1

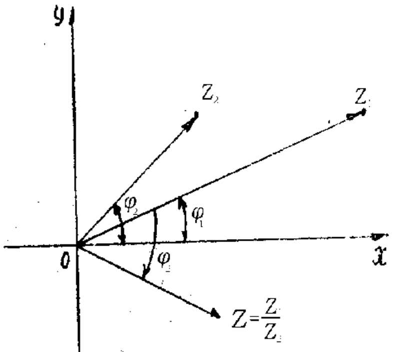


Рис.2

Извлечение корня. Пусть дано комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Надо найти комплексное число $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$., удовлетворяющее условию $\omega^n = z$. Согласно формуле Муавра, получим: $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Отсюда находим $\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ или $\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta_k = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\ (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$

Таким образом, имеем $\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$,где $k = 0, 1, 2, ...(n-1)$.

Первые равенства показывают, что модули всех корней ω_k одинаковы и расположены на окружности радиуса $|\omega| = \sqrt[n]{|z|} = R$ с центром в начале координат. Обозначим одно из значений корня с аргументом $\dfrac{\varphi}{n}$, полученное из формулы при $k = 0$ через ω_1; тогда $\omega_1 = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n})$ Полагая затем $k = 1$, найдем следующее значение корня ω_2 с аргументом $\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$: $\omega_2 = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}) + i\sin(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n})\right]$; его можно получить из первого значения поворота на угол $\dfrac{2\pi}{n}$. Затем, полагая $k = 2, 3, ..., (n-1)$, находим все значения корня. Каждое последующее получается из предыдущего поворотом на один и тот же угол $\dfrac{2\pi}{n}$.

Следовательно, все n значений корней $\omega_k(k = 0; n-1)$ делят окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ на n равных частей, т.е. являются вершинами правильного n – угольника, вписанного в эту окружность.

Пример 4. Вычислить $(-\sqrt{3} + i)^4$

Решение. Получим тригонометрическую форму комплексного числа: $-\sqrt{3} + i = 2(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.Применяя формулу Муавра для $n = 4$, получаем:

$$(-\sqrt{3}+i)^4=2^4(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 4+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 4)=16(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi)=$$

$$=16(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)=16(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-8-i8\sqrt{3}.$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt[4]{1}$.

Решение. Представим число 1 в тригонометрической форме. Имеем $z=1+0\cdot i$,тогда по формулам, получим: $|1|=\sqrt{1^2+0^2}=1,\ \varphi=arctg\frac{0}{1}=0^0+2\pi k,\ \arg 1=0^0$, т.е. число находится на положительной полуоси *OX*. Из формулы находим $p=\sqrt[4]{1}=1$, значит, все значения корней лежат на единичной окружности $R=1$. Далее $\theta_1=\frac{\arg 1}{4}=0^0$ и $\omega_1=1(\cos 0^0+i\sin 0^0)=1,\ \omega_1=1$. Все значения $\sqrt[4]{1}$ лежат в вершинах квадрата, вписанного в единичную окружность $R=1$, причем одна из вершин этого квадрата – точка (1,0), а остальные значения корней $\omega_2,\omega_3,\omega_4$ можно получить поворотом на угол $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ первого значения корня ω_1,

$$\omega_2=1\left[\cos(0^0+\frac{\pi}{2})+i\sin(0^0+\frac{\pi}{2})\right]=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$\omega_3=1\left[\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\right]=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$\omega_4=1\left[\cos(\pi+\frac{\pi}{2})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{2})\right]=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i;$$

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[3]{2+2i}$.

Решение. Представим число $2+2i$ в тригонометрической форме. Это число лежит в первой четверти; по формулам находим $\rho=\sqrt{4+4}=\sqrt{8};\ \varphi=arctg1+2\pi k=\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Следовательно, $2+2i=\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ По формулам определяем корни:

$$\omega_k=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),(k=0,1,2),$$

отсюда получим:

при $k=0,\ \omega_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ k=1,\ \omega_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

$$k=2,\ \omega_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

12.3. Понятие дифференциального уравнения. Задача Коши

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее аргумент *x*,исходную функцию *y* и её производные. Порядок старшей производной называется порядок дифференциального уравнения.

Всякая $y = F(x)$ – решение, если она обращает его в тождество.

Общее решение дифференциального уравнения *n*–го порядка содержит *n* констант $y = \varphi(x, c_1, ..., c_n)$, иногда получаем ответ в виде: $F(x, y, c_1, ..., c_n) = 0$ это общий интеграл.

Дифференциальное уравнение I-го порядка

Это дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, иногда $y' = F(x, y)$.

Общее решение $y = \varphi(x, c)$, *c* – произвольная постоянная.

Геометрически общее решение – семейство интегральных кривых.

Если задать точку $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходить кривая, то тем самым из бесконечного числа кривых выделяется 1 кривая – частное решение.

Аналитически – имеется начальное условие: $y_0(x_0) = y \Rightarrow$ из общего решения находится частное. Это задача Коши.

Пример. Решить задачу Коши: $y' = 2x,\ y(0) = 1$

$y = x^2 + C; 1 = 0^2 + C; C = 1; y = x^2 + 1$ – частное решение.

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Рассмотрим решение некоторых дифференциальных уравнений первого порядка.

12.4. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение, $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$, полагая, что $f_2(y) \neq 0, \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Интегрируя, получим решение: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде: $M(x)dx + N(y)dy$. Интегрируем: $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

Пример:

$$xdx + ydy = 0; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1^2$$.

Если дифференциальное уравнение записано в виде: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ и $M_2(x) \neq 0, N_1(y) \neq 0$, то преобразуем его: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$ Далее интегрируем .

Примеры:

$xdx + ydy = 0;\ xdy = -ydx;\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};\ y = \frac{c}{x}$.

$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0;\ \frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0;\ (\frac{1}{x}+1)dx + (\frac{1}{y}-1)dy = 0$,

$\ln|x| + x + \ln|y| - y = \ln(xy) + x - y = c$.

12.5.Однородные относительно аргумента и функции дифференциального уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией *n*-го измерения, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$.

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ 1-го измерения, $f(x,y) = xy - y^2$ – 2-го измерения.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ называется однородным относительно *x* и *y*, если $f(x,y)$ однородная функция **нулевого** измерения.

Решение. По условию: $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$. Пусть $\lambda = \frac{1}{x}$ тогда $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(1, \frac{y}{x}) = y'$. Сделаем подстановку:

$\frac{y}{x} = u, y = u \cdot x;\ \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$ подставим в дифференциальное уравнение: $u + \frac{du}{dx} \cdot x = f(1,u)$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. $x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u;\ \frac{dx}{x} = \frac{du}{f(1,u)-u}$, далее - интегрируем по u и x. Подставим вместо $u = \frac{y}{x}$

Пример: $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2};\ y = u \cdot x;\ y' = u + u' \cdot x = \frac{x \cdot u \cdot x}{x^2 - u^2 \cdot x^2} = \frac{u}{1-u^2}$

$u' \cdot x = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2};\ \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u^3}{1-u^2};\ \frac{du(1-u^2)}{u^3} = \frac{dx}{x};\ (\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u})du = \frac{dx}{x};$ интегрируем:

$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| = \ln|c|;\ -\frac{1}{2u^2} = \ln|u \cdot x \cdot c|,\ u = \frac{y}{x}$, имеем: $-\frac{x^2}{y^2} = \ln(cy)$.

12.6. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка методом подстановки

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно y и y'. Оно имеет вид: $y' + p(x)\cdot y = f(x)$. Если $f(x) = 0$, то это однородное уравнение, иначе не однородное.

Будем искать решение в виде $y = u(x)\cdot v(x)$, тогда $y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, подставим в уравнение: $u'v\cdot + uv' + p(x)uv = f(x)$, или $u(v' + p(x)v) + u'v = f(x)$ Выберем v такой, чтобы $v' + p(x)v = 0$, тогда $\frac{dv}{dx} = -pv; \frac{dv}{v} = -pdx; \ln v = -\int pdx + \ln c$, или $v = c_1 e^{-\int pdx}$, т.к. достаточно отличного от нуля решения, то $v = e^{-\int pdx} \quad (\neq 0)$. Подставим найденное значение v:

$u'v = f; \frac{du}{dx} = \frac{f}{v}; u = \int \frac{f(x)}{v(x)}dx + c$ окончательно, $y = uv = v\left[\int \frac{f(x)}{v(x)}dx + c\right]$.

Пример: $y(1) = \frac{5}{4}; \quad xy' + 2y = x^2; \quad y' + \frac{2y}{x} = x$.

Пусть $y = uv,\ y' = u'v + uv',\ u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x,\ u(v' + \frac{2v}{x}) + u'v = x$; $v' + \frac{2v}{x} = 0$;

$\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x}; \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}; \ln v = -2\ln x + \ln c_1; v = \frac{c_1}{x^2}, c_1 = 1, v = \frac{1}{x^2}$. Подставим в исходное:

$u(v' + \frac{2}{x}v) + u'\frac{1}{x^2} = x; \frac{du}{dxx^2} = x; du = x^3dx; u = \frac{x^4}{4} + c; y = \frac{1}{x^2}(\frac{x^4}{4} + c) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}; \frac{5}{4} = \frac{1^2}{4} + \frac{c}{1^2}; c = 1$, частное решение: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$.

12.7. Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка методом вариации произвольной постоянной

Найдём решение однородного уравнения: $y' + p(x)\cdot y = 0$, переменные разделяются: $y = -p(x)y; \frac{dy}{y} = -p(x)dx; \ln y = \int -p(x)dx + \ln c; y = ce^{-\int p(x)dx}$.

Будем считать, что c - это функция от x: $c = c(x)$, тогда $y = c(x)e^{-\int p(x)dx} = c(x)z_1$ (для удобства). Подставим в уравнение:

$$c'z_1 + cz_1' + pcz_1 = f$$

$$c'z_1 + c(z_1' + pz_1) = f; \frac{dc}{dx} = \frac{f}{z}; c(x) = \int \frac{f}{z_1}dx + c_1; y = z_1c(x) = e^{-\int pdx}\cdot\left[\int \frac{f}{z_1} + c_1\right].$$

Пример:

$y' + \frac{2y}{x} = x$;

$y' + \frac{2y}{x} = 0; \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}; \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}; \ln(y) = -2\ln x + \ln c; y = \frac{c}{x^2}$; считаем $c = c(x)$.

$$y' = \frac{c'x^2 - c2x}{x^4};\ c'\frac{1}{x^2} - c\frac{2}{x^3} + \frac{2c}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = x;\ c' = x^3;\ c = \frac{x^4}{4} + c;$$

$$y = \frac{1}{x^2}\cdot(\frac{x^4}{4} + c) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}.$$

12.8. Уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид: $y' + p(x)y = f(x)y^n,\ (n \neq 0; n \neq 1)$.

Разделим на y^n: $\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{-n+1} = f(x)$ (а).

Сделаем замену: $z = y^{-n+1},\ z'_x = (1-n)y^{-n}\cdot y'$ подставим в (а):

Это линейное дифференциальное уравнение относительно z:

$\frac{z}{1-n} + pz = f(x);\ z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)$. Находим z, затем находим y (вместо z подставим y^{-n+1}).

Пример:

$xy' - y(2y\ln x - 1) = 0;\ xy' + y - 2y^2\ln x = 0;\ y' + \frac{1}{x}y = 2y^2\frac{\ln x}{x}$ -Бернулли!

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = 2\frac{\ln x}{x};\ y^{-1} = z;\ -y^{-2}y' = z';\ \frac{y'}{y^2} = -z';$$

$$-z' + \frac{1}{z}z = 2\frac{\ln x}{x};\ z' - \frac{1}{x}z = -2\frac{\ln x}{x}.$$

<u>линейное относительно z:</u>

$z' - \frac{1}{x}z = 0;\ \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x};\ \ln z = \ln x + \ln c;\ z = x\cdot c(x)$ методом вариации.

$$z' = c + x\cdot c';\ c + xc' - \frac{1}{x}xc = -2\frac{\ln x}{x};\ xc' = -2\frac{\ln x}{x};\ \frac{dc}{dx} = -2\frac{\ln x}{x^2};$$

$$c = \int\frac{-2\ln x}{x^2}dx = \left|u = \ln x;\ du = \frac{dx}{x};\ dv = \frac{dx}{x^2};\ v = \frac{-1}{x}\right| =$$

$$= (-2)(\frac{-1}{x})\ln x - (-2)\int(\frac{-1}{x})\frac{dx}{x} = 2\frac{\ln x}{x} - 2\int\frac{dx}{x^2} = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + c_1;$$

$$z = x\cdot c(x) = x(2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + c_1) = 2\ln x + 2 + c_1x;\ y^{-1} = z = 2\ln x + 2 + c_1x.$$

12.9. Понижение порядка в дифференциальных уравнениях.

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным.

Дифференциальное уравнение порядка

$n(n>1):\ f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Всякая функция $y = f(x)$ определённая и n раз дифференцируемая, называется решением этого уравнения, если она обращает его в тождество.

Решение $-\ F(x,c_1,c_2,c_3,...,c_n)=0$. Задача Коши: найти такое решение д.у., чтобы оно само и его производные до порядка $(n-1)$ при $x=x_0$ принимали бы заданные значения $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ где $x_0,y_0,y'_0,y_0^{(n-1)}$ заданные числа, называемые начальными условиями. Задача Коши – значение функции и производных задаются при одном и том же значении $x=x_0$.

Общее решение: если задачу Коши можно решить при любых начальных значениях, то $F(x,c_1,c_2,...,c_n)=0$ – общее решение.

Понижение порядка

I. $y^{(n)}=f(x)$. Общее решение – интегрирование n раз: $y=\int dx\int dx...\int f(x)dx+c_1+c_2x+c_3x^2+...+c_nx^{n-1}$.

Пример: $y'''=\frac{1}{x};\ y(1)=1;\ y'(1)=2;\ y''(1)=-2$.

$$y'''=\frac{d(y'')}{dx};\ y''=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c_1;\ y''(1)=-2;\ -2=\ln 1+c_1;\ c_1=-2,$$

$$y'=\int(\ln x+2)dx=\ln x-x-2x+c_2;\ y'(1)=2;\ 2=1\cdot\ln 1-1-2\cdot 1+c_2;c_2=5$$

$$y=\int(x\ln x-3x+5)dx=\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x^2+5x+c_3;1=0-\frac{7}{4}\cdot 1+5\cdot 1+c_3;\ c_3=-\frac{9}{4}$$

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{7}{4}x^2+5x-\frac{9}{4}.$$

II. Уравнения, не содержащие искомой функции $F(x,y',y'',...,y^{(n)})=0$. Порядок может быть понижен на *1:* $y'=P(x)$ получим уравнение $F(x,p,p',...,p^{(n-1)})=0$. Если уравнение не содержит искомой функции *y* или её производных до порядка $(n-1)$, т.е. $F(x,y^{(n)},y^{(n+1)})=0$, то порядок может быть понижен на n единиц: $y^{(n)}=P(x);\ f(x,p,...,p^{(n)})=0$.

Пример: $y''=5y'$; подстановка $y'=p(x),\ y''=\frac{dp}{dx}$; тогда

$$\frac{dp}{dx}=5p;\frac{dp}{dx}=5dx;\ln p=5x+\ln c;\ln\frac{p}{c_1}=5x;\frac{p}{c_1}=e^{5x};\ p=c_1e^{5x};\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^{5x};$$

$$y=\frac{c_1}{5}\cdot e^{5x}+c_2.$$

III. Уравнения, не содержащие независимой переменной $f(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$.

Понижение порядка на $1: y=p(x)$ $y''=\left[p(x)\right]'_x=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p;\ y'''=\left[\frac{dp}{dy}p\right]'_x=(\frac{dp}{dy}p)'_y\frac{dy}{dx}=$

$$=(\frac{d^2p}{dy^2}p+\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dp}{dy})p=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+(\frac{dp^2}{dy})p$$

Общее решение уравнения: $F(y,p,c,...,c_{n-1})=0$; $p=\frac{dy}{dx}$ - I-го порядка.

Пример: $(y')^2+2y\cdot y''=0;\ y''=p(y);\ y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p;\ p^2+2y\frac{dp}{dy}p=0$

$p(p+2y\frac{dp}{dy})=0$,

а) $p=0,\frac{dy}{dx}=0,\ y=c$;

б) $p+2y\frac{dp}{dy}=0;\ \frac{2dp}{p}=-\frac{dy}{y};\ 2\ln p=-\ln y+\ln c_1^2$;

$p^2=\frac{c_1^2}{y};\ p=\frac{c_1}{\sqrt{y}};\ \frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{\sqrt{y}};\ \sqrt{y}dy=c_1dx;\ \frac{2}{3}\sqrt{y^3}=c_1x+c_2$;

$y^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(c_1x+c_2);\ y=\left[\frac{3}{2}(c_1x+c_2)\right]^{\frac{2}{3}}$.

12.10. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: свойства решений. Определитель Вронского

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции *y* и её производных y', y'' и т.д.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ (1), где $a_1,a_2,f(x)$ - заданные функции от x.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется однородным или уравнением без первой части.

Если $f(x)\neq 0$ то уравнение называется неоднородным или уравнением с правой частью.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$y''+a_1y'+a_2y=0$

Теорема 1: если y_1 и y_2 –два частных решения (1), то $c_1y_1+c_2y_2$ – тоже решение.

Определитель Вронского.

Определение. Два решения уравнения (1) y_1 и y_2 называется линейно независимым на отрезке $[a,b]$, если их отношения на этом отрезке не являются постоянными, т.е. $\frac{y_1}{y_2}\neq const$. Иначе решения называются линейно зависимыми, тогда $y_1=\lambda y_2\ (\lambda=const)$.

Если y_1 и y_2 есть функции от x, то определитель $W=\begin{bmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{bmatrix}=y_1\cdot y_2'-y_1'\cdot y_2$ называется определителем Вронского.

Теорема 2: если решения y_1 и y_2 – линейно зависимые на отрезке $[a,b]$, то $W=0$.

12.11. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка: формула Лиувилля.

Теорема 3: Если определитель Вронского $W(y_1,y_2)$, составленный для решений y_1 и y_2 уравнения (1), не равен 0 при каком-нибудь значении x_0 на отрезке $[a,b]$, где коэффициенты непрерывны, то он $\neq 0$ ни при каком значении x на $[a,b]$.

$W=W_0e^{-\int adx}$ -формула Лиувилля.

Теорема 4: Если y_1 и y_2 – линейно независимые решения (1), то $y=c_1y_1+c_2y_2$ – общее решение (1).

12.12. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$y''+py'+pq=0$ (1), p,q – действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого дифференциального уравнения, надо найти два линейно независимых частных решения.

Ищем частные решения в виде: $y=e^{kx}$ тогда $y'=ke^{kx}m\ y''=k^2e^{kx}$. Подставим в (1): $k^2e^{kx}, k^2e^{kx}+kpe^{kx}+q\cdot e^{kx}+0,\ e^{kx}(k^2+pk+q)=0,\ e^{kx}$, значит, $k^2+pk+q=0$. Если k удовлетворяет уравнению, то e^{ux} – решение. Характеристическое уравнение по отношению к (1). Пусть корни уравнения k_1 и k_2.

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Возможны 3 случая:

1.) k_1 и k_2 – действительные числа, $k_1\neq k_2$.

2.) $k_1=k_2$ – действительные числа.

3) k_1 и k_2 – комплексные числа.

1. в этом случае частные решения: $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$, эти решения линейно независимые $(\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq const(k_1\neq k_2)$.Общее решение: $y_{00}=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x})$

Пример:

$y''-3y'+2y=0$. Составим характеристическое уравнение:

$k^2-3k+2=0; k_1=1; k_2=2;\ y_{00}=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

2. $k_1=k_2$. получаем одно частное решение $y_1=e^{k_1x}$. Найдём второе линейно независимое решение $(e^{k_2x}\equiv e^{k_1x})$. Ищем его в виде: $y_2=u(x)e^{k_1x}$.

$y_2' = u'e^{k_1x} + uk_1e^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u)$;

$y_2'' = k_1e^{k_1x}(u' + k_1u) + e^{k_1x}(u'' + k_1u') = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u)$.

Подставим в уравнение (1):

$e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u) + pe^{k_1x}(u' + k_1u) + que^{k_1x} = 0$ или:

$e^{k_1x}\left[u'' + u'(2k_1 + p) + u(k_1^2 + pu_1 + q)\right] = 0;\ k_1^2 + pk_1 + q = 0$.

$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$, т.е. $2k_1 + p = 0$ значит, $u'' = 0;\ u' = A;\ u = Ax + b$.

Выберем частное решение, $A = 1,\ B = 0$, т. е. $u = x$.

$y_2 = xe^{k_1x};\ \frac{y_2}{y_1} = x \neq const$ – линейно независимое, $y_{00} = c_1e^{k_1x} + c_2xe^{k_1x}$.

Пример: $y^u - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$ Характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 1 = 0;\ k_1 = k_2 = 1;\ y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x;\ y_{00} = c_1e^x + c_2xe^x$,

$y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x$,

тогда $\begin{cases} 2 = c, \\ 4 = c_1 + c_2, \end{cases} \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1 + x)$.

3. Комплексные корни. Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha = -\frac{p}{2},\ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ Частные решения: $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x},\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$. Если какая-либо комплексная функция действительного аргумента $y = u(x) + iv(x)$ удовлетворяет уравнению, то этому уравнению удовлетворяют и функции $u(x)$ и $v(x)$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$. Выберем действительные функции $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ которые будут решениями уравнения $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ линейно независимые: $\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = ctg\beta \neq const$.

Общее решение: $y_{00} = c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2 = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x = \ = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$.

Пример: $y'' - 4y' + 5y = 0,\quad k^2 - 4k + 5 = 0,\quad k_1 = 2 + i,\ k_2 = 2 - i$,

$y_1 = e^{2x}\cos x,\ y_2 = e^{2x}\sin x,\ y_{00} = e^{2x}(\cos xc_1 + c_2\sin x)$ - общее решение.

12.13. Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной.

Пусть имеем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$. (1)

<u>Теорема 1:</u> Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1) равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения $\tilde{y}$ и общего решения (y_{00}) соответствующего однородного уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Для нахождения частного решения <u>используют метод вариации производных постоянных</u>. В общем решении однородного уравнения $y_{00} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (3), считаем c_1 и c_2 как функции от *X*.

$y_{00} = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$ Подберём c_1 и c_2 так, чтобы $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ тогда $y_{00}' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \cdot y_{00}'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$. Подставим в (1):

$$(c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2') + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

$c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$ если $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$

Функция (3) будет решением неоднородного дифференциального уравнения (1), если $\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ (4)

y_1 и y_2 – линейно независимы, $W(y_1; y_2) \neq 0$, поэтому: $c_1' = \phi_1(x);\ c_2' = \phi_2(x)$.

Интегрируя, получим: $c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{c}_1;\ c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{c}_2$.

Подставим $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (3) и получим общее решение: $y = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2$.

Пример:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x};\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$$

$$k^2 + 1 = 0;\ k = \pm i;\ y_{00} = c_1 \cos x + c_2 \sin x;\ y_1 = \cos x;\ y_2 = \sin x.$$

Составим систему (4):

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ c_1'(-\sin x) + c_2' x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases};\quad c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -tgx;\ c_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1} = 1.$$

$$c_1 = -\int tgx dx = \ln|\cos x| + \overline{c}_1;\ c_2 = \int dx = x + \overline{c}_2;$$

$$y = (\ln|\cos x| + \overline{c}_1)\cos x + (x + \overline{c}_2)\sin x;$$

$$y(0) = 1;\ y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1 = (0 + \overline{c}_1) \cdot 1 + (0 + \overline{c}_2) \cdot 0;\ \ 0 = tg0 \cdot \cos 0 + (0+1) \cdot 0 + 0 + (0 + c_2) \cdot 1;$$

$$c_1 = 1;\ c_2 = 0 \Rightarrow y = (\ln|\cos x| + 1)\cos x + x\sin x.$$

<u>12.14. Неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью.</u>

Пусть имеем уравнение: $y'' + py' + qy = f(x)$ где p и q – действительные числа. Пусть правая часть имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right]$ где α и β

вещественные числа, $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены одной или разных степеней. Если они разной степени, то пусть n – их наибольшая степень. Решение можно определить методом вариации произвольных постоянных, однако можно отыскать решение более простым методом неопределённых коэффициентов.

Рассмотрим два случая:

1. число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного д.у. В этом случае частное решение ищем в виде: (1) $y = e^{\alpha x}\left[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right]$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени $P(x)$ и $Q(x)$. Необходимо определить коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$.
2. Если число $\alpha+\beta i$ является корнем кратности $k(k\geq 1)$ характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде:

(2) $\bar{y} = x^k \cdot e^{\alpha x}\left[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right]$. Ищем коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$.

В обоих случаях определяем коэффициенты многочленов так: в данное уравнение подставляем $\bar{y}$ и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получаем систему уравнений, из которых определяем коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$.

Пример 1:

$y'' - 8y' + 7x = x^2 + 7x + 8;\ k^2 - 8k + 7 = 0;\ k_1 = 1, k_2 = 7;\ y_{00} = c_1 \cdot e^x + c_2 e^{7x}.$ В правой части отсутствует множитель $e^{\alpha x}$, следовательно, $\alpha = 0$ и правая часть не содержит $\sin x$ и $\cos x$, это значит, что $\beta = 0 \cdot (\sin 0 \cdot x = 0, \cos 0 \cdot x = 1)$. Число $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Частное решение ищем в виде (1), где $\alpha = 0, \beta = 0$, степень многочлена $q(x)$ – вторая (x^2).

$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$. Найти A,B,C. $\tilde{y}' = 2Ax + B,\ \tilde{y}'' = 2A$ Подставим в уравнение:

$2A - 8(2Ax + B) + 7(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 7x + 8$;

$7Ax^2 + x(7B - 16A) + 2A - 8B + 7C = x^2 + 7x + 8$.

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 7A = 3 \\ 7B - 16A = 7 \\ 2A - 8B + 7C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{7} \\ B = (7 + \dfrac{16}{7} = 9\dfrac{2}{7})\dfrac{1}{7} = \dfrac{65}{49} \\ C = \dfrac{1}{7}(8 + 8 \cdot \dfrac{65}{49} - 2\dfrac{1}{7}) = \dfrac{898}{343} \end{cases}$$

$$y = y_{00} + y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} + \frac{1}{7}x^2 + \frac{65}{49}x + \frac{898}{343}.$$

Пример 2: $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x};\ k^2 + 2k - 3 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = -3$;

$y_{00} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}.\ \alpha = -1, \beta = 0$,

$-1+0i$ не корень, характеристическое уравнение, поэтому $\tilde{y}=Ae^{-x},\ \tilde{y}'=-Ae^{-x},\ \tilde{y}''=Ae^{-x}$.

$Ae^{-x}+2(-Ae^{-x})-3Ae^{-x}=4e^{-x};\ A-5A=4;\ a=A=-1$.

$y=y_{00}+\tilde{y}=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}-e^{-x}$.

Пример 3: $y''+y=5\sin 2x;\ y''+y=0;\ k^2+1=0;\ k=\pm i,$ - не корень.

$y_{00}=c_1\cos x+c_2\sin x;\ \alpha=0;\ \beta=1;\ 0+i$

$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x;\ \tilde{y}'=-2A\cos 2x+2B\sin 2x;\ \tilde{y}''=4A\cos 2x-4B\sin 2x;$

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=5\sin 2x$,

$\cos 2x(-4A+A)+\sin 2x(-4B+B)=5\sin 2x;\ -3A=0;\ -3B=5;\ B=-\dfrac{5}{3};$

$y=y_{00}+\tilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x-\dfrac{5}{3}\sin 2x$.

Пример 4:

$y''-6y'+8y=3e^{2x}$;

$k^2-6k+8=0;\ k_1=2;k_2=4;\ y_{00}=c_1e^{2x}+c_2e^{4x};\ \alpha=2,\beta=0,\alpha=2$ - решение характеристического уравнения.

$\tilde{y}=xAe^{2x}\cdot\tilde{y}'=Ae^{2x}+2Ae^{2x};\ y''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}$;

$2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}-6(Ae^{2x}+2Axe^{2x})+8xAe^{2x}=3e^{2x}$.

$2A+2A+4Ax-6A-12Ax'+8Ax=3;\ A=-\dfrac{3}{2};\ y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}-\dfrac{3}{2}xe^{2x}.$

12.15. Системы дифференциальных уравнений.

При решении многих задач требуется найти функции $y_1=y_1(x),y_2=y_2(x),...,y_n=y_n(x)$, которые удовлетворяют системе дифференциального уравнения , содержащих аргумент *x*, искомые функции y_i и их производные.

Рассмотрим систему дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,...,y_n)\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,...,y_n)\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,...,y_n)\end{cases}\qquad(1)$$

y_i – искомая функция, *x* – аргумент.

Система называется нормальной, если в левой части стоят производные, а правые части их не содержат.

Проинтегрировать систему – найти функции y_i, удовлетворяющие системе уравнений (1) и начальным условиям $y_1(x_0)=y_{1(0)},y_2(x_0)=y_{2(0)},...,y_n(x_0)=y_{n(0)}$. (2)

Дифференцируем по *x* первое уравнение системы:

$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+...+\frac{df_1}{dy_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}$. Заменив выражение $\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},...,\frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2,..., f_n$ из уравнений (1), получим $\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x_1,y_1,y_2,...,y_n)$. Далее снова дифференцируем по *x* полученное уравнение:

$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x_1,y_1,y_2,...,y_n)$, продолжая далее, получим уравнение:

$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x_1,y_1,y_2,...,y_n)$.

Итак, получена система:

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=f_1(x_1,y_1,y_2,...,y_n)\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x_1,y_1,y_2,...,y_n)\\ ....\\ \frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x_1,y_1,y_2,...,y_n)\end{cases} \qquad (3)$$

Из первых $n-1$ уравнений определяем $y_2,y_3,...,y_n$, выразив их через x,y и производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},...,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\begin{cases}y_2=\varphi_2(x,y,y_1,y_1'',...,y_1^{(n-1)})\\ y_3=\varphi_3(x,y,y_1,y_1'',...,y_1^{(n-1)})\\ y_n=\varphi_n(x,y,y_1,y_1'',...,y_1^{(n-1)})\end{cases} \qquad (4)$$

Подставляя эти выражения в последние из уравнений (3), получим уравнение *n*-го порядка для определения y_i:

(4$_a$) $\frac{d^ny_1}{dx^n}=\Phi(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)})$ Решая его, определим y_i: $y_1=\Psi_1(x,c_1,c_2,...,c_n)$.

Дифференцируя $(n-1)$ раз, найдём производные $\frac{dy_1}{dx},\frac{d^2y_1}{dx^2},...,\frac{d^{(n-1)}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции x, $c_1,c_2,...,c_n$. Подставляя эти функции в (4) определим $y_2,y_3,...,y_n$.

$$\begin{cases}y_1=\Psi_1(x,c_1,c_2,...,c_n)\\ y_2=\Psi_2(x,c_1,c_2,...,c_n)\\ y_n=\Psi_n(x,c_1,c_2,...,c_n)\end{cases} \qquad (5)$$

Далее обычным образом определяем $c_1,...,c_n$ с помощью начальных условий.

Замечание 1. Если система (1) линейна относительно искомых функций, то уравнение (4а) будет линейным.

Пример:

Проинтегрировать систему $\begin{cases}\frac{dy}{dz}=y+z+x\\ \frac{dz}{dx}=-4y-3z+2x\end{cases}$ $y(0)=1, z(0)=0$.

Дифференцируем

1$^{-е}$ уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1,\ \frac{d^2y}{dx^2} = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$.

или $\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1$. Из 1го уравнения системы выразим z: $z = \frac{dy}{dx} - y - x$ и подставляем в полученное уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\frac{dy}{dx} + 2y + 2x + 3x + 1,\ y'' + 2y' + y = 5x + 1$

$k^2 + 2k + 1 = 0,\ k_1 = k_2 = -1,\ y_{00} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$. $\tilde{y} = Ax + B; \tilde{y}' = A; \tilde{y}'' = 0; 2A + Ax + B = 5x + 1;\ A = 5; B = -9$, тогда

$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + 5x - 9$.

Ищем $\frac{dy}{dx}: \frac{dy}{dx} = -c_1e^{-x} + c_2e^{-x} - c_2xe^{-x} + 5$, тогда $z = -c_1e^{-x} + c_2e^{-x} - c_2xe^{-x} + 5 - c_1e^{-x} - c_2xe^{-x} - 5x + 9 - x =$

$= e^{-x}(c_2 - 2c_1 - 2c_2x) - 6x + 14 = z$.

Найдём c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$\begin{cases} 1 = c_1 - 9 \\ 0 = c_2 - 2c_1 + 14 \end{cases} \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = 6 \end{cases}$ Решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$y = 10e^{-x} + 6xe^{-x} + 5x - 9,\ z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$.

Замечание 2. Мы предполагали, что из первых $(n-1)$ уравнений системы (3) можно определить функции $y_2, y_3, ..., y_n$. Может случиться, что переменные $y_2, y_3, ..., y_n$, исключаются не из *n*, а из меньшего числа уравнений. Тогда для определения *y* мы получаем уравнение, порядок которого ниже n.